Übung 9a — Elektrisches Feld
Auf-/Entladen eines Kondensators

Lernziele

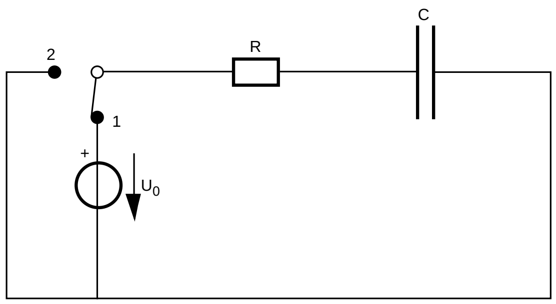
- ein mathematisches Modell für das Auf- bzw. Entladen eines Kondensators über einem Widerstandselement entwickeln können.
- eine neue Problemstellung analysieren und bearbeiten können.

Einleitung

In einem Unterrichtsexperiment wurde ein Kondensator über einem Widerstandselement auf- bzw. entladen. Der zeitliche Verlauf der Spannung über dem Kondensator sowie des Auf- bzw. Entlade-Stromes wurden dabei erfasst und grafisch dargestellt.

Das Ziel dieser Übung 9a besteht darin, ein mathematische Modell für das Auf- bzw. Entladen eines Kondensators vollständig zu entwickeln.

Betrachten Sie dazu das Schaltbild für das Auf- bzw. Entladen eines Kondensators über ein Widerstandselement (vgl. Unterricht):



Schalterstellung 1: Aufladen des Kondensators
Schalterstellung 2: Entladen des Kondensators

Aufgaben

1. Skizzieren Sie das Schaltbild auf Ihr Blatt, und ergänzen Sie es wie folgt:

   a) Zeichnen Sie den elektrischen Ladungsstrom I_Q ein.

   b) Zeichnen Sie die Spannungen U_R bzw. U_C über dem Widerstandselement bzw. über dem Kondensator ein.

   c) Zeichnen Sie die im Kondensator gespeicherte Ladungsmenge Q ein.

Aufladen des Kondensators (Aufgaben 2 bis 7)

2. Formulieren Sie die physikalischen Grundgesetze (Maschensatz, Widerstandsgesetz, Kapazitätsgesetz) für das Aufladen des Kondensators.

3. Beurteilen Sie, welche der physikalischen Grössen, die in den in der Aufgabe 2 formulierten Grundgesetzen vorkommen,

   a) zeit-abhängig, d.h. Funktionen der Zeit t sind.

   b) zeit-unabhängig, d.h. Konstanten bezüglich der Zeit t sind.

4. Stellen Sie eine Differentialgleichung für die Spannung U_C über dem Kondensator auf.

Hinweise:
- Kombinieren Sie die in der Aufgabe 2 formulierten Grundgesetze.
- Benützen Sie, dass die zeitliche Ableitung der Ladung Q gerade gleich dem elektrischen Ladungsstrom I_Q ist, d.h. $\dot{Q} = I_Q$.
  (Beachten Sie, dass in der Physik die erste Ableitung nach der Zeit t mit einem Punkt über der abzuleitenden Grösse bezeichnet wird.)
- Die gesuchte Differentialgleichung soll als einzige zeitabhängige Grössen die Spannug U_C und deren erste Ableitung $\dot{U}_C$ enthalten.

5. Betrachten Sie die Differentialgleichung, die Sie in der Aufgabe 4 hergeleitet haben.

a) Geben Sie an, um was für einen Typ Differentialgleichung es sich handelt.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

c) Der Kondensator soll am Anfang, d.h. bei t = 0, ungeladen sein.
Formulieren Sie die entsprechende Anfangsbedingung für die Spannung U_C.

d) Bestimmen Sie die partikuläre Lösung der Differentialgleichung für die in c) formulierte Anfangsbedingung.

e) Skizzieren Sie den Grafen der in d) bestimmten Funktion $U_C = U_C(t)$.

Hinweis:
- Studieren Sie nötigenfalls Ihre Unterlagen des Kurses "Mathematik 2".

