Aufgaben 2 Schwingungen
Gedämpfte Schwingung

Lernziele

- die Analogie zwischen einer Drehschwingung und einer linearen Schwingung kennen und verstehen.
- verstehen, wie eine Schwingung gedämpft werden kann.
- verstehen, wie ein mechanischer Dämpfer funktioniert.
- verstehen, dass alle natürlich ablaufenden Schwingungen gedämpft sind.
- wissen, wie die Stärke der Dämpfung die Bewegung eines Schwingers beeinflusst.
- die bei einer mechanischen, gedämpften Schwingung auftretenden Impuls- und Energieflüsse verstehen.
- Aussagen und Beziehungen zwischen Grössen mit Hilfe physikalischer Grundgesetze als Gleichungen formulieren können.
- sich aus dem Studium eines schriftlichen Dokumentes neue Kenntnisse und Fähigkeiten erarbeiten können.
- einen neuen Sachverhalt analysieren und beurteilen können.

Aufgaben

2.1 **Vorgängiges Selbststudium**

a) Studieren Sie im Lehrbuch KPK 3 die folgenden Abschnitte:
- 1.7 Drehschwingungen: Hin- und herfliessender Drehimpuls (Seite 10, ohne Aufgaben)
- 1.9 Die Dämpfung von Schwingungen (Seite 12)

Hinweis zum Abschnitt 1.7:
- Im zweiten Satz nach der Abb. 1.22 („Allerdings treten darin Grössen auf, die ...“) sind mit den „Grössen“ das Trägheitsmoment des Schwingkörpers und die Federkonstante (Direktionsmoment) der Feder gemeint.

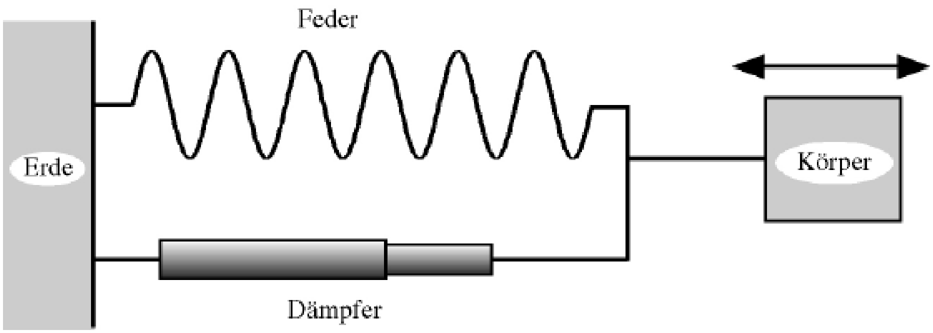
b) Führen Sie in Moodle den Test 2.1 durch.

2.2 Studieren Sie das folgende **YouTube-Video**:
- Gedämpfte Schwingung - Drehpendel (1:29)

2.3 (siehe nächste Seite)

2.3 In dieser Aufgabe sollen Sie die Dynamik des gedämpften Federschwingers untersuchen.

Betrachten Sie also den folgenden gedämpften Federschwinger (Lehrbuch KPK 3, Abb. 1.29, Seite 12):



Das Koordinatensystem soll wie folgt festgelegt werden:
- Die Schwingung soll in x-Richtung erfolgen.
- Die positive x-Richtung soll nach rechts zeigen.
- Die Ruhelage soll bei $x = 0$ liegen.

Am Schwingkörper greifen zwei Kräfte an, die Federkraft $\vec{F}_F$ (Kraft, die die Feder ausübt) und die Dämpfungskraft $\vec{F}_D$ (Kraft, die der Dämpfer ausübt).

a) Skizzieren Sie den Federschwinger, und zeichnen Sie die beiden Kräfte $\vec{F}_F$ und $\vec{F}_D$ ein. Berücksichtigen Sie dabei alle möglichen Fälle für die Richtungen der beiden Kräfte.

b) Formulieren Sie für den Schwingkörper die skalare x-Komponente des (aus der Mechanik bekannten) Aktionsprinzips.

Die drei Grössen in der in b) formulierten Gleichung hängen vom Ort x, der Geschwindigkeit v und der Beschleunigung a des Schwingkörpers ab. x, v und a sind dabei die skalaren x-Komponenten des Orts-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektors.

c) Geben Sie an, wie die drei Grössen von x, v und a abhängen, und setzen Sie die Ausdrücke in das Ergebnis von b) ein.

