

Aufgaben 10 Wellen Schwebung, Stehende Welle, Eigenschwingungen

Lernziele

- das Phänomen Schwebung kennen und verstehen.
- die mathematische Beschreibung einer Schwebung kennen, verstehen und anwenden können.
- wissen, wie eine Welle an einem festen und freien Ende eines Wellenträgers reflektiert wird.
- verstehen, wie eine stehende Welle entsteht.
- eine stehende Welle auf einem eindimensionalen Wellenträger als Überlagerung zweier entgegenlaufender Wellen verstehen.
- Beispiele von stehenden Wellen kennen.
- eine Eigenschwingung auf einem eindimensionalen Wellenträger als Überlagerung zweier entgegenlaufender Wellen verstehen.
- verstehen, dass sich auf einem endlichen Wellenträger nur bei bestimmten Frequenzen eine stehende Welle bzw. eine Eigenschwingung bildet.
- den Zusammenhang zwischen der Länge eines eindimensionalen Wellenträgers und den Wellenlängen bzw. Frequenzen der möglichen Eigenschwingungen verstehen und anwenden können.
- die mathematische Beschreibung einer stehenden Welle bzw. Eigenschwingung kennen, verstehen und anwenden können.
- einen Sachverhalt analysieren und beurteilen können.

Aufgaben

Schwebung

- 10.1 Wenn zwei bestimmte Stimmgabeln gleichzeitig angeschlagen werden, hört man 4.0 Schwebungen pro Sekunde. Die Frequenz der einen Stimmgabel beträgt 500 Hz.
- a) Bestimmen Sie die Frequenzwerte, welche bei der anderen Stimmgabel möglich sind.
- Auf die 500-Hz-Stimmgabel wird nun ein Stückchen Wachs geklebt, um ihre Frequenz ein wenig zu verringern.
- b) Erläutern Sie, wie man mit Hilfe der jetzt gemessenen Schwebungsfrequenz bestimmen kann, welche der Lösungen in a) die richtige Frequenz der anderen Stimmgabel angibt.
- 10.2 Betrachten Sie zwei Elektromotoren, welche beide mit einer Drehzahl von ca. 3000/min laufen. Der Ton, den man von beiden zusammen hört, wird pro Sekunde zweimal lauter und leiser.
- Bestimmen Sie, um wie viel Prozent die Drehzahlen der beiden Motoren voneinander abweichen.
- 10.3 Beurteilen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie das entsprechende Kästchen an.
- | | wahr | falsch |
|--|--------------------------|--------------------------|
| a) Eine Schwebung kommt zustande, wenn sich zwei Wellen mit fast gleichen Frequenzen überlagern. | ☐ | ☐ |
| b) Beobachtet man die Schwebung zweier Wellen an einem festen Ort, so ist die Schwebungsfrequenz gleich der Differenz der Frequenzen der Einzelwellen. | ☐ | ☐ |
| c) Die mathematische Beschreibung der Überlagerung zweier Wellen ist unabhängig davon, wie gross die Differenz der Frequenzen beider Wellen sind. | ☐ | ☐ |
| d) Bei Schallwellen sind Schwebungen nur dann hörbar, wenn die beiden Frequenzen der Einzelwellen genügend nahe beieinander liegen. | ☐ | ☐ |
| e) Bei der Schwebung der Töne zweier Stimmgabeln der Frequenzen 440 Hz und 444 Hz nimmt man einen Ton der Frequenz 442 Hz wahr. | ☐ | ☐ |

Stehende Welle

- 10.4 Betrachten Sie die Überlagerung zweier Sinus-Wellen, welche durch die beiden Funktionen y_1 und y_2 mit den folgenden Funktionsgleichungen beschrieben werden:

$$y_1(x,t) = \hat{y} \cdot \sin(kx - \omega t) \quad \text{mit } \hat{y} = 0.30 \text{ m, } k = 2.0 \text{ m}^{-1}, \omega = 1.0 \text{ s}^{-1}$$

$$y_2(x,t) = \hat{y} \cdot \sin(kx + \omega t) \quad \text{mit } \hat{y} = 0.30 \text{ m, } k = 2.0 \text{ m}^{-1}, \omega = 1.0 \text{ s}^{-1}$$

- a) Bestimmen Sie die Wellenlänge, die Frequenz und die Periodendauer der beiden Wellen.
b) Begründen Sie schlüssig, dass die erste Welle in die positive und die zweite Welle in die negative x-Richtung läuft.

