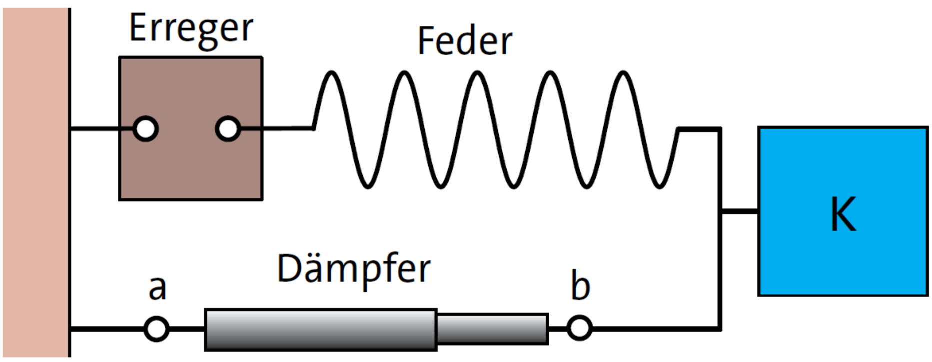
Aufgaben 4 Schwingungen
Erzwungene Schwingung, Resonanz

Lernziele

- verstehen, was eine erzwungene Schwingung ist.
- wissen und verstehen, was die Eigenfrequenz eines Schwingers, ein Erreger und die Erregerfrequenz sind.
- wissen und verstehen, dass bei einer erzwungenen Schwingung die im zeitlichen Mittel vom Erreger zum Schwinger fliessende Energie im Dämpfer dissipiert wird.
- wissen, von welchen Grössen die Energie abhängt, die bei einer erzwungenen Schwingung im Dämpfer im zeitlichen Mittel dissipiert wird.
- wissen, dass eine erzwungene Schwingung einen Einschwingvorgang durchläuft.
- aus einem grafisch dargestellten zeitlichen Verlauf einer Schwingungsgrösse den Einschwingvorgang und die stationäre Phase einer erzwungenen Schwingung erkennen können.
- wissen, dass bei einer sinusförmig angeregten erzwungenen Schwingung die Frequenz in der stationären Phase gleich gross ist wie die Erregerfrequenz.
- das mathematische Modell zur Beschreibung einer erzwungenen mechanischen Schwingung kennen und verstehen.
- das Phänomen Resonanz kennen und verstehen.
- wissen und verstehen, was eine Resonanzkurve ist.
- den qualitativen Verlauf einer Resonanzkurve kennen und verstehen.
- wissen und verstehen, dass bei Resonanz der zeitlich gemittelte Energiestrom vom Erreger zum Schwinger maximal ist.
- wissen und verstehen, von welchen Grössen die Resonanzfrequenz abhängt.
- einen Sachverhalt analysieren und beurteilen können.

Aufgaben

4.1 Betrachten Sie die erzwungene Schwingung eines Federschwingers (Lehrbuch KPK 3, Abb. 2.3, Seite 22):



Die Koordinatensysteme (Ort x des Schwingkörpers, Ort x_E des linken Federendes) sollen wie folgt festgelegt werden:
- Die Schwingung soll in x-Richtung erfolgen.
- Die positiven x- und x_E-Richtungen sollen nach rechts zeigen.
- Die Ruhelage soll bei $x = x_E = 0$ liegen.

Am Schwingkörper greifen zwei Kräfte an, die Federkraft $\vec{F}_F$ (Kraft, die die Feder ausübt) und die Dämpfungskraft $\vec{F}_D$ (Kraft, die der Dämpfer ausübt) (siehe Unterricht).

a) Formulieren Sie für den Schwingkörper die skalare x-Komponente des (aus der Mechanik bekannten) Aktionsprinzips.

b) Die in a) formulierte Gleichung enthält drei Grössen.
Beurteilen Sie, ob und wie diese drei Grössen vom Ort x, von der Geschwindigkeit $v = \dot{x}$ und von der Beschleunigung $a = \dot{v} = \ddot{x}$ des Schwingkörpers sowie vom Ort x_E des linken Federendes abhängen. x, v, a und x_E sind dabei die skalaren x-Komponenten der entsprechenden Vektoren.
Setzen Sie dann die drei Ausdrücke in das Ergebnis von a) ein.

