Aufgaben 3 Schwingungen
Erzwungene Schwingung, Resonanz

Lernziele

- verstehen, was eine erzwungene Schwingung ist.
- wissen und verstehen, was die Eigenfrequenz eines Schwingers, ein Erreger und die Erregerfrequenz sind.
- wissen und verstehen, dass bei einer erzwungenen Schwingung die im zeitlichen Mittel vom Erreger zum Schwinger fliessende Energie im Dämpfer dissipiert wird.
- wissen, von welchen Grössen die Energie abhängt, die bei einer erzwungenen Schwingung im Dämpfer im zeitlichen Mittel dissipiert wird.
- wissen, dass eine erzwungene Schwingung einen Einschwingvorgang durchläuft.
- aus einem grafisch dargestellten zeitlichen Verlauf einer Schwingungsgrösse den Einschwingvorgang und die stationäre Phase einer erzwungenen Schwingung erkennen können.
- wissen, dass bei einer sinusförmig angeregten erzwungenen Schwingung die Frequenz in der stationären Phase gleich gross ist wie die Erregerfrequenz.
- das mathematische Modell zur Beschreibung einer erzwungenen mechanischen Schwingung kennen und verstehen.
- das Phänomen Resonanz kennen und verstehen.
- wissen und verstehen, was eine Resonanzkurve ist.
- den qualitativen Verlauf einer Resonanzkurve kennen und verstehen.
- wissen und verstehen, dass bei Resonanz der zeitlich gemittelte Energiestrom vom Erreger zum Schwinger maximal ist.
- wissen und verstehen, von welchen Grössen die Resonanzfrequenz abhängt.
- sich aus dem Studium eines schriftlichen Dokumentes neue Kenntnisse und Fähigkeiten erarbeiten können.
- einen neuen Sachverhalt analysieren und beurteilen können.

Aufgaben

3.1 Vorgängiges Selbststudium

a) Studieren Sie im Buch KPK 3 die folgenden Abschnitte:
- 2.1 Was ist Resonanz? (Seite 14)
- 2.2 Resonanz eines mechanischen Schwingers (Seite 15)

b) Studieren Sie das folgende **YouTube-Video**:
- Federpendel (4:06)

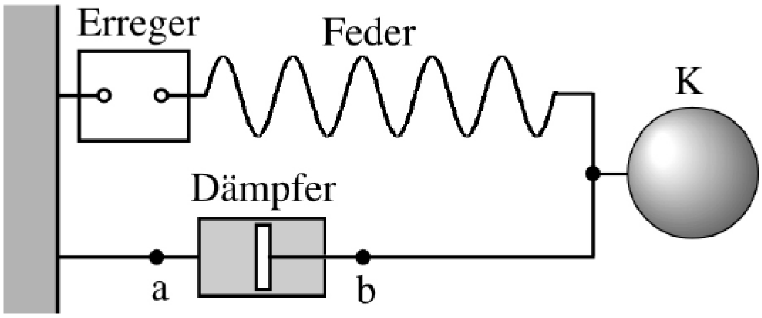
c) Studieren Sie das folgende **Applet**:
- Erzwungene Schwingungen (Resonanz)

Hinweise:
- Wählen Sie die Einstellung „Diagramm Elongation“.
- Beobachten Sie den sogenannten Einschwingvorgang.
- Beobachten Sie, dass der Schwingkörper im eingeschwungenen Zustand mit der Erregerfrequenz schwingt.
- Beobachten Sie, dass die Ortsamplitude der Schwingung im eingeschwungenen Zustand von der Erregerfrequenz abhängt.

d) Führen Sie in Moodle den Test 3.1 durch.

3.2 (siehe nächste Seite)

3.2 Betrachten Sie die erzwungene Schwingung eines Federschwingers (Lehrbuch KPK 3, Abb. 2.3, Seite 15):



Das Koordinatensystem soll wie folgt festgelegt werden:
- Die Schwingung soll in x-Richtung erfolgen.
- Die positive x-Richtung soll nach rechts zeigen.
- Die Ruhelage soll bei x = 0 liegen.