Hinweise:

- Betrachten Sie jede Einzelwelle zu zwei nahe beieinanderliegenden Zeitpunkten t_1 und t_2 ($t_2 > t_1$).
- Überlegen Sie sich, ob sich für einen Punkt konstanter Phase, z.B. für einen Wellenberg, die x-Koordinate in der Zeitspanne von t_1 bis t_2 vergrößert oder verkleinert.
- Die Phase ist das Argument der Sinusfunktion, d.h. $kx - \omega t$ bzw. $kx + \omega t$.

- c) Bilden Sie die Überlagerung der beiden Wellen:

$$y(x,t) := y_1(x,t) + y_2(x,t)$$

Interpretieren Sie das Ergebnis: Begründen Sie, dass es sich bei dieser Überlagerung um eine stehende Welle handelt.

Hinweis:

- Verwenden Sie die folgende trigonometrische Identität:

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) \equiv 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

- 10.5 Führen Sie in Moodle den [Test 10.1.2](#) durch.

Eigenschwingungen

- 10.6 Die Wellenlängen bzw. die Frequenzen der Eigenschwingungen auf einem Wellenträger der Länge l seien wie folgt bezeichnet:

	Wellenlänge	Frequenz
Grundschiwingung	λ_0	f_0
1. Oberschiwingung	λ_1	f_1
2. Oberschiwingung	λ_2	f_2
3. Oberschiwingung	λ_3	f_3
...		
m. Oberschiwingung	λ_m	f_m

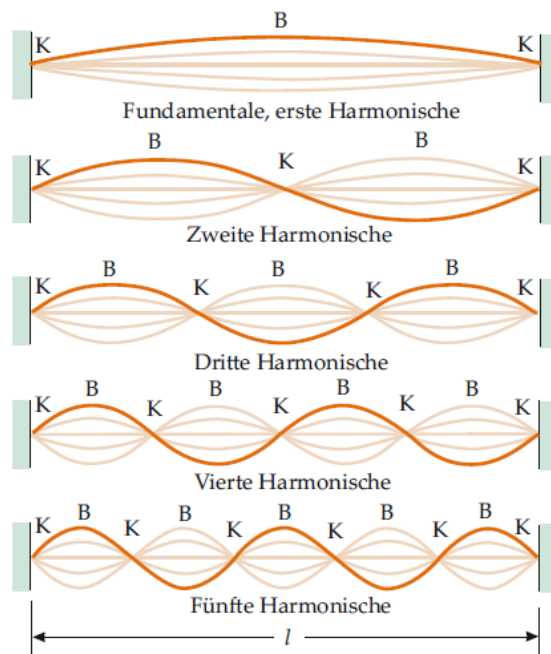
Leiten Sie für die unten genannten drei Fälle a), b) und c) mit Hilfe der entsprechenden Abbildungen eine Beziehung zwischen der Frequenz f_m der m-ten Oberschiwingung und der Frequenz f_0 der Grundschiwingung her.

Vorgehen:

- i) Drücken Sie mit Hilfe der entsprechenden Abbildung die Grundwellenlänge λ_0 durch die Länge l des Wellenträgers aus.
ii) Drücken Sie mit Hilfe der entsprechenden Abbildung die Wellenlänge λ_m der m-ten Oberschiwingung durch die ganze Zahl m und die Länge l des Wellenträgers aus.
iii) (siehe nächste Seite)

- iii) Drücken Sie die Grundfrequenz f_0 durch die Grundwellenlänge λ_0 und die Ausbreitungsgeschwindigkeit v aus.
- iv) Drücken Sie die Frequenz f_m der m -ten Oberschwingung durch die Wellenlänge λ_m der m -ten Oberschwingung und die Ausbreitungsgeschwindigkeit v aus.
- v) Drücken Sie durch Kombination der Ergebnisse aus i) bis iv) die Frequenz f_m der m -ten Oberschwingung durch die ganze Zahl m und die Grundfrequenz f_0 aus.
- vi) Drücken Sie das Ergebnis aus v) in Worten aus.
Welche Frequenzen treten in den Eigenschwingungen (Grundschiwingung und Oberschwingungen) im Vergleich zur Grundfrequenz auf?

- a) Der Wellenträger hat zwei feste Enden.



Hinweise:

- Die „Fundamentale“ bzw. „Erste Harmonische“ ist die Grundschiwingung.
- Die „Zweite Harmonische“ ist die erste Oberschwingung.
- Die „Dritte Harmonische“ ist die zweite Oberschwingung.
- usw.

