

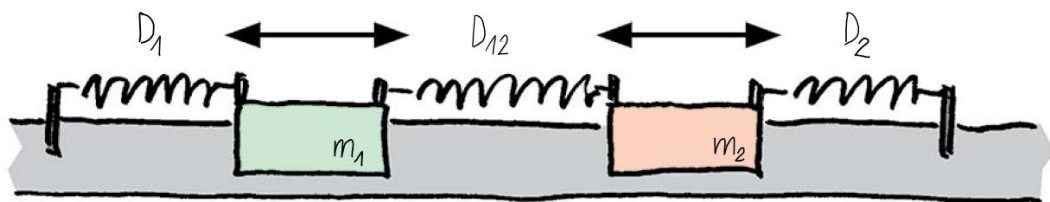
Aufgaben 5 Schwingungen Mehrfachschwinger, Eigenschwingungen

Lernziele

- wissen und verstehen, was ein Doppelschwinger und ein Mehrfachschwinger ist.
- wissen und verstehen, was eine Eigenschwingung und eine Eigenfrequenz eines Einfach-, Doppel- und Mehrfachschwingers ist.
- das Spektrum eines Doppelschwingers und eines Mehrfachschwingers kennen und verstehen.
- wissen, dass ein N-fachschwinger N verschiedene Eigenfrequenzen hat und N verschiedene Eigenschwingungen ausführen kann.
- ein mathematisches Modell zur Beschreibung der Bewegung eines Mehrfachschwingers aufstellen können.
- die Eigenschwingungen eines Mehrfachschwingers beschreiben und charakterisieren können.
- wissen, was die Grundschiwingung und die Oberschwingungen eines schwingungsfähigen Systems sind.
- die bei der Bewegung eines Mehrfachschwingers auftretenden Impuls- und Energieflüsse kennen und verstehen.
- einen Sachverhalt analysieren und beurteilen können.

Aufgaben

5.1 Betrachten Sie den folgenden ungedämpften Doppelschwinger (Lehrbuch KPK 3, Abb. 3.6, Seite 29):



Die Länge der Federn sowie die Distanz zwischen den beiden äusseren Federbefestigungen seien so gewählt, dass alle drei Federn entspannt sind, wenn sich die beiden Schwingkörper in ihren Ruhelagen befinden.

- Nehmen Sie an, dass die beiden Schwingkörper so aus ihren Ruhelagen ausgelenkt sind, dass die linke und die mittlere Feder zusammengedrückt und die rechte Feder gestreckt ist.
 - Kopieren Sie die Abbildung des Doppelschwingers.
Zeichnen Sie die horizontalen **Impulsströme** ein, welche die beiden Schwingkörper betreffen.
Nehmen Sie dabei an, dass die positive horizontale Richtung nach rechts zeigt.
 - Kopieren Sie die Abbildung des Doppelschwingers noch einmal.
Zeichnen Sie die horizontalen **Kräfte** ein, welche die Federn auf die beiden Schwingkörper ausüben.

Für die beiden Schwingkörper soll nun je eine eigene horizontale x-Koordinatenachse eingeführt werden. Wenn x_1 die x-Koordinate des linken Schwingkörpers und x_2 diejenige des rechten ist, dann soll $x_1 = x_2 = 0$ gelten, wenn sich die beiden Schwingkörper in ihren Ruhelagen befinden.

Betrachten Sie zunächst den allgemeinen Fall verschiedener Massen (m_1, m_2) der beiden Schwingkörper sowie verschiedener Federkonstanten (D_1, D_{12}, D_2) der drei Federn.

- Formulieren Sie für die beiden Schwingkörper je die skalare x-Komponente des (aus der Mechanik bekannten) Aktionsprinzips.
- Die in b) formulierten Gleichungen enthalten je drei Grössen.
Beurteilen Sie, ob und wie diese Grössen von den Orten x_1 und x_2 , den Geschwindigkeiten $v_1 = \dot{x}_1$ und $v_2 = \dot{x}_2$ und den Beschleunigungen $a_1 = \dot{v}_1 = \ddot{x}_1$ und $a_2 = \dot{v}_2 = \ddot{x}_2$ der beiden Schwingkörper abhängen. Die genannten Grössen sind dabei jeweils die skalaren x-Komponenten der entsprechenden Vektoren.
Setzen Sie dann die Ausdrücke in das Ergebnis von b) ein.