6. Stellen Sie eine Differentialgleichung für den elektrischen Ladungsstrom I_Q auf.

Hinweise:
- (wie Aufgabe 4)
- Die gesuchte Differentialgleichung soll als einzige zeitabhängige Grössen den elektrischen Ladungsstrom I_Q und dessen erste Ableitung $\dot{I}_Q$ enthalten.
- Die erste Ableitung $\dot{I}_Q$ tritt auf, wenn man eine der zu kombinierenden Gleichungen nach der Zeit t ableitet.

7. Betrachten Sie die Differentialgleichung, die Sie in der Aufgabe 6 hergeleitet haben.

a) Geben Sie an, um was für einen Typ Differentialgleichung es sich handelt.

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

c) Bestimmen Sie den Anfangsstrom $I_{Q0} = I_Q(0)$. Drücken Sie ihn in Abhängigkeit der Konstanten U_0, R, C aus.

d) Bestimmen Sie die partikuläre Lösung der Differentialgleichung.

e) Skizzieren Sie den Grafen der in d) bestimmten Funktion $I_Q = I_Q(t)$.

Entladen des Kondensators (Aufgaben 8 bis 13)

8. Formulieren Sie die physikalischen Grundgesetze (Maschensatz, Widerstandsgesetz, Kapazitätsgesetz) für das Entladen des Kondensators.

9. Beurteilen Sie, welche der physikalischen Grössen, die in den in der Aufgabe 2 formulierten Grundgesetzen vorkommen,

a) zeit-abhängig, d.h. Funktionen der Zeit t sind.

b) zeit-unabhängig, d.h. Konstanten bezüglich der Zeit t sind.

10. Stellen Sie eine Differentialgleichung für die Spannung U_C über dem Kondensator auf.

    Hinweise:
    - (wie Aufgabe 4)

11. Betrachten Sie die Differentialgleichung, die Sie in der Aufgabe 10 hergeleitet haben.

    a) Geben Sie an, um was für einen Typ Differentialgleichung es sich handelt.

    b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

    c) Der Kondensator soll am Anfang, d.h. bei $t = 0$, vollständig geladen sein.
    Formulieren Sie die entsprechende Anfangsbedingung für die Spannung U_C.

    d) Bestimmen Sie die partikuläre Lösung der Differentialgleichung für die in c) formulierte Anfangsbedingung.

    e) Skizzieren Sie den Grafen der in d) bestimmten Funktion $U_C = U_C(t)$.

    Hinweis:
    - (wie Aufgabe 5)

12. Stellen Sie eine Differentialgleichung für den elektrischen Ladungsstrom I_Q auf.

    Hinweise:
    - (wie Aufgabe 6)

13. Betrachten Sie die Differentialgleichung, die Sie in der Aufgabe 12 hergeleitet haben.

    a) Geben Sie an, um was für einen Typ Differentialgleichung es sich handelt.

    b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

    c) Bestimmen Sie den Anfangsstrom $I_{Q0} = I_Q(0)$. Drücken Sie ihn in Abhängigkeit der Konstanten U_0, R, C aus.

    d) Bestimmen Sie die partikuläre Lösung der Differentialgleichung.

    e) Skizzieren Sie den Grafen der in d) bestimmten Funktion $I_Q = I_Q(t)$.

Allgemeine Aufgaben

14. Beurteilen Sie mit schlüssiger Begründung, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist:

    "Der Zeitfaktor $\tau := RC$ gibt gerade an, nach welcher Zeit der elektrische Ladungsstrom I_Q beim Aufladen bzw. die Spannung U_C über dem Kondensator beim Entladen auf den e-ten Teil des jeweiligen Anfangswertes abgesunken ist."