Am Schwingkörper greifen zwei Kräfte an, die Federkraft $\vec{F}_F$ (Kraft, die die Feder ausübt) und die Dämpfungskraft $\vec{F}_D$ (Kraft, die der Dämpfer ausübt) (siehe Unterricht).

a) Formulieren Sie für den Schwingkörper die skalare x-Komponente des (aus der Mechanik bekannten) Aktionsprinzips.

Die drei Grössen in der in a) formulierten Gleichung hängen vom Ort x, der Geschwindigkeit v, der Beschleunigung a des Schwingkörpers sowie vom Ort x_E des Erregers ab. x, v, a und x_E sind dabei jeweils die skalaren x-Komponenten der entsprechenden Vektoren.

b) Geben Sie an, wie die drei Grössen von x, v, a und x_E abhängen, und setzen Sie die Ausdrücke in das Ergebnis von a) ein.

Unter der Annahme, dass der zeitliche Verlauf des Ortes x_E des Erregers bzw. des linken Federendes sinusförmig ist, d.h.

$$x_E = x_E(t) = \hat{x}_E \sin(\omega_E t)$$

lautet der zeitliche Verlauf des Ortes x des Schwingkörpers bei schwacher und geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung wie folgt (siehe Unterricht):

$$x = x(t) = C_1 e^{-\delta t} \sin(\omega_d t + C_2) + \hat{x} \sin(\omega_E t + \varphi)$$

wobei: $\delta := \frac{k}{2m}$

$\omega_0 := \sqrt{\frac{D}{m}}$

$\omega_d := \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ ($\delta < \omega_0$, schwache Dämpfung)

Im eingeschwungenen bzw. stationären Zustand, d.h. für $t \to \infty$, gilt:

$$x = x(t) = \hat{x} \sin(\omega_E t + \varphi)$$

Dabei gilt für die Amplitude $\hat{x}$:

$$\hat{x} = \hat{x}(\omega_E) = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + 4\delta^2\omega_E^2}} \hat{x}_E$$

c) Überprüfen Sie, dass im eingeschwungenen Zustand die Ortsamplitude $\hat{x}$ maximal ist für

$$\omega_E = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

Hinweise (siehe nächste Seite)

Hinweise:
- Es genügt zu zeigen, dass der Ausdruck unter der Wurzel im Nenner minimal ist.
- Der Ausdruck unter der Wurzel ist eine quadratische Funktion in $z := \omega_E^2$.
- Das Maximum bzw. Minimum einer quadratischen Funktion liegt an der Stelle des Scheitelpunktes des Funktionsgrafen.
- Um den Scheitelpunkt zu bestimmen, muss die Funktionsgleichung der quadratischen Funktion in die Scheitelpunktsform umgeformt werden.

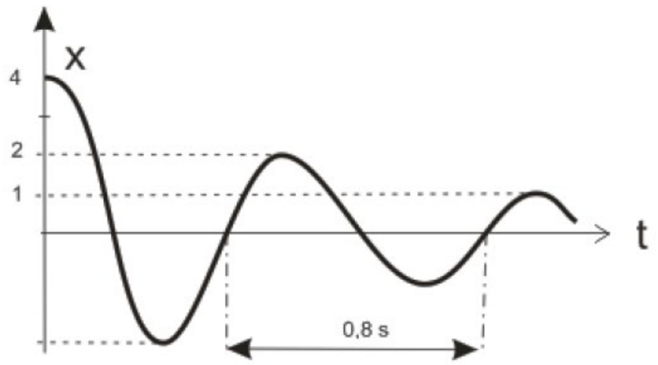
d) Bestimmen Sie für den eingeschwungenen Zustand den zeitlichen Verlauf der Geschwindigkeit $v = v(t)$ des Schwingkörpers sowie die dazugehörige Geschwindigkeitsamplitude $\hat{v}$.

e) Überprüfen Sie, dass im eingeschwungenen Zustand die Geschwindigkeitsamplitude $\hat{v}$ maximal ist für

$$\omega_E = \omega_0$$

Hinweis:
- Bestimmen Sie mit Hilfe der Differentialrechnung das globale Maximum der Funktion $\hat{v} = \hat{v}(\omega_E)$.

