Aufgaben 2 Schwingungen
Drehpendel, Gedämpfte Schwingung

Lernziele

- sich aus dem Studium eines schriftlichen Dokumentes neue Kenntnisse und Fähigkeiten erarbeiten können.
- die Analogie zwischen einer Drehschwingung und einer linearen Schwingung kennen und verstehen.
- wissen und verstehen, welche Grössen und mit welcher Gesetzmässigkeit diese Grössen die Periodendauer einer Drehschwingung beeinflussen.
- verstehen, wie eine Schwingung gedämpft werden kann.
- verstehen, wie ein mechanischer Dämpfer funktioniert.
- verstehen, dass alle natürlich ablaufenden Schwingungen gedämpft sind.
- wissen, wie die Stärke der Dämpfung die Bewegung eines Schwingers beeinflusst.
- die bei einer mechanischen, gedämpften Schwingung auftretenden Impuls- und Energieflüsse verstehen.
- einen neuen Sachverhalt analysieren und beurteilen können.

Aufgaben

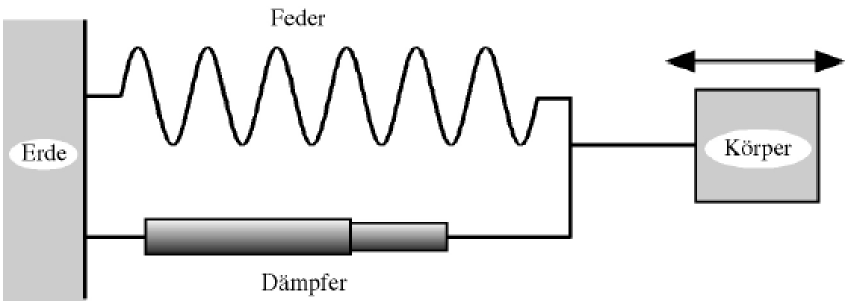
2.1 Studieren Sie im Lehrbuch KPK 3 die folgenden Abschnitte:
- 1.7 Drehschwingungen: Hin- und herfliessender Drehimpuls (Seite 10)
- 1.9 Die Dämpfung von Schwingungen (Seite 12)

Hinweis zum Abschnitt 1.7:
- Im zweiten Satz nach der Abb. 1.22 („Allerdings treten darin Grössen auf, die ...“) sind mit den „Grössen“ das Trägheitsmoment des Schwingkörpers und die Federkonstante (Direktionsmoment) der Feder gemeint.

2.2 Studieren Sie das folgende **YouTube-Video**:
- Gedämpfte Schwingung - Drehpendel

2.3 In dieser Aufgabe sollen Sie die Dynamik des gedämpften Federschwingers untersuchen.

Betrachten Sie also den folgenden gedämpften Federschwinger (Lehrbuch KPK 3, Abb. 1.29, Seite 12):



Das Koordinatensystem soll wie folgt festgelegt werden:
- Die Schwingung soll in x-Richtung erfolgen.
- Die positive x-Richtung soll nach rechts zeigen.
- Die Ruhelage soll bei x = 0 liegen.

Am Schwingkörper greifen zwei Kräfte an, die Federkraft $\vec{F}_F$ (Kraft, die die Feder ausübt) und die Dämpfungskraft $\vec{F}_D$ (Kraft, die der Dämpfer ausübt).

a) Skizzieren Sie den Federschwinger, und zeichnen Sie die beiden Kräfte $\vec{F}_F$ und $\vec{F}_D$ ein. Berücksichtigen Sie dabei alle möglichen Fälle für die Richtungen der beiden Kräfte.

b) Formulieren Sie für den Schwingkörper das (aus der Mechanik bekannte Newton'sche) Aktionsprinzip in allgemeiner vektorieller Form.

(Fortsetzung siehe nächste Seite)

c) Formulieren Sie für den Schwingkörper die skalare x-Komponente des Aktionsprinzips.

