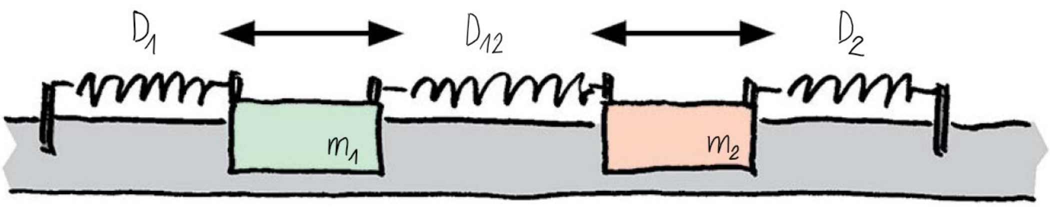
Aufgaben 5 Schwingungen
Mehrfachschwinger, Eigenschwingungen

Lernziele

- wissen und verstehen, was ein Doppelschwinger, ein Mehrfachschwinger ist.
- wissen und verstehen, was eine Eigenschwingung, eine Eigenfrequenz eines Doppelschwingers, eines Mehrfachschwingers ist.
- das Spektrum eines Doppelschwingers, eines Mehrfachschwingers kennen und verstehen.
- wissen, dass ein N-fachschwinger N verschiedene Eigenfrequenzen hat und N verschiedene Eigenschwingungen ausführen kann.
- ein mathematisches Modell zur Beschreibung der Schwingung eines Mehrfachschwingers aufstellen können.
- die Eigenschwingungen eines Mehrfachschwingers beschreiben und charakterisieren können.
- wissen, was die Grundschwingung und die Oberschwingungen eines schwingungsfähigen Systems sind.
- die bei der Bewegung eines Mehrfachschwingers auftretenden Impuls- und Energieflüsse kennen und verstehen.
- einen neuen Sachverhalt analysieren und beurteilen können.

Aufgaben

5.1 Betrachten Sie den folgenden ungedämpften Doppelschwinger (Lehrbuch KPK 3, Abb. 3.6, Seite 29):



Die Länge der Federn sowie die Distanz zwischen den beiden äusseren Federbefestigungen seien so gewählt, dass alle drei Federn entspannt sind, wenn sich die beiden Schwingkörper in ihren Ruhelagen befinden.

a) Nehmen Sie an, dass die beiden Schwingkörper so aus ihren Ruhelagen ausgelenkt sind, dass die linke und die mittlere Feder zusammengedrückt und die rechte Feder gestreckt ist.

i) Kopieren Sie die Abbildung des Doppelschwingers.
Zeichnen Sie die horizontalen **Impulsströme** ein, welche die beiden Schwingkörper betreffen.
Nehmen Sie dabei an, dass die positive horizontale Richtung nach rechts zeigt.

ii) Kopieren Sie die Abbildung des Doppelschwingers noch einmal.
Zeichnen Sie die horizontalen **Kräfte** ein, welche die Federn auf die beiden Schwingkörper ausüben.

Für die beiden Schwingkörper soll nun je eine eigene horizontale x-Koordinatenachse eingeführt werden. Wenn x_1 die x-Koordinate des linken Schwingkörpers und x_2 diejenige des rechten ist, dann soll $x_1 = x_2 = 0$ gelten, wenn sich die beiden Schwingkörper in ihren Ruhelagen befinden.

Betrachten Sie zunächst den allgemeinen Fall verschiedener Massen (m_1, m_2) der beiden Schwingkörper sowie verschiedener Federkonstanten (D_1, D_{12}, D_2) der drei Federn.

b) Formulieren Sie für die beiden Schwingkörper je die skalare x-Komponente des (aus der Mechanik bekannten) Aktionsprinzips.

c) Beurteilen Sie, ob und wie die Grössen in den in b) formulierten Gleichungen von den Orten x_1 und x_2, den Geschwindigkeiten $v_1 = \dot{x}_1$ und $v_2 = \dot{x}_2$ und den Beschleunigungen $a_1 = \dot{v}_1 = \ddot{x}_1$ und $a_2 = \dot{v}_2 = \ddot{x}_2$ der beiden Schwingkörper abhängen. Die genannten Grössen sind dabei jeweils die skalaren x-Komponenten der entsprechenden Vektoren.
Setzen Sie dann die Ausdrücke in das Ergebnis von b) ein.