3.3 Erfährt ein schwingungsfähiges Bauteil in einem mechanischen Aufbau einen Schlag, führt es eine gedämpfte Schwingung aus. Der zeitliche Verlauf des Ausschlags x sieht wie folgt aus:



Die in der Grafik angegebenen Grössen sollen auf zwei signifikante Stellen genau angenommen werden, also 0.8 = 0.80, 1 = 1.0, 2 = 2.0, 4 = 4.0.

a) Bestimmen Sie ...

i) ... die Kreisfrequenz ω_d der gedämpften Schwingung.

ii) ... die Dämpfungskontante δ.

Hinweise:
- Die Hochpunkte des Grafen, d.h. die Zeitpunkte, zu welchen der Ausdruck x(t) = … (siehe Unterricht) jeweils ein lokales Maximum annimmt, liegen 0.8 s auseinander (ohne Beweis).
- Zu diesen Zeitpunkten nimmt der Sinusterm $\sin(\omega_d t + \varphi)$ im Ausdruck x(t) = … jeweils den gleichen Wert (< 1) an.

Wird das Bauteil von aussen mit der Frequenz ω_E angeregt, ergibt sich eine erzwungene Schwingung.

b) Bestimmen Sie die Frequenz ω_E, bei welcher ...

i) ... die Geschwindigkeitsamplitude $\hat{v}$ der erzwungenen Schwingung maximal ist.

ii) ... die Ortsamplitude $\hat{x}$ der erzwungenen Schwingung maximal ist.

Lösungen

3.1 -

3.2 a) $F_F + F_D = \dot{p}$

b) $F_F = - D\cdot(x - x_E)$ $F_D = - k\cdot v$ $\dot{p} = m\cdot a$

$\Rightarrow - D\cdot(x - x_E) - k\cdot v = m\cdot a$

c) …

d) $v = v(t) = \dot{x}(t) = \hat{x}\ \omega_E \cos(\omega_E t + \varphi)$

$$\hat{v} = \hat{v}(\omega_E) = \hat{x}\ \omega_E = \frac{\omega_0^2 \omega_E}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_E^2\right)^2 + 4\delta^2\omega_E^2}}\hat{x}_E$$

e) …

3.3 a) i) $\omega_d = \frac{2\pi}{T_d} = \frac{2\pi}{0.80\ s} = 7.9\ s^{-1}$

ii) t_0 := Zeitpunkt irgend eines lokalen Maximums von x(t)

$$\frac{x(t_0+T_d)}{x(t_0)} = 0.50$$

$$\frac{x(t_0+T_d)}{x(t_0)} = \frac{\hat{x}\ e^{-\delta(t_0+T_d)}\ \sin(\omega_d(t_0+T_d) + \varphi)}{\hat{x}\ e^{-\delta t_0}\ \sin(\omega_d t_0 + \varphi)} = e^{-\delta T_d}$$

$$\Rightarrow \quad \delta = -\frac{\ln(0.50)}{T_d} = -\frac{\ln(0.50)}{0.80\ s} = 0.87\ s^{-1}$$

b) i) $\omega_E = \omega_0$

$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

$\Rightarrow \quad \omega_E = \sqrt{\omega_d^2 + \delta^2}$ = ... (Zahlenwerte aus a)) = 7.9 s^{-1}

ii) $\omega_E = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$

$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

$\Rightarrow \quad \omega_E = \sqrt{\omega_d^2 - \delta^2}$ = ... (Zahlenwerte aus a)) = 7.8 s^{-1}