Aufgaben 4 Wellen
Wellenträger, Wellengrössen, Sinuswellen, Energie

Lernziele

- verschiedene Typen von Wellen kennen.
- wissen und verstehen, wie eine Welle entsteht.
- wissen und verstehen, was der Träger einer Welle ist.
- die Bewegungen von Welle und Wellenträger unterscheiden können.
- wissen und verstehen, was eine Quer-/Transversalwelle und eine Längs-/Longitudinalwelle ist.
- wissen, wovon die Geschwindigkeit einer Welle abhängt.
- wissen und verstehen, dass der Wellenträger ein-, zwei oder dreidimensional sein kann.
- wissen und verstehen, was eine Wellenfront ist.
- wissen und verstehen, was eine lineare Welle, gerade Welle, Kreiswelle, ebene Welle und Kugelwelle ist.
- die Zusammenhänge zwischen Periodendauer, Frequenz, Kreisfrequenz, Wellenlänge, Wellenzahl und Ausbreitungsgeschwindigkeit kennen und anwenden können.
- wissen und verstehen, was eine Sinuswelle und eine harmonische Welle ist.
- die mathematische Beschreibung einer eindimensionalen Sinuswelle kennen, verstehen und anwenden können.
- wissen und verstehen, wie die Energiestromdichte und die Intensität definiert sind.
- den Zusammenhang zwischen der Intensität und der Amplitude einer Schwingungsgrösse kennen und anwenden können.
- für eine von einem punktförmigen Sender abgestrahlte Welle den Zusammenhang zwischen der Intensität und dem Abstand vom Sender kennen und verstehen.
- Aussagen und Beziehungen zwischen Grössen mit Hilfe physikalischer Grundgesetze als Gleichungen formulieren können.
- sich aus dem Studium eines schriftlichen Dokumentes neue Kenntnisse und Fähigkeiten erarbeiten können.
- einen neuen Sachverhalt analysieren und beurteilen können.

Aufgaben

4.1 Vorgängiges Selbststudium

a) Studieren Sie im Lehrbuch KPK 3 die folgenden Abschnitte:
- Einleitung zum Kapitel "4. Wellen" (Seite 25)
- 4.1 Der Träger der Wellen (Seite 26)
- 4.2 Die Geschwindigkeit von Wellen (Seite 27)
- 4.3 Ein-, zwei- und dreidimensionale Wellenträger (Seite 28)
- 4.4 Sinuswellen (Seite 29, nur bis 14 Zeilen nach der Formel 4.1, d.h. bis „…vom Ort x und von der Zeit t“, und dann wieder ab 7 Zeilen vor der Abb. 4.10, d.h. ab „Gleichung 4.1 beschreibt zunächst …“, ohne Aufgaben)
- 4.5 Der Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit, Frequenz und Wellenlänge (Seite 30)

Hinweis zum Abschnitt 4.4:
- Wir werden die Formel 4.1 im Unterricht herleiten.

b) Man unterscheidet bei Wellen zwischen Querwellen/Transversalwellen und Längswellen/Longitudinalwellen. Studieren Sie dazu ...

i) ... die folgenden **YouTube-Videos**:
- Wellenmaschine zur Demonstration von Querwellen (Transversalwelle) (0:27)
- Wellenmodell mit Magneten (Longitudinalwelle) (0:15)
- Transversalwellen - Wellenmaschine (0:06)

ii) ... das folgende **Applet**:
- Animation: Ausbreitung von Quer- und Längswellen (Transversal- und Longitudinalw.)

c) Führen Sie in Moodle den Test 4.1 durch.

