

Aufgaben 7 Wellen Energietransport, Wellengleichung

Lernziele

- wissen und verstehen, wie die Energiestromdichte und die Intensität definiert sind.
- den Zusammenhang zwischen der Intensität und der Amplitude einer Schwingungsgrösse kennen und anwenden können.
- für eine von einem punktförmigen Sender abgestrahlte Welle den Zusammenhang zwischen der Intensität und dem Abstand vom Sender kennen und verstehen.
- die allgemeine Form einer eindimensionalen Wellenfunktion kennen und verstehen.
- die eindimensionale Wellengleichung kennen und verstehen.
- Aussagen und Beziehungen zwischen Grössen mit Hilfe physikalischer Grundgesetze als Gleichungen formulieren können.
- einen Sachverhalt analysieren und beurteilen können.

Aufgaben

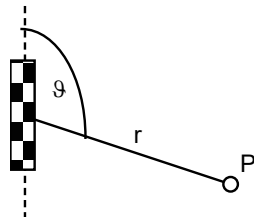
Energietransport

- 7.1 In einem als punktförmig betrachteten Sender wird eine harmonische Welle angeregt und ausgesendet. Der Sender sendet also eine in alle Richtungen gleichverteilte Kugelwelle aus. Die Wellenfronten sind Kugeloberflächen.
- a) Beurteilen Sie mit schlüssiger Begründung, ob und wie die Intensität I sowie die Amplitude $\hat{y}$ der Welle vom Abstand r vom Sender abhängen.
- Hinweise:
- Überlegen Sie sich, wie sich die mit der Welle ausbreitende Energie auf dem Wellenträger räumlich verteilt.
 - Überlegen Sie sich, wie der Flächeninhalt einer Wellenfront vom Abstand vom Sender abhängt.
 - Nehmen Sie an, dass die Welle auf ihrem Weg auf dem Wellenträger keine Energie verliert, d.h. dass keine Energie absorbiert wird.
- b) Bestimmen Sie, um welchen Faktor die Entfernung zum Sender vergrössert werden müsste, um die Intensität ...
- i) ... auf die Hälfte zu reduzieren.
- ii) ... auf ein Drittel zu reduzieren.
- iii) ... auf ein Viertel zu reduzieren.
- c) Die über die Zeit gemittelte Sendeleistung sei 100 W. Bestimmen Sie ...
- i) ... die in 60 s abgestrahlte Energie.
- ii) ... die Intensität der Welle 4.50 m vom Sender entfernt.
- Hinweise:
- Die Sendeleistung gibt an, wieviel Energie der Sender mit der Welle pro Zeiteinheit abstrahlt.
 - Die mittlere Sendeleistung $\bar{P}$ ist gleich gross wie die mittlere Energiestromstärke $\bar{I}_W$ durch eine den Sender umgebende Kugeloberfläche.

7.2 (siehe nächste Seite)

7.2 Eine Mobilfunkantenne strahlt eine elektromagnetische Welle ab.

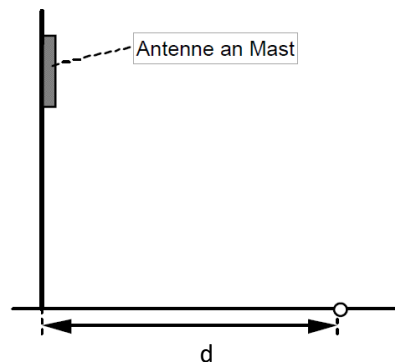
Die Intensität I der abgestrahlten elektromagnetischen Welle an einem bestimmten Ort P hängt von der Sendeleistung ab. Sie hängt aber auch vom Abstand r zur Antenne, vom Winkel ϑ zur Antennenachse sowie von der Frequenz der elektromagnetischen Welle ab.



Falls der Abstand r viel grösser ist als die Wellenlänge der elektromagnetischen Welle, gilt bei konstanter Frequenz und konstanter Sendeleistung (ohne Herleitung):

$$I \sim \frac{\sin^2(\vartheta)}{r^2}$$

Eine Mobilfunkantenne sei mit vertikaler Ausrichtung der Antennenachse an einem Mast in horizontalem Gelände montiert:



Bestimmen Sie die Entfernung d vom Fusse der Antenne, in welcher die Intensität (bei konstanter Frequenz und konstanter Sendeleistung) maximal ist.

Hinweise:

- Überlegen Sie sich, wie die Grössen ϑ und r von d abhängen, damit Sie die Intensität I als Funktion der alleinigen Variablen d ausdrücken können, d.h. $I = I(d)$.
- Betrachten Sie das folgende rechtwinklige Dreieck:
Antenne – Fusspunkt des Antennenmastes – Punkt am Boden im Abstand d .
- Bestimmen Sie das globale Maximum der Funktion $I = I(d)$.

