Aufgaben 13 Beugung
Auflösung optischer Instrumente

Lernziele

- sich aus dem Studium eines schriftlichen Dokumentes neue Kenntnisse und Fähigkeiten erarbeiten können.
- einen bekannten oder neuen Sachverhalt analysieren und beurteilen können.
- eine neue Problemstellung selbstständig bearbeiten können.
- wissen und verstehen, dass die Auflösung eines optischen Instrumentes durch Beugung begrenzt wird.
- das Rayleigh-Kriterium zur Auflösung einer Blende kennen, verstehen und anwenden können.
- wissen und verstehen, dass die Auflösung eines Fernrohres und eines Auges durch die beugungsbedingte Auflösung einer Blende bestimmt wird.
- wissen und verstehen, dass die tatsächliche Auflösung eines Auges aus physiologischen Gründen kleiner ist als deren optische Auflösung.
- die Auflösung eines Gitters als Wellenlängenauflösung kennen und verstehen.
- den Zusammenhang zwischen der Auflösung eines Gitters, der Anzahl Gitterlinien und der Beugungsordnung kennen und anwenden können.
- wissen und verstehen, dass die Auflösung eines Mikroskops durch Beugung am abzubildenden Objekt bestimmt wird.
- die Abbe-Bedingung zur Auflösung eines Mikroskops kennen und verstehen.
- den Zusammenhang zwischen der numerischen Apertur und dem Auflösungsvermögen eines Mikroskops kennen und verstehen.

Aufgaben

13.1 Studieren Sie im Lehrbuch Tipler/Mosca den folgenden Abschnitt:
- 30.8 Beugung und Auflösung (Seiten 1123 bis 1126)

13.2 Bearbeiten Sie im Arbeitsbuch Mills zu Tipler/Mosca die folgenden Aufgaben:
30.23, 30.24, 30.25, 30.28

13.3 Betrachten Sie nochmals die Aufgabe 30.23 aus dem Arbeitsbuch Mills (siehe Aufgabe 13.2).
Bearbeiten Sie die folgende Anschluss-Teilaufgabe c).

c) Bestimmen Sie, wie weit zwei Punkte in 1.00 km Abstand mindestens voneinander entfernt sein müssen, um von der betrachteten Blende sauber aufgelöst werden zu können.

13.4 Bestimmen Sie den Abstand zweier Punkte auf dem Mond, welche von der Erde aus mit einem Spiegelteleskop mit Durchmesser 5.00 m bei der Wellenlänge 400 nm gerade noch getrennt wahrgenommen werden können.

Hinweis:
- Die Distanz zwischen Erde und Mond beträgt $3.85 \cdot 10^8$ m.

13.5 Ein Astronaut mit Augendurchmesser 25.0 mm, Pupillendurchmesser 5.00 mm und Sehzellenabstand 5.00 µm befindet sich in einem Raumschiff in 400 km Höhe über der Erdoberfläche.

a) Bestimmen Sie die kleinste lineare Ausdehnung, die der Astronaut mit blossem Auge auf der Erde noch erkennen kann.

b) Beurteilen Sie, ob der Astronaut die chinesische Mauer mit einer Breite von 10 m erkennen kann.

13.6 (siehe nächste Seite)

13.6 **Experiment: Auflösung des Auges**

Drucken Sie das Theorie-Blatt Auflösung eines Punktepaares durch das Auge aus, und hängen Sie das Blatt an eine Wand, so dass Sie das Blatt aus möglichst grosser Entfernung betrachten können.

Testen Sie, aus welchen Distanzen Sie jeweils ein Punktepaar noch als zwei getrennte Punkte wahrnehmen können.

Überprüfen Sie die Aussage, dass das Auge zwei Punkte gerade noch auflösen kann, wenn sie unter dem Winkel von 1.5 Bogenminuten erscheinen.