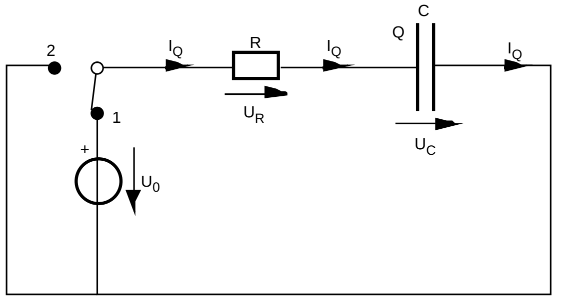
15. Im Unterrichtsexperiment wurde mit Hilfe einer Gleichstromquelle mit der Klemmenspannung $U_0 = 4$ V ein Kondensator mit der Kapazität $C = 2$ μF über einem Widerstandselement mit dem Widerstand $R = 1$ MΩ aufgeladen.

    a) Bestimmen Sie den Zeitpunkt t, zu welchem der Kondensator
        i) zu 90% aufgeladen ist.
        ii) zu 99% aufgeladen ist.

    b) Bestimmen Sie die im vollständig aufgeladenen Kondensator gespeicherte Ladung und Energie.

Lösungen

1.



2. Maschensatz: $U_0 - U_C - U_R = 0$
Widerstandsgesetz: $U_R = R \cdot I_Q$
Kapazitätsgesetz: $Q = C \cdot U_C$

3. a) $U_C = U_C(t)$, $U_R = U_R(t)$, $I_Q = I_Q(t)$, $Q = Q(t)$

b) U_0, R, C

4. $R \cdot C \cdot \dot{U}_C + U_C = U_0$

5. a) Inhomogene lineare Differentialgleichung (Dgl) 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

b) Allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl
= Allgemeine Lösung der homogenen Dgl + Partikuläre Lösung der inhomogenen Dgl

Allgemeine Lösung der homogenen Dgl
$U_C = A\, e^{-(1/RC)t}$ (A R)

Partikuläre Lösung der inhomogenen Dgl
$U_C = U_0$

Allgemeine Lösung der inhomogenen Dgl
$U_C = A\, e^{-(1/RC)t} + U_0$ (A R)

c) $U_C(0) = 0$

d) $U_C = U_0\,(1 - e^{-(1/RC)t})$

e) ...

6. $R \cdot \dot{I}_Q + \frac{1}{C} I_Q = 0$

7. a) Homogene lineare Differentialgleichung (Dgl) 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

b) Allgemeine Lösung der Dgl
$I_Q = A\, e^{-(1/RC)t}$ (A R)

c) $I_{Q0} = \frac{U_0}{R}$

d) $I_Q = \frac{U_0}{R}\, e^{-(1/RC)t}$

e) …

8. Maschensatz: $U_R + U_C = 0$
Widerstandsgesetz: $U_R = R\cdot I_Q$
Kapazitätsgesetz: $Q = C\cdot U_C$

9.
a) $U_C = U_C(t)$, $U_R = U_R(t)$, $I_Q = I_Q(t)$, $Q = Q(t)$

b) R, C

10. $R\cdot C\cdot \dot{U}_C + U_C = 0$

11.
a) Homogene lineare Differentialgleichung (Dgl) 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

b) Allgemeine Lösung der Dgl
$U_C = A\ e^{-(1/RC)t}$ (A R)

c) $U_C(0) = U_0$

d) $U_C = U_0\ e^{-(1/RC)t}$

e) …

12. gleiche Differentialgleichung wie beim Aufladen des Kondensators
$R\cdot \dot{I}_Q + \frac{1}{C} I_Q = 0$

13.
a) Homogene lineare Differentialgleichung (Dgl) 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

b) Allgemeine Lösung der Dgl
$I_Q = A\ e^{-(1/RC)t}$ (A R)

c) $I_{Q0} = -\frac{U_0}{R}$

d) $I_Q = -\frac{U_0}{R}\ e^{-(1/RC)t}$

e) …

14. wahr

15.
a) $t = -RC \ln\left(1 - \frac{U_C}{U_0}\right)$

i) $\frac{U_C}{U_0} = 0.9$ — $t = 4.6\ s$

ii) $\frac{U_C}{U_0} = 0.99$ — $t = 9.2\ s$

b)

$Q = C\cdot U_C$	$W = \frac{1}{2} C\cdot U_C^2$
$U_C = U_0$	$U_C = U_0$
--------------	--------------------------
$Q = C\cdot U_0 = 8\ \mu C$	$W = \frac{1}{2} C\cdot U_0^2 = 16\ \mu J$