Übung 20 Mechanische Wellen
Wellengrössen, Wellengleichung, Longitudinal-, Transversalwellen

Lernziele

- den Zusammenhang zwischen der Frequenz, der Wellenlänge und der Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Welle kennen und verstehen.
- die Wellengleichung einer eindimensionalen harmonischen Welle kennen, verstehen und anwenden können.
- verstehen, dass sich in einem Festkörper Longitudinalwellen schneller ausbreiten als Transversalwellen.
- eine neue Problemstellung bearbeiten können.

Aufgaben

1. Die Frequenz f, die Wellenlänge λ und die Ausbreitungsgeschwindigkeit v_{Ph} einer Welle sind Grössen, die in einer festen Beziehung zueinander stehen.

   Finden Sie diese Beziehung, und drücken Sie sie in Form einer mathematischen Formel aus.

   Hinweis:
   Betrachten Sie im Buch Metzler die Abbildung 123.1 auf der Seite 123.
   Überlegen Sie sich, in welcher Zeitspanne ein Wellenberg eine Wellenlänge weit fortschreitet.

2. Eine fortschreitende, lineare Welle kann mathematisch durch die Funktion y beschrieben werden:

$$y: \quad R^2 \rightarrow R, \qquad (x,t) \rightarrow y = y(x,t)$$

   y ist eine Funktion mit zwei Variablen. Sie ordnet den beiden reellen Grössen x (Ort) und t (Zeit) die reelle Grösse y (Elongation) zu. Die Funktion drückt aus, wie gross die Elongation y eines Teilchens an einem bestimmten Ort x und zu einem bestimmten Zeitpunkt t ist.

   Erfolgt die Anregung der Welle harmonisch, ergibt sich eine **harmonische Welle** mit der folgenden Funktionsgleichung:

$$y(x,t) = \hat{y} \sin(\omega t - kx) \qquad \text{wobei:} \quad \hat{y} := \text{Amplitude}$$
$$\omega := \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad \text{Kreisfrequenz}$$
$$k := \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{Wellenzahl}$$

   Gegeben seien die Amplitude $\hat{y}$, die Frequenz f und die Ausbreitungsgeschwindigkeit v_{Ph} der harmonischen Welle:

$$\hat{y} = 20 \text{ cm} \qquad f = 0.40 \text{ Hz} \qquad v_{Ph} = 0.50 \text{ m/s}$$

   a) Bestimmen Sie die Elongation y am Ort x zum Zeitpunkt t
      i) x = 0 cm t = 0 s
      ii) x = 40 cm t = 1.0 s

   b) Bestimmen Sie alle Stellen x, an welchen sich zum Zeitpunkt t ein Wellenberg befindet.
      i) t = 0 s
      ii) t = 1 s

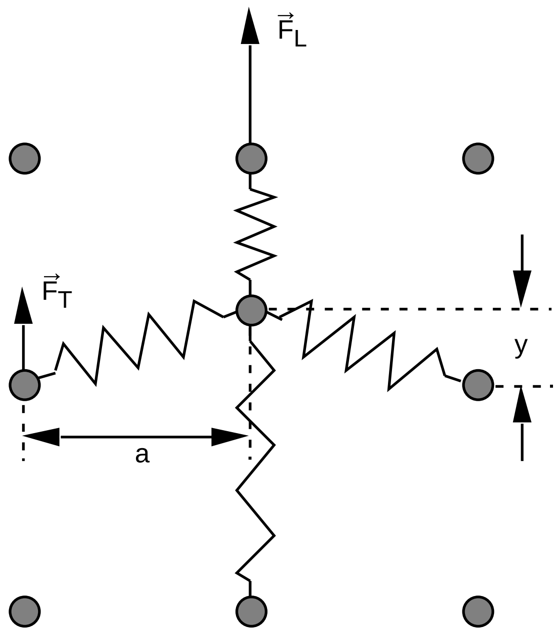
3. Studieren Sie im Buch Metzler den Exkurs "Erdbebenwellen (seismische Wellen)" (Seite 125).

   Im abgebildeten Seismogramm sind die Wellen eines Erdbebens aufgezeichnet.

   Bestimmen Sie mit Hilfe des abgebildeten Seismogrammes und den Angaben im Text die Entfernung des Epizentrums vom Ort des Seismografen.

4. In einem Festkörper ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Longitudinalwellen grösser als die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Transversalwellen. Der Grund liegt darin, dass bei der Auslenkung eines Teilchens die Längskräfte grösser sind als die Querkräfte (Metzler, Seite 124).

Betrachten Sie im folgenden Gittermodell des Festkörpers (vgl. Metzler, Abb. 125.1, Seite 125) ein Teilchen, welches um y aus der Gleichgewichtslage ausgelenkt wird:



Die Auslenkung y eines Teilchens bewirkt über die Federkopplungen eine Querkraft F_T auf das benachbarte Teilchen in transversaler Richtung sowie eine Längskraft F_L auf das benachbarte Teilchen in longitudinaler Richtung.

Beurteilen Sie anhand des Gittermodelles, wie gross bei einer bestimmten Auslenkung y eines Teilchens das Verhältnis F_T/F_L zwischen der Querkraft F_T und der Längskraft F_L ist.

Drücken Sie F_T/F_L in Abhängigkeit der Auslenkung y und der sogenannten Gitterkonstanten a aus.

Lösungen

1. $v_{Ph} = \lambda \cdot f$

2. a) i) $y(0\text{ m}, 0\text{ s}) = 0\text{ cm}$

   ii) $y(0.4\text{ m}, 1.0\text{ s}) = 0.096\text{ m} = 9.6\text{ cm}$

   b) i) $x = \frac{3}{4}\lambda + n\cdot\lambda\ (n\quad Z) = \ldots, -0.31\text{ m}, 0.94\text{ m}, 2.19\text{ m}, \ldots$

   ii) Da die Frequenz 0.4 Hz beträgt, schreitet die Welle in 1 Sekunde 0.4 Wellenlängen fort, d.h. die Wellenberge sind gegenüber i) um 0.4 Wellenlängen verschoben.

   $x = \left(\frac{3}{4} + 0.4\right)\lambda + n\cdot\lambda\ (n\quad Z) = \ldots, 0.19\text{ m}, 1.44\text{ m}, 2.69\text{ m}, \ldots$

3. $\Delta s = \frac{v_p v_s}{v_p - v_s}\Delta t \approx \frac{14\text{ km/s}\cdot 3.5\text{ km/s}}{14\text{ km/s} - 3.5\text{ km/s}}\cdot 3.5\text{ min} \approx 1000\text{ km}$

4. $\frac{F_T}{F_L} = \sqrt{1 + \left(\frac{y}{a}\right)^2} - 1 < 1$

   $F_T < F_L$