Hinweis:
- Die beiden Gleichungen bilden ein System zweier gekoppelter Differentialgleichungen für die Funktionen x_1 und x_2. Die Differentialgleichungen heissen gekoppelt, da in beiden Gleichungen sowohl x_1 als auch x_2 vorkommt.

Betrachten Sie im Folgenden den Spezialfall, dass beide Massen sowie alle drei Federkonstanten gleich sind, d.h. $m_1 = m_2 =: m$ sowie $D_1 = D_{12} = D_2 =: D$.

Die beiden Eigenschwingungen des Systems können aus Symmetriegründen wie folgt charakterisiert werden:

Eigenschwingung 1: Die beiden Schwingkörper schwingen „gleichsinnig" mit gleicher Frequenz und gleicher Amplitude, d.h. zu jedem Zeitpunkt gilt $x_1 = x_2$

Eigenschwingung 2: Die beiden Schwingkörper schwingen „gegensinnig" mit gleicher Frequenz und gleicher Amplitude, d.h. zu jedem Zeitpunkt gilt $x_1 = - x_2$

d) Schreiben Sie die beiden in c) gefundenen Differentialgleichungen für den Spezialfall gleicher Massen und gleicher Federkonstanten um.

e) Bestimmen Sie die Eigenkreisfrequenzen ω_1 und ω_2 der beiden Eigenschwingungen.
Drücken Sie ω_1 und ω_2 durch m und D aus.

Hinweise:
- Setzen Sie $x_1 = x_2$ (Eigenschwingung 1) bzw. $x_1 = - x_2$ (Eigenschwingung 2) in die in d) gefundenen Differentialgleichungen ein.
- Vergleichen Sie die so erhaltenen Differentialgleichungen mit der Differentialgleichung für einen einzelnen Federschwinger (siehe Aufgabe 2.1).

5.2 Führen Sie in Moodle den Test 5.1 durch.

Lehrbuch KPK 3 (Karlsruher Physikkurs, Band 3)

3 Spektren

3.2 Spektren (Seiten 28 und 29)
3.3 Doppelschwinger (Seiten 29 bis 31)
3.4 Mehrfachschwinger (Seiten 31 und 32)

Lösungen

5.1 a) i) …

ii) …

b) Linker Körper: $F_{11} + F_{12} = \dot{p}_1$
Rechter Körper: $F_{21} + F_{22} = \dot{p}_2$

c) Linker Körper: $F_{11} = - D_1 \cdot x_1$
$F_{12} = D_{12}(x_2 - x_1)$
$\dot{p}_1 = m_1 \cdot \ddot{x}_1$

$\Rightarrow\ - D_1 \cdot x_1 + D_{12}(x_2 - x_1) = m_1 \cdot \ddot{x}_1$

Rechter Körper: $F_{21} = - D_{12}(x_2 - x_1)$
$F_{22} = - D_2 \cdot x_2$
$\dot{p}_2 = m_2 \cdot \ddot{x}_2$

$\Rightarrow\ - D_{12}(x_2 - x_1) - D_2 \cdot x_2 = m_2 \cdot \ddot{x}_2$

d) Linker Körper: $D(- 2x_1 + x_2) = m \cdot \ddot{x}_1$
Rechter Körper: $D(x_1 - 2x_2) = m \cdot \ddot{x}_2$

e) Eigenschwingung 1: $x_1 = x_2$

Linker Körper: $- D \cdot x_1 = m \cdot \ddot{x}_1$
Rechter Körper: $- D \cdot x_2 = m \cdot \ddot{x}_2$

Eigenkreisfrequenz $\omega_1 = \sqrt{\frac{D}{m}}$

Eigenschwingung 2: $x_1 = - x_2$

Linker Körper: $- 3D \cdot x_1 = m \cdot \ddot{x}_1$
Rechter Körper: $- 3D \cdot x_2 = m \cdot \ddot{x}_2$

Eigenkreisfrequenz $\omega_2 = \sqrt{\frac{3D}{m}} = \sqrt{3}\ \omega_1$

5.2 -