d) Setzen Sie in die Gleichung, die Sie in c) formuliert haben, die folgenden Beziehungen für die Geschwindigkeit v und die Beschleunigung a ein:

$$v = \dot{x}$$
$$a = \dot{v} = \ddot{x}$$

Sie erhalten dann eine sogenannte Differentialgleichung für die unbekannte Funktion

$$x:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto x = x(t)$$

e) Überprüfen Sie, dass die Funktion mit der folgenden Funktionsgleichung die in d) hergeleitete Differentialgleichung löst (vgl. Unterricht):

$$x(t) = \hat{x}\, e^{-\delta t} \sin(\omega_d t + \varphi)$$

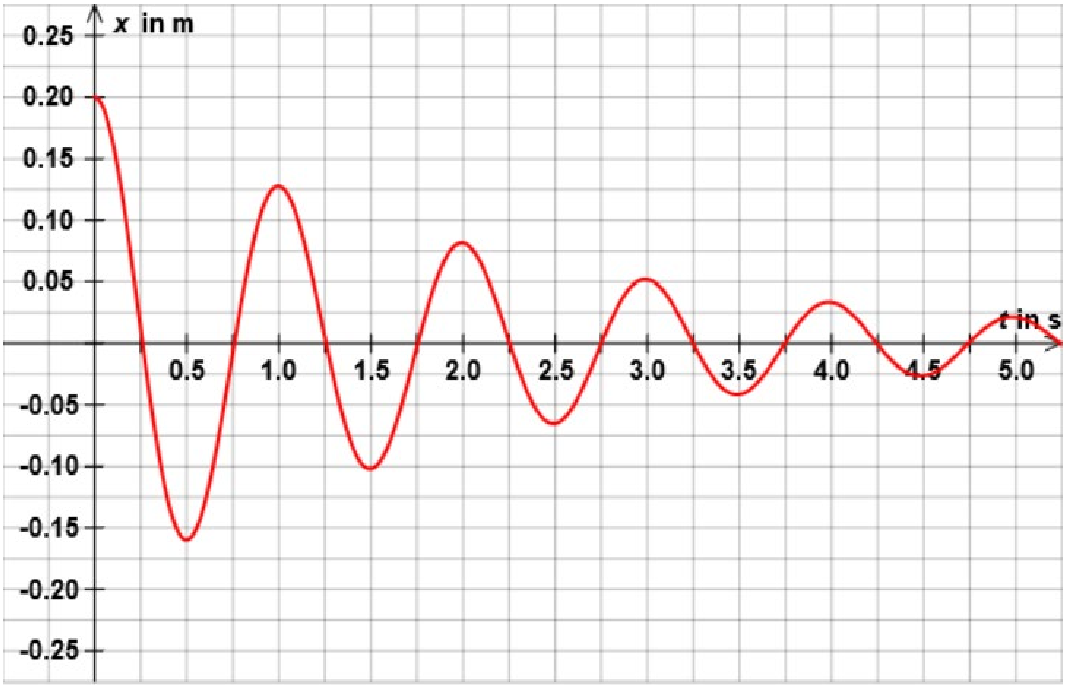
wobei: $\delta := \frac{k}{2m}$

$\omega_0 := \sqrt{\frac{D}{m}}$

$\omega_d := \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ ($\delta < \omega_0$, schwache Dämpfung)

Hinweise:
- Setzen Sie die Funktionsterme der Funktion x und deren ersten und zweiten Ableitung, d.h. $x(t) = ...$, $\dot{x}(t) = ...$ und $\ddot{x}(t) = ...$ in die Differentialgleichung ein.
- Führen Sie in der so erhaltenen Gleichung einen Koeffizientenvergleich durch: Die Koeffizienten (Vorfaktoren) der auftretenden Ausdrücke $e^{-\delta t} \sin(\omega_d t + \varphi)$ und $e^{-\delta t} \cos(\omega_d t + \varphi)$ bzw. $\sin(\omega_d t + \varphi)$ und $\cos(\omega_d t + \varphi)$ (nach Division mit $e^{-\delta t}$) müssen auf beiden Seiten der Gleichung je gleich sein.

2.4 Der Graf der Funktion $x = x(t)$ aus der Aufgabe 2.3 e) sieht für bestimmte Zahlenwerte der Grössen m, D, k, $\hat{x}$ und φ für $t \geq 0$ s wie folgt aus:



a) Bestimmen Sie aus dem Grafen die konkreten Zahlenwerte für die Periode T_d und die Kreisfrequenz ω_d.

b) Bestimmen Sie aus dem Grafen die Zeitpunkte/Zeitintervalle, zu/in welchen ...

i) ... in der Feder keine Energie gespeichert ist.

ii) ... im Dämpfer keine Energie dissipiert wird.

iii) ... im Schwingkörper kein Impuls gespeichert ist.

iv) ... Impuls von der Feder in den Schwingkörper fliesst.

v) ... Impuls vom Schwingkörper in den Dämpfer fliesst.

vi) ... Impuls von der Feder in die Erde fliesst.

vii) ... Energie von der Feder in die Erde fliesst.

viii) ... Energie in den Dämpfer fliesst.

Lösungen

2.1 -

2.2 -

2.3 Schwingung in x-Richtung:

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{p} = \begin{pmatrix} p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{F}_F = \begin{pmatrix} F_F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{F}_D = \begin{pmatrix} F_D \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) Die Richtungen der beiden Kräfte $\vec{F}_F$ und $\vec{F}_D$ hängen vom Ort $\vec{x}$ und der Geschwindigkeit $\vec{v}$ des Schwingkörpers ab.