Wellengleichung

7.3 Die folgende Funktion y beschreibt eine eindimensionale harmonische Welle, welche sich in die positive x -Richtung fortbewegt:

$$y(x,t) = \hat{y} \sin(kx - \omega t + \varphi)$$

- a) Zeigen Sie, dass die Funktion y die folgende Form aufweist:

$$y(x,t) = f(z) = f(x - vt) \quad (z := x - vt)$$

Hinweise :

- Klammern Sie im Argument der Sinus-Funktion den Faktor k aus.
 - Überlegen Sie sich, wie die Grössen k , ω und v zusammenhängen.
- b) Zeigen Sie, dass die Funktion y die folgende partielle Differentialgleichung, die sogenannte Wellengleichung, erfüllt:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t)$$

7.4 Zeigen Sie, dass jede Funktion y der Form

$$y(x,t) = f(z) = f(x - vt) \quad (z := x - vt)$$

die folgende partielle Differentialgleichung, die sogenannte Wellengleichung, erfüllt:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t)$$

Hinweis:

- Beim Ableiten der Funktion y benötigt man die Kettenregel:

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x,t) = \frac{df}{dz}(z) \cdot \frac{\partial z}{\partial x}(x,t) = \dots$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,t) = \frac{df}{dz}(z) \cdot \frac{\partial z}{\partial t}(x,t) = \dots$$

7.5 Führen Sie in Moodle den [Test 7.1](#) durch.

Lehrbuch KPK 3 (Karlsruher Physikkurs, Band 3)

4 Wellen

4.8 Energietransport mit Wellen (Seiten 44 und 45)

Lösungen

- 7.1 a) $A(r) :=$ Flächeninhalt einer Wellenfront im Abstand r vom Sender, $[A(r)] = \text{m}^2$
Die Wellenfronten sind Kugeloberflächen, deren Flächeninhalte A mit zunehmendem Abstand r vom Sender zunehmen.

$$A(r) = 4\pi r^2 \\ \Rightarrow A(r) \sim r^2$$

$I_W :=$ Energiestromstärke durch eine Kugeloberfläche im Abstand r vom Sender, $[I_W] = \text{W}$

$\bar{I}_W :=$ zeitlicher Mittelwert von I_W

$I(r) :=$ Intensität der Welle im Abstand r vom Sender, $[I(r)] = \text{W/m}^2$

$$\bar{I}_W = I(r) \cdot A(r)$$

$\bar{I}_W$ ist unabhängig von r , da keine Energie absorbiert wird.

$$\Rightarrow I(r) \sim \frac{1}{r^2}$$

$$I(r) \sim (\hat{y}(r))^2 \text{ (siehe Unterricht)}$$

$$\Rightarrow \hat{y}(r) \sim \frac{1}{r}$$

- b) $\bar{I}_W = I \cdot A$ (siehe a))
 $A \sim r^2$

$$\begin{aligned} & \text{-----} \\ \Rightarrow r^2 \sim A &= \frac{\bar{I}_W}{I} \sim \frac{1}{I} \\ \Rightarrow r &\sim \frac{1}{\sqrt{I}} \end{aligned}$$

- i) Halbierung von I
 $\Rightarrow$ Verkleinerung von $\sqrt{I}$ um den Faktor $\sqrt{2}$
 $\Rightarrow$ Vergrößerung von r um den Faktor $\sqrt{2}$
- ii) Drittelung von I
 $\Rightarrow$ Verkleinerung von $\sqrt{I}$ um den Faktor $\sqrt{3}$
 $\Rightarrow$ Vergrößerung von r um den Faktor $\sqrt{3}$
- iii) Viertelung von I
 $\Rightarrow$ Verkleinerung von $\sqrt{I}$ um den Faktor $\sqrt{4} = 2$
 $\Rightarrow$ Vergrößerung von r um den Faktor 2, d.h. Verdoppelung von r

- c) i) Abgestrahlte Energie $W = \bar{I}_W \cdot \Delta t = \bar{P} \cdot \Delta t = 100 \text{ W} \cdot 60 \text{ s} = 6.0 \text{ kJ}$

ii) Intensität $I = \frac{\bar{I}_W}{A} = \frac{\bar{P}}{A} = \frac{\bar{P}}{4\pi r^2} = \frac{100 \text{ W}}{4\pi(4.50 \text{ m})^2} = 0.39 \text{ W/m}^2$

7.2 $I(d) = k \cdot \frac{d^2}{(d^2 + h^2)^2}$ ($h =$ Höhe der Antenne über dem Boden, k konst.)

$I = I(d)$ maximal (globales Maximum) für $d = h$

7.3 ...

7.4 (siehe nächste Seite)

$$\begin{aligned} 7.4 \quad \frac{\partial y}{\partial x}(x,t) &= \frac{df}{dz}(z) \cdot \frac{\partial z}{\partial x}(x,t) = \frac{df}{dz}(z) \cdot 1 = \frac{df}{dz}(z) \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{df}{dz}(z) = \frac{d}{dz} \frac{df}{dz}(z) \cdot \frac{\partial z}{\partial x}(x,t) = \frac{d^2 f}{dz^2}(z) \cdot 1 = \frac{d^2 f}{dz^2}(z) \\ \frac{\partial y}{\partial t}(x,t) &= \frac{df}{dz}(z) \cdot \frac{\partial z}{\partial t}(x,t) = \frac{df}{dz}(z) \cdot (-v) = -v \cdot \frac{df}{dz}(z) \\ \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(-v \cdot \frac{df}{dz}(z) \right) = -v \cdot \frac{\partial}{\partial t} \frac{df}{dz}(z) = -v \cdot \frac{d}{dz} \frac{df}{dz}(z) \cdot \frac{\partial z}{\partial t}(x,t) = -v \cdot \frac{d^2 f}{dz^2}(z) \cdot (-v) = v^2 \frac{d^2 f}{dz^2}(z) \\ \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) &= \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) \end{aligned}$$

7.5 -