Aufgaben 4 Wellen
Wellenträger, Wellengrössen, Sinuswellen, Energie

Lernziele

- sich aus dem Studium eines schriftlichen Dokumentes neue Kenntnisse und Fähigkeiten erarbeiten können.
- einen neuen Sachverhalt analysieren und beurteilen können.
- verschiedene Typen von Wellen kennen.
- wissen und verstehen, wie eine Welle entsteht.
- wissen und verstehen, was der Träger einer Welle ist.
- die Bewegungen von Welle und Wellenträger unterscheiden können.
- wissen und verstehen, was eine Quer-/Transversalwelle und eine Längs-/Longitudinalwelle ist.
- wissen, wovon die Geschwindigkeit einer Welle abhängt.
- wissen und verstehen, dass der Wellenträger ein-, zwei oder dreidimensional sein kann.
- wissen und verstehen, was eine Wellenfront ist.
- wissen und verstehen, was eine lineare Welle, gerade Welle, Kreiswelle, ebene Welle und Kugelwelle ist.
- die Zusammenhänge zwischen Periodendauer, Frequenz, Kreisfrequenz, Wellenlänge, Wellenzahl und Ausbreitungsgeschwindigkeit kennen und anwenden können.
- wissen und verstehen, was eine Sinuswelle bzw. eine harmonische Welle ist.
- die mathematische Beschreibung einer eindimensionalen Sinuswelle kennen, verstehen und anwenden können.
- wissen und verstehen, wie die Energiestromdichte und die Intensität definiert sind.
- den Zusammenhang zwischen der Intensität und der Amplitude einer Schwingungsgrösse kennen und anwenden können.
- für eine von einem punktförmigen Sender abgestrahlte Welle den Zusammenhang zwischen der Intensität und dem Abstand vom Sender kennen und verstehen.

Aufgaben

4.1 Studieren Sie im Lehrbuch KPK 3 die folgenden Abschnitte:
- Einleitung zum Kapitel "4. Wellen" (Seite 25)
- 4.1 Der Träger der Wellen (Seite 26)
- 4.2 Die Geschwindigkeit von Wellen (Seite 27)
- 4.3 Ein-, zwei- und dreidimensionale Wellenträger (Seite 28)
- 4.4 Sinuswellen (Seite 29)
- 4.5 Der Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit, Frequenz und Wellenlänge (Seite 30)
- 4.8 Energietransport mit Wellen (Seite 33)

4.2 Man unterscheidet zwischen Querwellen/Transversalwellen und Längswellen/Longitudinalwellen.

Studieren Sie dazu ...

a) … die folgenden **YouTube-Videos**:
- Wellenmaschine zur Demonstration von Querwellen
- Wellenmodell mit Magneten

b) … das folgende **YouTube-Video**:
- Transversalwellen - Wellenmaschine

c) … das folgende **Applet**:
- Transversal-/Longitudinalwelle

4.3 (siehe nächste Seite)

4.3 Es sind T die Periodendauer, f die Frequenz, ω die Kreisfrequenz, λ die Wellenlänge, k die Wellenzahl und v die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer periodischen Welle. Bestimmen Sie jeweils die fehlenden Grössen:

	T	f	ω	λ	k	v
a)	$2.00\,\mathrm{s}$			$5.00\,\mathrm{m}$		
b)		$10.0\,\mathrm{Hz}$			$0.250\,\mathrm{m}^{-1}$	
c)			$10.0\,\mathrm{s}^{-1}$			$20.0\,\mathrm{ms}^{-1}$
d)		$440\,\mathrm{Hz}$		$77.3\,\mathrm{cm}$		
e)				$6'000\,\mathrm{km}$		$3.00\cdot10^{8}\,\mathrm{ms}^{-1}$
f)		$2.4\,\mathrm{GHz}$				$3.00\cdot10^{8}\,\mathrm{ms}^{-1}$

Hinweise:
- Die Kreisfrequenz ω ist wie folgt definiert: $\omega := 2\pi f$
- Die Wellenzahl k ist wie folgt definiert: $k := \frac{2\pi}{\lambda}$

4.4 Eine Sinuswelle läuft entlang eines Seils. Für einen bestimmten Punkt des Seils dauert es 0.170 s, bis er von seiner maximalen Auslenkung zu seiner Mittellage zurückgekehrt ist.

Bestimmen Sie die Periodendauer und die Frequenz der Welle.

4.5 Eine in x-Richtung fortschreitende, lineare Welle kann mathematisch durch die Funktion y beschrieben werden:

$$y:\quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto & y = y(x,t) \end{array}$$

y ist eine Funktion mit zwei Variablen. Sie ordnet den beiden reellen Grössen x (Ort) und t (Zeit) die reelle Grösse y (Auslenkung) zu. Die Funktion drückt aus, wie gross die Auslenkung y des Wellenträgers an einem bestimmten Ort x und zu einem bestimmten Zeitpunkt t ist.