Fälle:
- $x = 0$, $v > 0$ (Nulldurchgang nach rechts): $F_F = 0$, $F_D < 0$ ($\vec{F}_F = \vec{0}$, $\vec{F}_D$ zeigt nach links)
- $x > 0$, $v > 0$: $F_F < 0$, $F_D < 0$ ($\vec{F}_F$ und $\vec{F}_D$ zeigen nach links)
- $x > 0$, $v = 0$ (rechter Umkehrpunkt): $F_F < 0$, $F_D = 0$ ($\vec{F}_F$ zeigt nach links, $\vec{F}_D = \vec{0}$)
- $x > 0$, $v < 0$: $F_F < 0$, $F_D > 0$ ($\vec{F}_F$ zeigt nach links, $\vec{F}_D$ zeigt nach rechts)
- $x = 0$, $v < 0$ (Nulldurchgang nach links): $F_F = 0$, $F_F > 0$ ($\vec{F}_F = \vec{0}$, $\vec{F}_D$ zeigt nach rechts)
- $x < 0$, $v < 0$: $F_F > 0$, $F_D > 0$ ($\vec{F}_F$ und $\vec{F}_D$ zeigen nach rechts)
- $x < 0$, $v = 0$ (linker Umkehrpunkt): $F_F > 0$, $F_D = 0$ ($\vec{F}_F$ zeigt nach rechts, $\vec{F}_D = \vec{0}$)
- $x < 0$, $v > 0$: $F_F > 0$, $F_D < 0$ ($\vec{F}_F$ zeigt nach rechts, $\vec{F}_D$ zeigt nach links)

b) $F_F + F_D = \dot{p}$

c) $F_F = -D \cdot x$ $F_D = -k \cdot v$ $\dot{p} = m \cdot a$
$\Rightarrow -D \cdot x - k \cdot v = m \cdot a$

d) $-D \cdot x - k \cdot \dot{x} = m \cdot \ddot{x}$ Differentialgleichung für die unbekannte Funktion x

e) …

2.4 a) Periode $T_d = 1.0$ s
Kreisfrequenz $\omega_d = \frac{2\pi}{T_d} = 6.3\ s^{-1}$

b) i) Zeitpunkte, zu welchen die Feder entspannt ist
$\Rightarrow$ Zeitpunkte, zu welchen für den Ort x des Schwingkörpers gilt: $x = 0$ m
$\Rightarrow$ Zeitpunkte, zu welchen der Graf die Zeitachse schneidet
$\Rightarrow$ $t = 0.25$ s, 0.75 s, 1.25 s, ...

ii) Zeitpunkte, zu welchen der Schwingkörper in Ruhe ist
$\Rightarrow$ Zeitpunkte, zu welchen für die Geschwindigkeit v des Schwingkörpers gilt: $v = 0$ m/s
$\Rightarrow$ Zeitpunkte, zu welchen der Graf ein lokales Maximum/Minimum annimmt
$\Rightarrow$ $t = 0.0$ s, 0.5 s, 1.0 s, ...

iii) gleiche Zeitpunkte wie in ii)

iv) Zeitintervalle, in welchen die Feder gestaucht, d.h. weder entspannt noch gestreckt ist
$\Rightarrow$ Zeitintervalle, in welchen für den Ort x des Schwingkörpers gilt: $x < 0$ m
$\Rightarrow$ Zeitintervalle, in welchen der Graf unterhalb der Zeitachse verläuft
$\Rightarrow$ $0.25\ s < t < 0.75\ s$, $1.25\ s < t < 1.75\ s$, $2.25\ s < t < 2.75\ s$, ...

v) Zeitintervalle, in welchen sich der Schwingkörper in die positive Richtung bewegt
$\Rightarrow$ Zeitintervalle, in welchen für die Geschwindigkeit v des Schwingkörpers gilt: $v > 0$ m/s
$\Rightarrow$ Zeitintervalle, in welchen der Graf nach oben verläuft
$\Rightarrow$ $0.5\ s < t < 1.0\ s$, $1.5\ s < t < 2.0\ s$, $2.5\ s < t < 3.0\ s$, ...

vi) (siehe nächste Seite)

vi) Zeitintervalle, in welchen die Feder gestreckt, d.h. weder entspannt noch gestaucht ist
$\Rightarrow$ Zeitintervalle, in welchen für den Ort x des Schwingkörpers gilt: $x > 0$ m
$\Rightarrow$ Zeitintervalle, in welchen der Graf oberhalb der Zeitachse verläuft
$\Rightarrow$ $0.0 \text{ s} < t < 0.25 \text{ s}$, $0.75 \text{ s} < t < 1.25 \text{ s}$, $1.75 \text{ s} < t < 2.25 \text{ s}$, ...

vii) nie

viii) Zeitintervalle, in welchen im Dämpfer Energie dissipiert wird
$\Rightarrow$ Zeitintervalle zwischen den in ii) bestimmten Zeitpunkten