4.2 Es sind T die Periodendauer, f die Frequenz, ω die Kreisfrequenz, λ die Wellenlänge, k die Wellenzahl und v die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer periodischen Welle. Bestimmen Sie jeweils die fehlenden Grössen:

	T	f	ω	λ	k	v
a)	$2.00\,\mathrm{s}$			$5.00\,\mathrm{m}$		
b)		$10.0\,\mathrm{Hz}$			$0.250\,\mathrm{m}^{-1}$	
c)			$10.0\,\mathrm{s}^{-1}$			$20.0\,\mathrm{ms}^{-1}$
d)		$440\,\mathrm{Hz}$		$77.3\,\mathrm{cm}$		
e)				$6'000\,\mathrm{km}$		$3.00\cdot 10^8\,\mathrm{ms}^{-1}$
f)		$2.4\,\mathrm{GHz}$				$3.00\cdot 10^8\,\mathrm{ms}^{-1}$

Hinweise:
- Die Kreisfrequenz ω ist wie folgt definiert: $\omega := 2\pi f$
- Die Wellenzahl k ist wie folgt definiert: $k := \frac{2\pi}{\lambda}$

4.3 Eine Sinuswelle läuft entlang eines Seils. Für einen bestimmten Punkt des Seils dauert es 0.170 s, bis er von seiner maximalen Auslenkung zu seiner Mittellage zurückgekehrt ist.

Bestimmen Sie die Periodendauer und die Frequenz der Welle.

4.4 Eine in x-Richtung fortschreitende, lineare Welle kann mathematisch durch die Funktion y beschrieben werden:

$$y:\quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & y = y(x,t) \end{array}$$

y ist eine Funktion mit zwei Variablen. Sie ordnet den beiden reellen Grössen x (Ort) und t (Zeit) die reelle Grösse y (Auslenkung) zu. Die Funktion drückt aus, wie gross die Auslenkung y des Wellenträgers an einem bestimmten Ort x und zu einem bestimmten Zeitpunkt t ist.

Erfolgt die Anregung der Welle sinusförmig bzw. harmonisch, ergibt sich eine Sinuswelle bzw. harmonische Welle mit der folgenden Funktionsgleichung (vgl. Unterricht):

$$y(x,t) = \hat{y}\sin(kx - \omega t) \qquad \text{wobei:} \quad \begin{array}{ll} \hat{y} & \text{Amplitude} \\ \omega := \frac{2\pi}{T} = 2\pi f & \text{Kreisfrequenz} \\ k := \frac{2\pi}{\lambda} & \text{Wellenzahl} \end{array}$$

Gegeben sind die Amplitude $\hat{y}$, die Frequenz f und die Ausbreitungsgeschwindigkeit v:

$\hat{y} = 3.0\text{ cm} \qquad f = 2.5\text{ Hz} \qquad v = 50\text{ cm/s}$

a) Bestimmen Sie die Periode T und die Wellenlänge λ.

b) Bestimmen Sie die Auslenkung y am Ort x = 42 cm zum Zeitpunkt t = 1.8 s.

c) Bestimmen Sie alle Orte x, an welchen sich zum Zeitpunkt t ein Wellenberg befindet.

i) t = 0.0 s

ii) t = 1.0 s

4.5 In einem als punktförmig betrachteten Sender wird eine harmonische Welle angeregt und ausgesendet. Der Sender sendet also eine in alle Richtungen gleichverteilte Kugelwelle aus. Die Wellenfronten sind Kugeloberflächen.

a) Beurteilen Sie mit schlüssiger Begründung, ob und wie die Amplitude $\hat{y}$ und die Intensität I der Welle vom Abstand r vom Sender abhängt.

Hinweise (siehe nächste Seite)

Hinweise:
- Überlegen Sie sich, wie sich die mit der Welle ausbreitende Energie auf dem Wellenträger räumlich verteilt.
- Überlegen Sie sich, ob und wie der Flächeninhalt einer Wellenfront vom Abstand vom Sender abhängt.
- Nehmen Sie an, dass die Welle auf ihrem Weg auf dem Wellenträger keine Energie verliert, d.h. dass keine Energie absorbiert wird.

b) Bestimmen Sie, um welchen Faktor die Entfernung zum Lautsprecher vergrössert werden müsste, um die Intensität …

i) … auf die Hälfte zu reduzieren.

ii) … auf einen Drittel zu reduzieren.

iii) … auf einen Viertel zu reduzieren.

c) Die über die Zeit gemittelte Schalleistung sei 100 W. Bestimmen Sie ...