Erfolgt die Anregung der Welle sinusförmig bzw. harmonisch, ergibt sich eine Sinuswelle bzw. harmonische Welle mit der folgenden Funktionsgleichung (vgl. Unterricht):

$y(x,t) = \hat{y}\sin(kx - \omega t)$ wobei:
- $\hat{y}$ Amplitude
- $\omega := \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$ Kreisfrequenz
- $k := \frac{2\pi}{\lambda}$ Wellenzahl

Gegeben sind die Amplitude $\hat{y}$, die Frequenz f und die Ausbreitungsgeschwindigkeit v:

$\hat{y} = 3.0$ cm $\quad f = 2.5$ Hz $\quad v = 50$ cm/s

a) Bestimmen Sie die Periode T und die Wellenlänge λ.

b) Bestimmen Sie die Auslenkung y am Ort x = 42 cm zum Zeitpunkt t = 1.8 s.

c) Bestimmen Sie alle Orte x, an welchen sich zum Zeitpunkt t ein Wellenberg befindet.

i) t = 0.0 s

ii) t = 1.0 s

4.6 (siehe nächste Seite)

4.6 In einem Sender werde eine harmonische Welle angeregt und ausgesendet.

Beurteilen Sie mit schlüssigen Begründungen, ob und wie in den Fällen a) und b) die Amplitude $\hat{y}$ und die Intensität I der Welle vom Abstand r vom Sender abhängt.

a) *„Flächenhafter“ Sender*
Der Sender sende in eine einzige Richtung eine seitlich begrenzte, nicht auseinanderlaufende ebene Welle aus. Die Wellenfronten sind also ebene Flächen, deren Gestalt und Flächeninhalt konstant bleiben, d.h. sich mit zunehmendem Abstand vom Sender nicht verändern.

b) *Punktförmiger Sender*
Der Sender sende eine in alle Richtungen gleichverteilte Kugelwelle aus. Die Wellenfronten sind Kugeloberflächen.

Hinweise:
- Überlegen Sie sich, wie sich die mit der Welle ausbreitende Energie auf dem Wellenträger räumlich verteilt.
- Überlegen Sie sich, ob und wie der Flächeninhalt einer Wellenfront vom Abstand vom Sender abhängt.
- Nehmen Sie an, dass die Welle auf ihrem Weg auf dem Wellenträger keine Energie verliert, d.h. dass keine Energie absorbiert wird.

4.7 Ein als punktförmig angenommener Lautsprecher strahlt eine in alle Richtungen gleichverteilte Schallwelle ab. Die über die Zeit gemittelte Schallleistung ist 100 W.

a) Bestimmen Sie ...

i) ... die in 60 s abgestrahlte Energie.

ii) ... die Intensität der Schallwelle 4.50 m vom Lautsprecher entfernt.

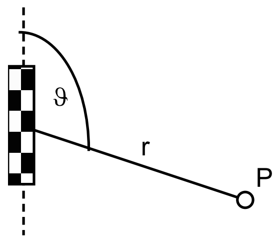
b) Bestimmen Sie, um welchen Faktor ...

i) ... die Amplitude der abgestrahlten Schallwelle vergrössert werden müsste, um die mittlere Schallleistung auf 200 W zu erhöhen.

ii) ... die Entfernung zum Lautsprecher vergrössert werden müsste, um die Intensität auf einen Drittel zu reduzieren.

4.8 Eine Mobilfunktantenne strahlt eine elektromagnetische Welle ab.

Die Intensität I der abgestrahlten elektromagnetischen Welle an einem bestimmten Ort P hängt von der Sendeleistung ab. Sie hängt aber auch vom Abstand r zur Antenne, vom Winkel ϑ zur Antennenachse sowie von der Frequenz der elektromagnetischen Welle ab.

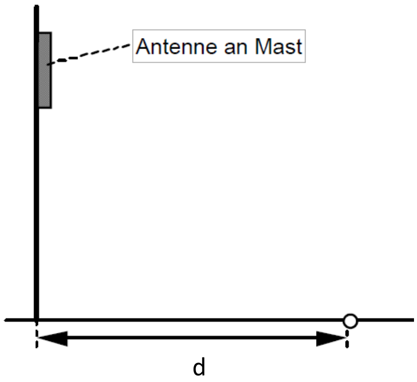


Falls der Abstand r viel grösser ist als die Wellenlänge der elektromagnetischen Welle, gilt bei konstanter Frequenz und konstanter Sendeleistung (ohne Herleitung):

$$I \sim \frac{\sin^2(\vartheta)}{r^2}$$

(Fortsetzung siehe nächste Seite)

Eine Mobilfunkantenne sei mit vertikaler Ausrichtung der Antennenachse an einem Mast in horizontalem Gelände montiert:



Bestimmen Sie die Entfernung d vom Fusse der Antenne, in welcher die Intensität (bei konstanter Frequenz und konstanter Sendeleistung) maximal ist.

Hinweise:
- Überlegen Sie sich, wie die Grössen ϑ und r von d abhängen, damit Sie die Intensität I als Funktion der alleinigen Variablen d ausdrücken können, d.h. $I = I(d)$.
- Bestimmen Sie das absolute Maximum der Funktion $I = I(d)$.