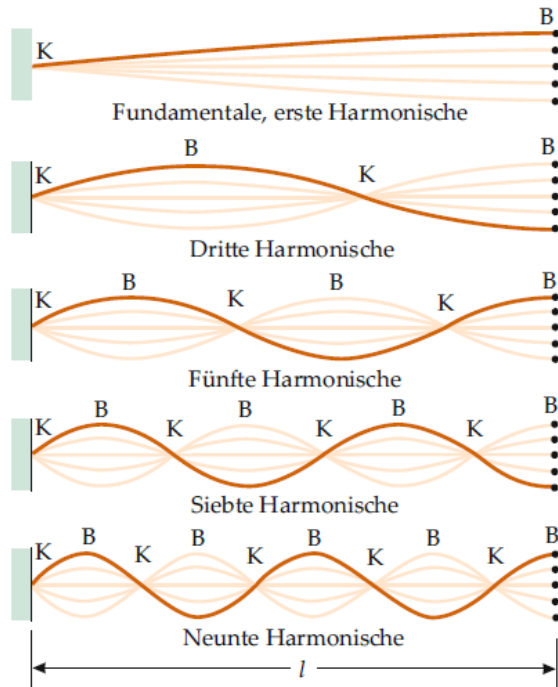
- b) Der Wellenträger hat zwei freie Enden.

Hinweise:

- An den beiden freien Enden befinden sich Bäuche (B), und nicht Knoten (K) wie in a).
- Knoten und Bäuche sind im Vergleich zu a) vertauscht, d.h. wo sich in a) Knoten befinden, befinden sich in b) Bäuche, und wo sich in a) Bäuche befinden, befinden sich in b) Knoten.

- c) (siehe nächste Seite)

- c) Der Wellenträger hat ein festes und ein freies Ende.



- Die „Fundamentale“ bzw. „Erste Harmonische“ ist die Grundschiwingung.
- Die „Dritte Harmonische“ ist die erste Oberschiwingung.
- Die „Fünfte Harmonische“ ist die zweite Oberschiwingung.
- usw.

(Quelle: Tipler/Mosca, Physik für Studierende der Naturwissenschaften und Technik, Berlin 2019, Springer Spektrum, 8. Auflage, Seiten 508 und 513)

- 10.7 Eine beidseitig offene und eine einseitig geschlossene Orgelpfeife sind beide auf denselben Grundton (Grundschiwingung) der Frequenz 264 Hz abgestimmt.

- a) Bestimmen Sie die Längen der beiden Pfeifen.

Hinweise:

- Überlegen Sie sich den Zusammenhang zwischen der Wellenlänge der Grundschiwingung und der Länge des Wellenträgers.
- Rechnen Sie mit einer Schallgeschwindigkeit von 344 m/s.

- b) Geben Sie für beide Pfeifen die Frequenzen der ersten drei Obertöne (Oberschiwingungen) an.

- 10.8 Führen Sie in Moodle den [Test 10.1.3](#) durch.

- 10.9 (siehe nächste Seite)

10.9 Beurteilen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.
Kreuzen Sie das entsprechende Kästchen an.

	wahr	falsch
a) Stehende Wellen treten nur bei endlichen Wellenträgern auf.	☐	☐
b) Die Frequenzen der Eigenschwingungen auf einem Wellenträger mit festen Enden sind alle ganzzahligen Vielfachen der Frequenz der Grundschiwingung.	☐	☐
c) Bei einem einseitig offenen Wellenträger ist die Frequenz der dritten Oberschiwingung das Siebenfache der Frequenz der Grundschiwingung.	☐	☐
d) In einer stehenden Welle ist die Energiedichte im zeitlichen Mittel räumlich konstant.	☐	☐
e) Auf dem gleichen Wellenträger sind nicht mehrere Eigenschwingungen gleichzeitig möglich.	☐	☐

Lehrbuch KPK 3 (Karlsruher Physikkurs, Band 3)

4 Wellen

- 4.10 Zwei Sinuswellen – Interferenz (Seiten 46 bis 48)
- 4.11 Reflexion von Wellen (Seite 48)
- 4.12 Eigenschwingungen von Wellenträgern (Seiten 48 und 49, nur bis Tabelle 4.1, ohne Aufgaben)

Lösungen

10.1 ...

$$10.2 \quad r = \frac{\Delta f}{f} = \frac{f_S}{f} = \frac{2 \text{ Hz}}{3000 \text{ min}^{-1}} = 0.04 = 4\%$$