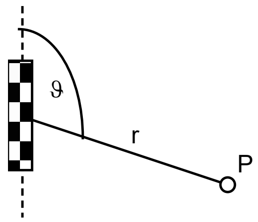
i) ... die in 60 s abgestrahlte Energie.

ii) ... die Intensität der Schallwelle 4.50 m vom Lautsprecher entfernt.

Hinweise:
- Die Schalleistung gibt an, wieviel Energie der Lautsprecher mit der Schallwelle pro Zeiteinheit abstrahlt.
- Die mittlere Schalleistung $\overline{P}$ ist gleich gross wie die mittlere Energiestromstärke $\overline{I}_W$ durch eine den Lautsprecher umgebende Kugeloberfläche

4.6 Eine Mobilfunktantenne strahlt eine elektromagnetische Welle ab.

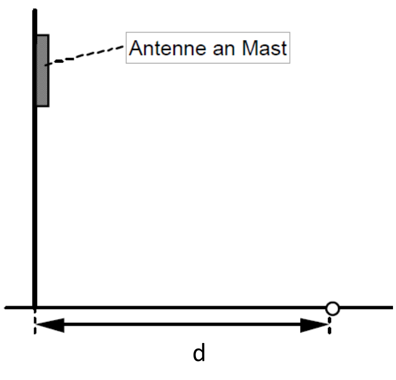
Die Intensität I der abgestrahlten elektromagnetischen Welle an einem bestimmten Ort P hängt von der Sendeleistung ab. Sie hängt aber auch vom Abstand r zur Antenne, vom Winkel ϑ zur Antennenachse sowie von der Frequenz der elektromagnetischen Welle ab.



Falls der Abstand r viel grösser ist als die Wellenlänge der elektromagnetischen Welle, gilt bei konstanter Frequenz und konstanter Sendeleistung (ohne Herleitung):

$$I \sim \frac{\sin^2(\vartheta)}{r^2}$$

Eine Mobilfunkantenne sei mit vertikaler Ausrichtung der Antennenachse an einem Mast in horizontalem Gelände montiert:



(Fortsetzung siehe nächste Seite)

Bestimmen Sie die Entfernung d vom Fusse der Antenne, in welcher die Intensität (bei konstanter Frequenz und konstanter Sendeleistung) maximal ist.

Hinweise:
- Überlegen Sie sich, wie die Grössen ϑ und r von d abhängen, damit Sie die Intensität I als Funktion der alleinigen Variablen d ausdrücken können, d.h. $I = I(d)$.
- Bestimmen Sie das globale Maximum der Funktion $I = I(d)$.

Lösungen

4.1 -

4.2 Benötigte Zusammenhänge:

$f = \frac{1}{T}$, $\omega = 2\pi f$, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, $v = \lambda f$

a) $f = 0.500$ Hz, $\omega = 3.14\ s^{-1}$, $k = 1.26\ m^{-1}$, $v = 2.50$ m/s

b) $T = 0.100$ s, $\omega = 62.8\ s^{-1}$, $\lambda = 25.1$ m, $v = 251$ m/s

c) $T = 0.628$ s, $f = 1.59$ Hz, $\lambda = 12.6$ m, $k = 0.500\ m^{-1}$

d) $T = 2.27 \cdot 10^{-3}$ s, $\omega = 2.76 \cdot 10^{3}\ s^{-1}$, $k = 8.13\ m^{-1}$, $v = 340$ m/s

e) $T = 2.00 \cdot 10^{-2}$ s, $f = 50.0$ Hz, $\omega = 314\ s^{-1}$, $k = 1.05 \cdot 10^{-6}\ m^{-1}$

f) $T = 4.17 \cdot 10^{-10}$ s, $\omega = 1.51 \cdot 10^{10}\ s^{-1}$, $\lambda = 0.125$ m, $k = 50.3\ m^{-1}$