13.7 Betrachten Sie ein optimal ausgelegtes Teleskop, dessen Eintrittsblende einen Durchmesser von 8.00 cm hat. Seine Vergrösserung ist so gewählt, dass man zwei nahe beieinander liegende Sterne, die beugungsbedingt gerade noch aufgelöst werden können, hinter dem als Lupe funktionierenden Okular unter dem Winkel von 4.0 Bogenminuten sieht.

Bestimmen Sie die totale Vergrösserung des Teleskops.

13.8 Ein Gitter mit 570 Gitterstrichen pro Millimeter wird senkrecht mit parallelem Licht einer Quecksilberdampflampe beleuchtet. Die Beugungsordnungen interferieren auf einem Schirm, der in der Brennebene einer Linse mit Brennweite 100.00 cm aufgestellt ist.

Bestimmen Sie, wie weit entfernt die ersten Beugungsordnungen der beiden gelben Linien mit Wellenlängen 579.10 nm bzw. 577.00 mm auf dem Schirm liegen.

13.9 Beurteilen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.
Kreuzen Sie das entsprechende Kästchen an.

		wahr	falsch
a)	Das Auflösungsvermögen einer Lochblende vergrössert sich mit zunehmendem Durchmesser der Blende.	☐	☐
b)	Das Auflösungsvermögen eines Fernrohres vergrössert sich mit zunehmender Wellenlänge des Lichtes.	☐	☐
c)	Das Auflösungsvermögen des Auges ist physiologisch bedingt, und nicht durch das optische Auflösungsvermögen der Pupille.	☐	☐
d)	Nach der Abbe'schen Abbildungstheorie liefert die 0., die 1. und die 2. Beugungsordnung zusammen ein schärferes und helleres Bild als die 1. und die 2. Beugungsordnung.	☐	☐
e)	Bei einem Mikroskop wird das Auflösungsvermögen vor allem durch die Wellenlänge des verwendeten Lichtes bestimmt.	☐	☐

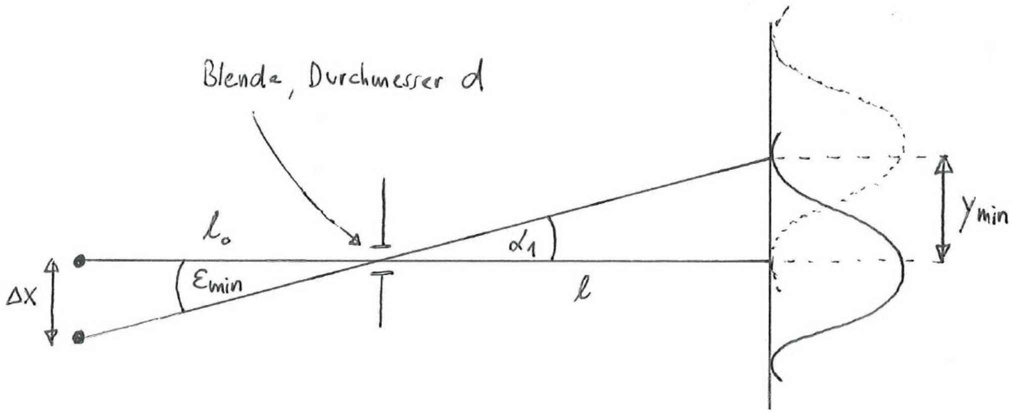
Lösungen

13.1 ...

13.2 ...

Hinweis zu L30.25 (Lösung der Aufgabe 30.25 im Arbeitsbuch Mills zu Tipler/Mosca):
- Die physiologisch bedingte Begrenzung der Auflösung (Distanz der Stäbchen und Zäpfchen auf der Netzhaut des Auges) wird hier nicht berücksichtigt.
- Unter Berücksichtigung der Physiologie des Auges, d.h. dass zwei benachbarte Löcher mindestens unter einem Winkel von 1.5 Bogenminuten erscheinen müssen, erhält man das Resultat *l* = 14 m.