Unter der Annahme, dass der zeitliche Verlauf des Ortes x_E des linken Federendes sinus-förmig ist, d.h.

$$x_E = x_E(t) = \hat{x}_E \sin(\omega_E t)$$

lautet der zeitliche Verlauf des Ortes x des Schwingkörpers bei schwacher und geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung wie folgt (siehe Unterricht):

$$x = x(t) = C_1 e^{-\delta t} \sin(\omega_d t + C_2) + \hat{x} \sin(\omega_E t + \varphi)$$

wobei: $\delta := \frac{k}{2m}$

$$\omega_0 := \sqrt{\frac{D}{m}}$$

$$\omega_d := \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad (\delta < \omega_0, \text{ schwache Dämpfung})$$

Im eingeschwungenen bzw. stationären Zustand, d.h. für $t \to \infty$, gilt:

$$x = x(t) = \hat{x} \sin(\omega_E t + \varphi)$$

Dabei gilt für die Amplitude $\hat{x}$:

$$\hat{x} = \hat{x}(\omega_E) = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + 4\delta^2\omega_E^2}} \hat{x}_E$$

c) Überprüfen Sie, dass im eingeschwungenen Zustand die Ortsamplitude $\hat{x}$ maximal ist für

$$\omega_E = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

Hinweise:
- Es genügt zu zeigen, dass der Ausdruck unter der Wurzel im Nenner minimal ist.
- Der Ausdruck unter der Wurzel ist eine quadratische Funktion in $z := \omega_E^2$.
- Das Maximum bzw. Minimum einer quadratischen Funktion liegt an der Stelle des Scheitelpunktes des Funktionsgrafen.
- Um den Scheitelpunkt zu bestimmen, muss die Funktionsgleichung der quadratischen Funktion in die Scheitelpunktsform umgeformt werden.

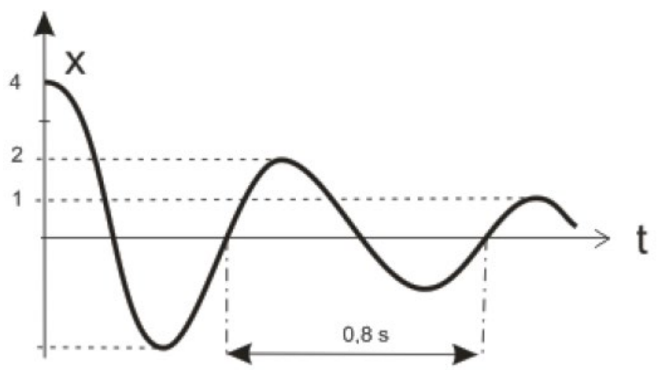
d) Bestimmen Sie für den eingeschwungenen Zustand den zeitlichen Verlauf der Geschwindigkeit $v = v(t) = \dot{x}(t)$ des Schwingkörpers sowie die dazugehörige Geschwindigkeitsamplitude $\hat{v}$.

e) Überprüfen Sie, dass im eingeschwungenen Zustand die Geschwindigkeitsamplitude $\hat{v}$ maximal ist für

$$\omega_E = \omega_0$$

Hinweis:
- Bestimmen Sie mit Hilfe der Differentialrechnung das globale Maximum der Funktion $\hat{v} = \hat{v}(\omega_E)$.

4.2 Erfährt ein schwingungsfähiges Bauteil in einem mechanischen Aufbau einen Schlag, führt es eine gedämpfte Schwingung aus. Der zeitliche Verlauf des Ausschlags x sieht wie folgt aus:



Die in der Grafik angegebenen Grössen sollen auf drei signifikante Stellen genau angenommen werden, also 0.8 = 0.800, 1 = 1.00, 2 = 2.00, 4 = 4.00.