Die drei Grössen in der in c) formulierten Gleichung hängen vom Ort x, der Geschwindigkeit v und der Beschleunigung a des Schwingkörpers ab. x, v und a sind dabei jeweils die skalaren x-Komponenten des Orts-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektors.

d) Geben Sie an, wie die drei Grössen von x, v und a abhängen, und setzen Sie die Ausdrücke in das Ergebnis von c) ein.

e) Setzen Sie in die Gleichung, die Sie in d) formuliert haben, die folgenden Beziehungen für die Geschwindigkeit v und die Beschleunigung a ein:

$$v = \dot{x}$$
$$a = \dot{v} = \ddot{x}$$

Sie erhalten dann eine sogenannte Differentialgleichung für die unbekannte Funktion

$$x:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \longmapsto x = x(t)$$

f) Überprüfen Sie, dass die Funktion mit der folgenden Funktionsgleichung die in e) hergeleitete Differentialgleichung löst (vgl. Unterricht):

$$x(t) = \hat{x}\ e^{-\delta t} \sin(\omega_d t + \varphi)$$

wobei: $\delta := \frac{k}{2m}$

$$\omega_0 := \sqrt{\frac{D}{m}}$$

$$\omega_d := \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad (\delta < \omega_0,\ \text{schwache Dämpfung})$$

Hinweise:
- Setzen Sie die Funktionsterme der Funktion x und deren ersten und zweiten Ableitung, d.h. $x(t) = ...$, $\dot{x}(t) = ...$ und $\ddot{x}(t) = ...$ in die Differentialgleichung ein.
- Führen Sie in der so erhaltenen Gleichung einen Koeffizientenvergleich durch: Die Koeffizienten (Vorfaktoren) der auftretenden Ausdrücke $e^{-\delta t} \sin(\omega_d t + \varphi)$ und $e^{-\delta t} \cos(\omega_d t + \varphi)$ bzw. $\sin(\omega_d t + \varphi)$ und $\cos(\omega_d t + \varphi)$ (nach Division mit $e^{-\delta t}$) müssen auf beiden Seiten der Gleichung je gleich sein.

g) Die in f) angegebene Lösung x(t) = … der Differentialgleichung ist die sogenannte allgemeine Lösung. Sie enthält noch die beiden freien Parameter $\hat{x}$ ($\hat{x} \in \mathbb{R}^+$) und φ ($0 \le \varphi < 2\pi$).

Bestimmen Sie $\hat{x}$ und φ, so dass die folgenden Anfangsbedingungen erfüllt sind:

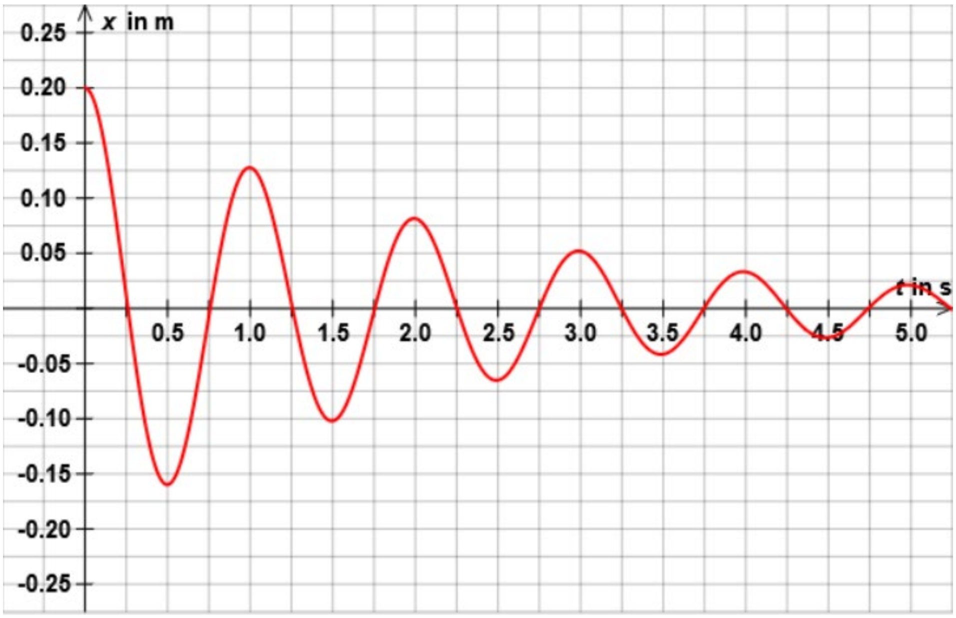
i) $x(0\ \text{s}) = 0\ \text{m}$ und $\dot{x}(0\ \text{s}) = v_0 > 0\ \text{m/s}$