13.3 Lösung zur ganzen Aufgabe 30.23 und zur Zusatz-Teilaufgabe c):



a) $\sin(\alpha_1) = 1.22 \cdot \frac{\lambda}{d}$

$\alpha_1 \approx \sin(\alpha_1)$ (α_1 klein)

Unb.: α_1

Bek.: $\lambda = 700$ nm, $d = 0.10$ mm

$$\alpha_1 = 1.22 \cdot \frac{\lambda}{d} = 8.54 \cdot 10^{-3}\ \text{rad} = 0.49°$$

b) $\tan(\alpha_1) = \frac{y_{min}}{l}$

Unb.: y_{min}

Bek.: α_1 (aus a), $l = 8.00$ m

$$y_{min} = l \cdot \tan(\alpha_1) = 6.83\ \text{cm}$$

c) $\varepsilon_{min} = \alpha_1$ (Rayleighkriterium)

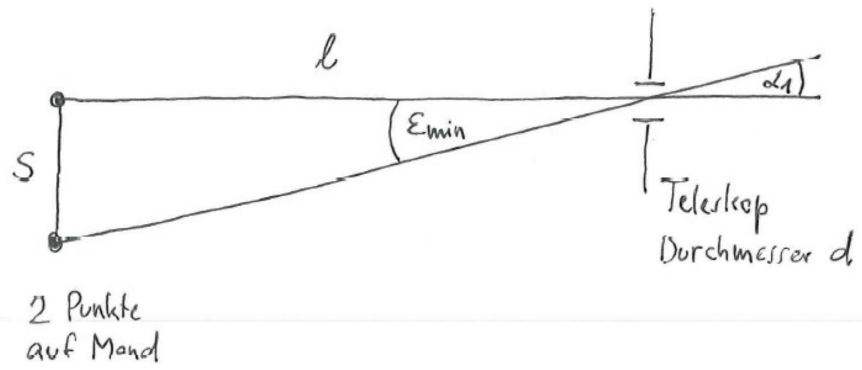
$\tan(\varepsilon_{min}) = \frac{\Delta x}{l_0}$

Unb.: ε_{min}, Δx

Bek.: α_1 (aus a), $l_0 = 1.00$ km

$$\Delta x = l_0 \cdot \tan(\alpha_1) = 8.54\ \text{m}$$

13.4



Unb.	Bek.
ε_{min}	$\lambda = 400$ nm
α_1	$d = 5.00$ m
S	$l = 3.85 \cdot 10^8$ m

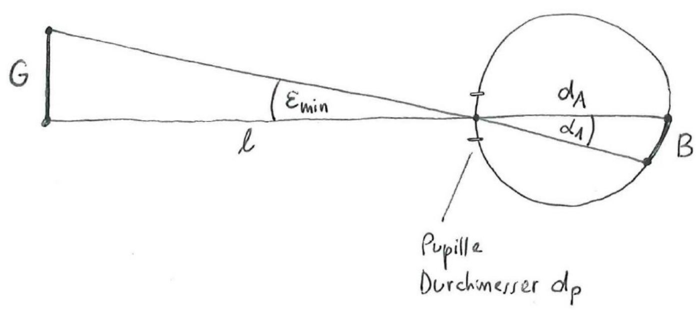
$\varepsilon_{min} = \alpha_1$ (Rayleigh)

$\sin(\alpha_1) = 1.22 \frac{\lambda}{d}$

$\tan(\varepsilon_{min}) = \frac{S}{l}$

$$\begin{aligned} S &= l \cdot \tan(\varepsilon_{min}) \\ &= l \cdot \tan(\alpha_1) \\ &\approx l \cdot \sin(\alpha_1) \quad (\alpha_1 \text{ klein}) \\ &= 1.22 \frac{\lambda \cdot l}{d} \\ &= 37.6 \text{ m} \end{aligned}$$

13.5



i) Beugungsbedingte Auflösung

Unb.	Bek.
ε_{min}	$\lambda \approx 500$ nm
α_1	$d_p = 5.00$ mm
G	$l = 400$ km

$\varepsilon_{min} = \alpha_1$ (Rayleigh)