Lösungen

4.1 …

4.2 …

4.3 Benötigte Zusammenhänge:

$f = \frac{1}{T}$, $\omega = 2\pi f$, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, $v = \lambda f$

a) $f = 0.500$ Hz, $\omega = 3.14\ s^{-1}$, $k = 1.26\ m^{-1}$, $v = 2.50$ m/s

b) $T = 0.100$ s, $\omega = 62.8\ s^{-1}$, $\lambda = 25.1$ m, $v = 251$ m/s

c) $T = 0.628$ s, $f = 1.59$ Hz, $\lambda = 12.6$ m, $k = 0.500\ m^{-1}$

d) $T = 2.27 \cdot 10^{-3}$ s, $\omega = 2.76 \cdot 10^{3}\ s^{-1}$, $k = 8.13\ m^{-1}$, $v = 340$ m/s

e) $T = 2.00 \cdot 10^{-2}$ s, $f = 50.0$ Hz, $\omega = 314\ s^{-1}$, $k = 1.05 \cdot 10^{-6}\ m^{-1}$

f) $T = 4.17 \cdot 10^{-10}$ s, $\omega = 1.51 \cdot 10^{10}\ s^{-1}$, $\lambda = 0.125$ m, $k = 50.3\ m^{-1}$

4.4 $T = 4 \cdot 0.170$ s $= 0.680$ s, $f = 1.47$ Hz

4.5 a) $T = 0.40$ s $\lambda = 0.20$ m

b) $y(0.42\text{ m}, 1.8\text{ s}) = -0.018\text{ m} = -1.8\text{ cm}$

c) $kx - \omega t = \frac{\pi}{2} + n \cdot 2\pi \quad (n \in \mathbb{Z})$

i) $x = \frac{1}{4}\lambda + n \cdot \lambda \ (n \in \mathbb{Z}) = \ldots, -0.15\text{ m}, 0.05\text{ m}, 0.25\text{ m}, \ldots$

Hinweise:
- Bei einem Wellenberg nimmt die Sinus-Funktion ihren maximalen Wert an.
- Überlegen Sie sich, bei welchen Argumenten die Sinus-Funktion ihren maximalen Wert annimmt.

ii) Da die Frequenz 2.5 Hz bzw. die Periode 0.40 s beträgt, schreitet die Welle in 1 Sekunde 2.5 Wellenlängen fort, d.h. die Wellenberge sind gegenüber i) um 2.5 Wellenlängen verschoben.
$x = \left(\frac{1}{4} + 2.5\right)\lambda + n \cdot \lambda \ (n \in \mathbb{Z}) = \ldots, -0.05\text{ m}, 0.15\text{ m}, 0.35\text{ m}, \ldots$

4.6 $I(r)$:= Intensität der Welle im Abstand r vom Sender
$A(r)$:= Flächeninhalt einer Wellenfront im Abstand r vom Sender

$I(r) \cdot A(r)$ konst. (da keine Energieabsorption)

$I(r) \sim (\hat{y}(r))^2$

a) Die Wellenfronten sind ebene Flächen, deren Flächeninhalte konstant bleiben, d.h. sich mit zunehmendem Abstand vom Sender nicht verändern.

$A(r)$ konst. (d.h. unabhängig von r)

$\Rightarrow$ $I(r)$ konst. (d.h. unabhängig von r)
$\Rightarrow$ $\hat{y}(r)$ konst. (d.h. unabhängig von r)

b) (siehe nächste Seite)

b) Die Wellenfronten sind Kugeloberflächen, deren Flächeninhalte mit zunehmendem Abstand vom Sender zunehmen.

$A(r) \sim r^2$

$\Rightarrow\ I(r) \sim \frac{1}{r^2}$

$\Rightarrow\ \hat{y}(r) \sim \frac{1}{r}$

4.7 a) i) $W = \overline{P} \cdot \Delta t = 100\ \text{W} \cdot 60\ \text{s} = 6.0\ \text{kJ}$

ii) $I = \frac{\overline{P}}{A} = \frac{\overline{P}}{4\pi r^2} = \frac{100\ \text{W}}{4\pi (4.50\ \text{m})^2} = 0.39\ \text{W/m}^2$

b) i) $\overline{P} = I \cdot A$

$I \sim \hat{y}^2$

$A \sim r^2$

$\Rightarrow\ \hat{y} \sim \sqrt{\overline{P}}$

$\Rightarrow$ Faktor $\sqrt{2}$

ii) $\overline{P} = I \cdot A$

$A \sim r^2$

$\Rightarrow\ r \sim \frac{1}{\sqrt{I}}$

$\Rightarrow$ Faktor $\sqrt{3}$

4.8 $I(d) = k \cdot \frac{d^2}{\left(d^2 + h^2\right)^2}$ (h = Höhe der Antenne über dem Boden, k konst.)

I = I(d) maximal (absolutes Maximum) für d = h

Hinweis:
- Betrachten Sie das folgende rechtwinklige Dreieck:
  Antenne – Fusspunkt des Antennenmastes – Punkt am Boden im Abstand d.