Hinweis:

- Die beiden Gleichungen bilden ein System zweier gekoppelter Differentialgleichungen für die Funktionen x_1 und x_2 . Die Differentialgleichungen heissen gekoppelt, da in beiden Gleichungen sowohl x_1 als auch x_2 vorkommt.

Betrachten Sie im Folgenden den Spezialfall, dass beide Massen sowie alle drei Federkonstanten gleich sind, d.h. $m_1 = m_2 =: m$ sowie $D_1 = D_{12} = D_2 =: D$.

Die beiden Eigenschwingungen des Systems können aus Symmetriegründen wie folgt charakterisiert werden:

Eigenschwingung 1: Die beiden Schwingkörper schwingen „gleichsinnig“ mit gleicher Frequenz und gleicher Amplitude, d.h. zu jedem Zeitpunkt gilt $x_1 = x_2$

Eigenschwingung 2: Die beiden Schwingkörper schwingen „gegensinnig“ mit gleicher Frequenz und gleicher Amplitude, d.h. zu jedem Zeitpunkt gilt $x_1 = -x_2$

- d) Schreiben Sie die beiden in c) gefundenen Differentialgleichungen für den Spezialfall gleicher Massen und gleicher Federkonstanten um.
- e) Bestimmen Sie die Eigenkreisfrequenzen ω_1 und ω_2 der beiden Eigenschwingungen. Drücken Sie ω_1 und ω_2 durch m und D aus.

Hinweise:

- Setzen Sie $x_1 = x_2$ (Eigenschwingung 1) bzw. $x_1 = -x_2$ (Eigenschwingung 2) in die in d) gefundenen Differentialgleichungen ein.
- Vergleichen Sie die so erhaltenen Differentialgleichungen mit der Differentialgleichung für einen einzelnen Federschwinger (siehe Aufgabe 2.1).

5.2 Führen Sie in Moodle den [Test 5.1](#) durch.

Lehrbuch KPK 3 (Karlsruher Physikkurs, Band 3)

3 Spektren

- 3.2 Spektren (Seiten 28 und 29)
- 3.3 Doppelschwinger (Seiten 29 bis 31)
- 3.4 Mehrfachschwinger (Seiten 31 und 32)

Lösungen

- 5.1 a) i) ...
ii) ...
- b) Linker Körper: $F_{11} + F_{12} = \dot{p}_1$
Rechter Körper: $F_{21} + F_{22} = \dot{p}_2$
- c) Linker Körper: $F_{11} = -D_1 \cdot x_1$
 $F_{12} = D_{12}(x_2 - x_1)$
 $\dot{p}_1 = m_1 \cdot \ddot{x}_1$
 $\Rightarrow -D_1 \cdot x_1 + D_{12}(x_2 - x_1) = m_1 \cdot \ddot{x}_1$
Rechter Körper: $F_{21} = -D_{12}(x_2 - x_1)$
 $F_{22} = -D_2 \cdot x_2$
 $\dot{p}_2 = m_2 \cdot \ddot{x}_2$
 $\Rightarrow -D_{12}(x_2 - x_1) - D_2 \cdot x_2 = m_2 \cdot \ddot{x}_2$
- d) Linker Körper: $D(-2x_1 + x_2) = m \cdot \ddot{x}_1$
Rechter Körper: $D(x_1 - 2x_2) = m \cdot \ddot{x}_2$
- e) Eigenschwingung 1: $x_1 = x_2$
Linker Körper: $-D \cdot x_1 = m \cdot \ddot{x}_1$
Rechter Körper: $-D \cdot x_2 = m \cdot \ddot{x}_2$
Eigenkreisfrequenz $\omega_1 = \sqrt{\frac{D}{m}}$
Eigenschwingung 2: $x_1 = -x_2$
Linker Körper: $-3D \cdot x_1 = m \cdot \ddot{x}_1$
Rechter Körper: $-3D \cdot x_2 = m \cdot \ddot{x}_2$
Eigenkreisfrequenz $\omega_2 = \sqrt{\frac{3D}{m}} = \sqrt{3} \omega_1$
- 5.2 -