$\sin(\alpha_1) = 1.22 \frac{\lambda}{d_p}$

$\tan(\varepsilon_{min}) = \frac{G}{l}$

$$
\begin{aligned}
G &= \ell \cdot \tan(\varepsilon_{min}) \\
&= \ell \cdot \tan(\alpha_1) \\
&\approx \ell \cdot \sin(\alpha_1) \qquad (\alpha_1 \text{ klein}) \\
&= 1.22 \, \frac{\lambda \cdot \ell}{d_P} \\
&= 48.8\,\text{m} > 10\,\text{m} \quad (\text{Breite der chinesischen Mauer})
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ Chinesische Mauer nicht erkennbar

ii) Physiologische Auflösung

$B = 2s \qquad (B \geq 2s)$

$\frac{B}{d_A} = \frac{G}{\ell} \qquad$ (Strahlensatz)

Unb.	Bek.
B	$s = 5.00\,\mu m$
G	$d_A = 25.0\,mm$
	$\ell = 400\,km$

$$
\begin{aligned}
G &= \frac{B \cdot \ell}{d_A} \\
&= \frac{2s \cdot \ell}{d_A} \\
&= 160\,\text{m} > 10\,\text{m} \quad (\text{Breite der chinesischen Mauer})
\end{aligned}
$$

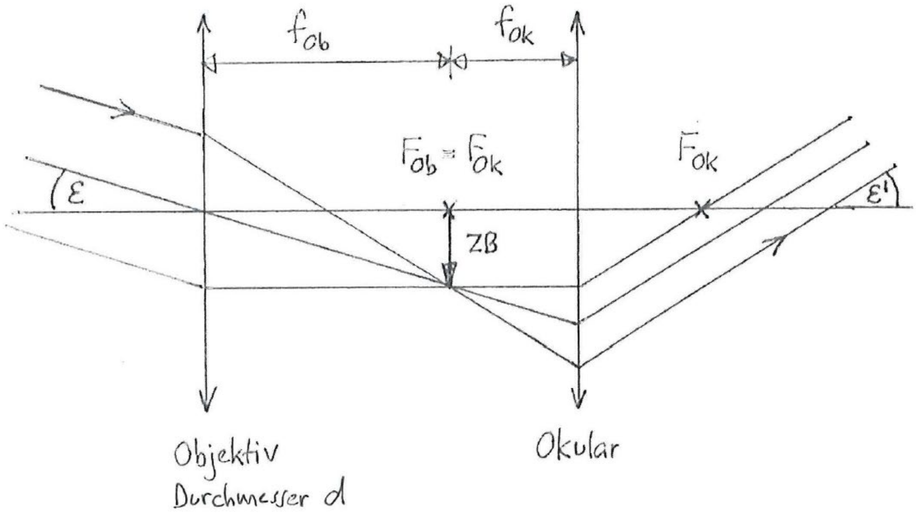
$\Rightarrow$ Chinesische Mauer nicht erkennbar

Vergleich i) $\leftrightarrow$ ii) : Physiologische Auflösung ist um Faktor ≈ 3 schlechter als die beugungsbedingte Auflösung

$\Rightarrow$ Auflösung des Auges ist physiologisch bedingt

13.6 …

13.7



$$M = \frac{\tan(\varepsilon')}{\tan(\varepsilon)}$$

$\varepsilon = \alpha_1$ (Rayleigh)

$$\sin(\alpha_1) = 1.22\,\frac{\lambda}{d}$$

Unb.	Bek.
M	$\varepsilon' = -4.0$ Bogenminuten
ε	$\lambda = 550$ nm
α_1	$d = 8.00$ cm

$$M = \frac{\tan(\varepsilon')}{\tan(\alpha_1)}$$

$$\approx \frac{\tan(\varepsilon')}{\sin(\alpha_1)} \quad (\alpha_1 \text{ klein})$$