4.3 $T = 4 \cdot 0.170$ s $= 0.680$ s, $f = 1.47$ Hz

4.4 a) $T = 0.40$ s $\quad \lambda = 0.20$ m

b) $y(0.42\text{ m}, 1.8\text{ s}) = -0.018\text{ m} = -1.8\text{ cm}$

c) $kx - \omega t = \frac{\pi}{2} + m \cdot 2\pi \quad (m \in \mathbb{Z})$

i) $x = \frac{1}{4}\lambda + m \cdot \lambda \; (m \in \mathbb{Z}) = \ldots, -0.15\text{ m}, 0.05\text{ m}, 0.25\text{ m}, \ldots$

Hinweise:
- Bei einem Wellenberg nimmt die Sinus-Funktion ihren maximalen Wert an.
- Überlegen Sie sich, bei welchen Argumenten die Sinus-Funktion ihren maximalen Wert annimmt.

ii) Da die Frequenz 2.5 Hz bzw. die Periode 0.40 s beträgt, schreitet die Welle in 1 Sekunde 2.5 Wellenlängen fort, d.h. die Wellenberge sind gegenüber i) um 2.5 Wellenlängen verschoben.
$x = \left(\frac{1}{4} + 2.5\right)\lambda + m \cdot \lambda \; (m \in \mathbb{Z}) = \ldots, -0.05\text{ m}, 0.15\text{ m}, 0.35\text{ m}, \ldots$

4.5 a) $A(r)$:= Flächeninhalt einer Wellenfront im Abstand r vom Sender, $[A(r)] = m^2$

Die Wellenfronten sind Kugeloberflächen, deren Flächeninhalte A mit zunehmendem Abstand r vom Sender zunehmen.

$A(r) = 4\pi r^2$
$\Rightarrow A(r) \sim r^2$

I_W := Energiestromstärke durch eine Kugeloberfläche im Abstand r vom Sender, $[I_W] = W$
$\bar{I}_W$:= zeitlicher Mittelwert von I_W
$I(r)$:= Intensität der Welle im Abstand r vom Sender, $[I(r)] = W/m^2$

$\bar{I}_W = I(r) \cdot A(r)$
$\bar{I}_W$ ist unabhängig von r, da keine Energie absorbiert wird.

$\Rightarrow I(r) \sim \frac{1}{r^2}$

$I(r) \sim (\hat{y}(r))^2$

$\Rightarrow \hat{y}(r) \sim \frac{1}{r}$

b) (siehe nächste Seite)

b) $\bar{I}_W = I \cdot A$ (siehe a))
$A \sim r^2$

$\Rightarrow\ r^2 \sim A = \frac{\bar{I}_W}{I} \sim \frac{1}{I}$
$\Rightarrow\ r \sim \frac{1}{\sqrt{I}}$

i) Halbierung von I
$\Rightarrow$ Verkleinerung von $\sqrt{I}$ um den Faktor $\sqrt{2}$
$\Rightarrow$ Vergrösserung von r um den Faktor $\sqrt{2}$

ii) Drittelung von I
$\Rightarrow$ Verkleinerung von $\sqrt{I}$ um den Faktor $\sqrt{3}$
$\Rightarrow$ Vergrösserung von r um den Faktor $\sqrt{3}$

iii) Viertelung von I
$\Rightarrow$ Verkleinerung von $\sqrt{I}$ um den Faktor $\sqrt{4} = 2$
$\Rightarrow$ Vergrösserung von r um den Faktor 2, d.h. Verdoppelung von r

c) i) Abgestrahlte Energie $W = \bar{I}_W \cdot \Delta t = \bar{P} \cdot \Delta t = 100\ \text{W} \cdot 60\ \text{s} = 6.0\ \text{kJ}$

ii) Intensität $I = \frac{\bar{I}_W}{A} = \frac{\bar{P}}{A} = \frac{\bar{P}}{4\pi r^2} = \frac{100\ \text{W}}{4\pi(4.50\ \text{m})^2} = 0.39\ \text{W/m}^2$

4.6 $I(d) = k \cdot \frac{d^2}{\left(d^2 + h^2\right)^2}$ (h = Höhe der Antenne über dem Boden, k konst.)

I = I(d) maximal (globales Maximum) für d = h

Hinweis:
- Betrachten Sie das folgende rechtwinklige Dreieck:
  Antenne – Fusspunkt des Antennenmastes – Punkt am Boden im Abstand d.