(Fortsetzung siehe nächste Seite)

a) Bestimmen Sie ...

i) ... die Kreisfrequenz ω_d der gedämpften Schwingung.

ii) ... die Dämpfungskontante δ.

Hinweise:
- Der Wert des Exponentialfaktors $e^{-\delta t}$ im Ausdruck x(t) = … (siehe Unterricht) nimmt alle 0.8 s auf die Hälfte ab. Die Begründung dieser Aussage folgt aus den folgenden beiden weiteren Hinweisen:
- Die Periode T_d der gedämpften Schwingung beträgt 0.8 s (siehe Graf). Aber auch die Hochpunkte des Grafen, d.h. die Zeitpunkte, zu welchen der Ausdruck x(t) = … jeweils ein lokales Maximum annimmt, liegen 0.8 s auseinander (ohne Beweis).
- Zu diesen Zeitpunkten nimmt der Sinusfaktor $\sin(\omega_d t + \varphi)$ im Ausdruck x(t) = … jeweils den gleichen Wert (< 1) an (ohne Beweis).

Wird das Bauteil von aussen mit der Frequenz ω_E angeregt, ergibt sich eine erzwungene Schwingung.

b) Bestimmen Sie die Frequenz ω_E, bei welcher ...

i) ... die Geschwindigkeitsamplitude $\hat{v}$ der erzwungenen Schwingung maximal ist.

ii) ... die Ortsamplitude $\hat{x}$ der erzwungenen Schwingung maximal ist.

Hinweis:
- Verwenden Sie die Ergebnisse aus a).

4.3 Führen Sie in Moodle den Test 4.1 durch.

Lehrbuch KPK 3 (Karlsruher Physikkurs, Band 3)

2 Resonanz

2.1 Was ist Resonanz? (Seite 21)
2.2 Resonanz eines mechanischen Schwingers (Seiten 21 und 22)

Lösungen

4.1 a) $F_F + F_D = \dot{p}$

b) $F_F = -D\cdot(x - x_E)$
$F_D = -k\cdot v = -k\cdot\dot{x}$
$\dot{p} = m\cdot\dot{v} = m\cdot\ddot{x}$

$\Rightarrow\; -D\cdot(x - x_E) - k\cdot\dot{x} = m\cdot\ddot{x}$

c) …

d) $v = v(t) = \dot{x}(t) = \hat{x}\,\omega_E \cos(\omega_E t + \varphi)$

$$\hat{v} = \hat{v}(\omega_E) = \hat{x}\,\omega_E = \frac{\omega_0^2\omega_E}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_E^2\right)^2 + 4\delta^2\omega_E^2}}\hat{x}_E$$

e) …

4.2 a) i) $\omega_d = \frac{2\pi}{T_d} = \frac{2\pi}{0.800\text{ s}} = 7.85\text{ s}^{-1}$

ii) t_0 := Zeitpunkt irgendeines lokalen Maximums von x(t)

$$\frac{x(t_0+T_d)}{x(t_0)} = 0.500$$
$$\frac{x(t_0+T_d)}{x(t_0)} = \frac{\hat{x}\,e^{-\delta(t_0+T_d)}\sin(\omega_d(t_0+T_d)+\varphi)}{\hat{x}\,e^{-\delta t_0}\sin(\omega_d t_0+\varphi)} = e^{-\delta T_d}$$

$$\Longrightarrow\quad \delta = -\frac{\ln(0.500)}{T_d} = -\frac{\ln(0.500)}{0.800\text{ s}} = 0.866\text{ s}^{-1}$$

b) i) $\omega_E = \omega_0$
$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

$$\Longrightarrow\quad \omega_E = \sqrt{\omega_d^2 + \delta^2} = \text{... (ungerundete Zahlenwerte aus a))} = 7.90\text{ s}^{-1}$$

ii) $\omega_E = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$
$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

$$\Longrightarrow\quad \omega_E = \sqrt{\omega_d^2 - \delta^2} = \text{... (ungerundete Zahlenwerte aus a))} = 7.81\text{ s}^{-1}$$

4.3 -