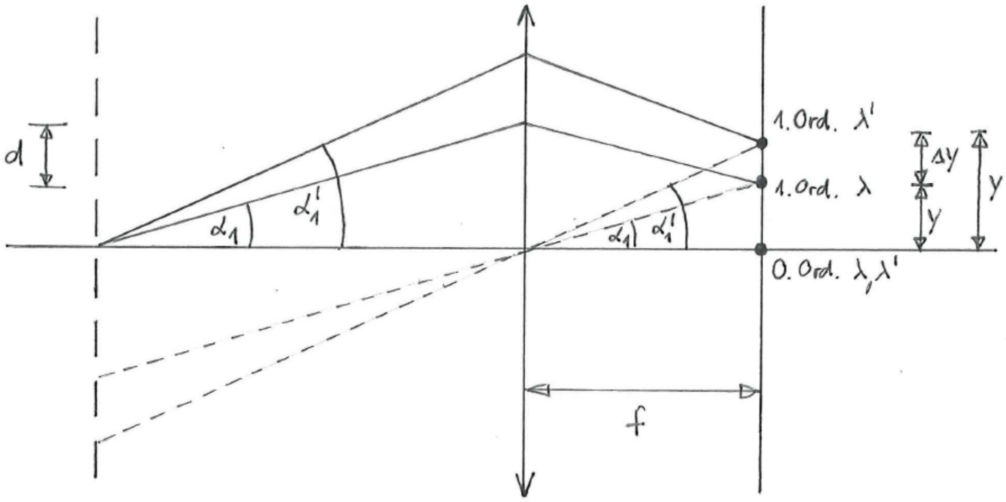
$$= \frac{\tan(\varepsilon')\cdot d}{1.22\cdot\lambda} \quad \left(\text{Bem.: } 1° = 60' \text{ (Bogenminuten)}\right)$$

$$= -139$$

Hinweis:
- Die totale Vergrösserung V_T des Teleskops wird hier mit M bezeichnet.

13.8 (siehe nächste Seite)

13.8



Unb.	Bek.
Δy	$f = 100.00$ cm
y'	$\lambda = 577.00$ nm
y	$\lambda' = 579.10$ nm
α_1	$N = 570$
α_1'	$\Delta S = 1$ mm
d	

$$\Delta y = y' - y$$

$$\tan(\alpha_1) = \frac{y}{f}$$

$$\tan(\alpha_1') = \frac{y'}{f}$$

$$\sin(\alpha_1) = \frac{\lambda}{d}$$

$$\sin(\alpha_1') = \frac{\lambda'}{d}$$

$$N \cdot d = \Delta S$$

$$\begin{aligned} \Delta y &= y' - y \\ &= f \cdot \tan(\alpha_1') - f \cdot \tan(\alpha_1) \\ &= f \left(\frac{\sin(\alpha_1')}{\sqrt{1 - \sin^2(\alpha_1')}} - \frac{\sin(\alpha_1)}{\sqrt{1 - \sin^2(\alpha_1)}} \right) \end{aligned}$$

(Fortsetzung siehe nächste Seite)

$$= f\left(\frac{\frac{\lambda'}{d}}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda'}{d}\right)^2}} - \frac{\frac{\lambda}{d}}{\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{d}\right)^2}}\right)$$

$$= f\left(\frac{\lambda'}{\sqrt{d^2-\lambda'^2}} - \frac{\lambda}{\sqrt{d^2-\lambda^2}}\right)$$

$$= f\left(\frac{\lambda'}{\sqrt{\left(\frac{\Delta s}{N}\right)^2-\lambda'^2}} - \frac{\lambda}{\sqrt{\left(\frac{\Delta s}{N}\right)^2-\lambda^2}}\right)$$

$$= 1.42\ \text{mm}$$

Bem.: Kleinwinkelnäherung $\sin(\varphi) \approx \tan(\varphi)$ für α und α' hier nicht zulässig, da α und α' zu gross.

13.9 a) wahr
b) falsch
c) wahr
d) wahr
e) wahr