- 10.3
- a) wahr
 - b) wahr
 - c) wahr
 - d) wahr
 - e) wahr

- 10.4
- a) $\lambda = \pi \text{ m}, f = \frac{1}{2\pi} \text{ s}^{-1}, T = 2\pi \text{ s}$
 - b) Erste Welle: Wenn t grösser wird, bleibt die Phase $kx - \omega t$ konstant, wenn auch x **grösser** wird. Ein Punkt gleicher Phase, z.B. ein Wellenberg, bewegt sich also in die positive x -Richtung. Die ganze Welle läuft daher in die **positive** x -Richtung.

Zweite Welle: Wenn t grösser wird, bleibt die Phase $kx + \omega t$ konstant, wenn x **kleiner** wird. Ein Punkt gleicher Phase, z.B. ein Wellenberg, bewegt sich also in die negative x -Richtung. Die ganze Welle läuft daher in die **negative** x -Richtung.
 - c) $y(x,t) = 2 \hat{y} \sin(kx) \cos(\omega t)$

Die Variablen x und t sind voneinander „getrennt“: Die Variable x steht nur im Argument der Sinus-Funktion, die Variable t nur im Argument der Cosinus-Funktion.

10.5 -

- 10.6
- a)
 - i) $\lambda_0 = 2l$
 - ii) $\lambda_m = \frac{2}{m+1} l$
 - iii) $f_0 = \frac{v}{\lambda_0}$
 - iv) $f_m = \frac{v}{\lambda_m}$
 - v) $f_m = (m+1) f_0$
 - vi) Grundschiwingung: f_0
1. Oberschiwingung ($m = 1$): $f_1 = 2 \cdot f_0$
2. Oberschiwingung ($m = 2$): $f_2 = 3 \cdot f_0$
3. Oberschiwingung ($m = 3$): $f_3 = 4 \cdot f_0$
usw.

In den Eigenschwiwingungen (Grundschiwingung und Oberschiwingungen) treten als Frequenzen alle ganzzahligen Vielfachen der Grundfrequenz f_0 auf:
 $f_0, 2 \cdot f_0, 3 \cdot f_0, 4 \cdot f_0, \dots$
 - b) gleich wie bei a)
 - c)
 - i) $\lambda_0 = 4l$
 - ii) $\lambda_m = \frac{4}{2m+1} l$
 - iii) (siehe nächste Seite)

iii) $f_0 = \frac{v}{\lambda_0}$

iv) $f_m = \frac{v}{\lambda_m}$

v) $f_m = (2m + 1) f_0$

- vi) Grundschiwingung: f_0
1. Oberschiwingung ($m = 1$): $f_1 = 3 \cdot f_0$
2. Oberschiwingung ($m = 2$): $f_2 = 5 \cdot f_0$
3. Oberschiwingung ($m = 3$): $f_3 = 7 \cdot f_0$
usw.

In den Eigenschwiwingungen (Grundschiwingung und Oberschiwingungen) treten als Frequenzen nur die ungeraden ganzzahligen Vielfachen der Grundfrequenz f_0 auf: $f_0, 3 \cdot f_0, 5 \cdot f_0, 7 \cdot f_0, \dots$

10.7 a) beidseitig offene Pfeife

$$l = \frac{\lambda_0}{2}$$

$$v = \lambda_0 \cdot f_0$$

 $\Rightarrow l = \frac{v}{2 \cdot f_0} = 65.2 \text{ cm}$

einseitig geschlossene Pfeife

$$l = \frac{\lambda_0}{4}$$

$$v = \lambda_0 \cdot f_0$$

 $\Rightarrow l = \frac{v}{4 \cdot f_0} = 32.6 \text{ cm}$

b) beidseitig offene Pfeife

1. OS $f_1 = 2 \cdot f_0 = 528 \text{ Hz}$

2. OS $f_2 = 3 \cdot f_0 = 792 \text{ Hz}$

3. OS $f_3 = 4 \cdot f_0 = 1.06 \text{ kHz}$

einseitig geschlossene Pfeife

1. OS $f_1 = 3 \cdot f_0 = 792 \text{ Hz}$

2. OS $f_2 = 5 \cdot f_0 = 1.32 \text{ kHz}$

3. OS $f_3 = 7 \cdot f_0 = 1.85 \text{ kHz}$

10.8 -

10.9 a) falsch

b) wahr

c) wahr

d) falsch

e) falsch