ii) $x(0\ \text{s}) = x_0 > 0\ \text{m}$ und $\dot{x}(0\ \text{s}) = 0\ \text{m/s}$

2.4 Bearbeiten Sie die Aufgabe 2.3 für den Fall ohne Dämpfung (k = 0 Ns/m).

2.5 (siehe nächste Seite)

2.5 Für bestimmte Zahlenwerte der Grössen m, D, k, $\hat{x}$ und φ sieht der Graf von $x = x(t)$ aus der Aufgabe 2.3 f) für $t \geq 0$ s wie folgt aus:



a) Lesen Sie aus dem Grafen die konkreten Zahlenwerte der Grössen $\hat{x}$ und φ heraus.

b) Bestimmen Sie aus dem Grafen den konkreten Zahlenwert der Kreisfrequenz ω_d.

Lösungen

2.1 ...

2.2 …

2.3 a) Die Richtungen der beiden Kräfte $\vec{F}_F$ und $\vec{F}_D$ hängen vom Ort $\vec{x}$ und der Geschwindigkeit $\vec{v}$ des Schwingkörpers ab.

Schwingung in x-Richtung: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v} = \begin{pmatrix} v \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Fälle:

- $x = 0$, $v > 0$ (Nulldurchgang nach rechts): $\vec{F}_F = \vec{0}$, $\vec{F}_D$ zeigt nach links
- $x > 0$, $v > 0$: $\vec{F}_F$ zeigt nach links, $\vec{F}_D$ zeigt nach links
- $x > 0$, $v = 0$ (rechter Umkehrpunkt) $\vec{F}_F$ zeigt nach links, $\vec{F}_D = \vec{0}$
- $x > 0$, $v < 0$: $\vec{F}_F$ zeigt nach links, $\vec{F}_D$ zeigt nach rechts
- $x = 0$, $v < 0$ (Nulldurchgang nach links): $\vec{F}_F = \vec{0}$, $\vec{F}_D$ zeigt nach rechts
- $x < 0$, $v < 0$: $\vec{F}_F$ zeigt nach rechts, $\vec{F}_D$ zeigt nach rechts
- $x < 0$, $v = 0$ (linker Umkehrpunkt): $\vec{F}_F$ zeigt nach rechts, $\vec{F}_D = \vec{0}$
- $x < 0$, $v > 0$: $\vec{F}_F$ zeigt nach rechts, $\vec{F}_D$ zeigt nach links

b) $\vec{F}_F + \vec{F}_D = \dot{\vec{p}}$

c) $\vec{F}_F = \begin{pmatrix} F_F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{F}_D = \begin{pmatrix} F_D \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \dot{\vec{p}} = \begin{pmatrix} \dot{p} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow F_F + F_D = \dot{p}$

d) $F_F = - D \cdot x \qquad F_D = - k \cdot v \qquad \dot{p} = m \cdot a$

$\Rightarrow - D \cdot x - k \cdot v = m \cdot a$

e) $- D \cdot x - k \cdot \dot{x} = m \cdot \ddot{x}$ Differentialgleichung für die unbekannte Funktion x

f) ...

g) i) $x(0\ \text{s}) = \hat{x} \sin(\varphi) = 0\ \text{m}$

$\dot{x}(0\ \text{s}) = \hat{x}(-\delta \sin(\varphi) + \omega_d \cos(\varphi)) = v_0$

$\Rightarrow \varphi = 0, \ \hat{x} = \frac{v_0}{\omega_d}$

$\Rightarrow x(t) = \frac{v_0}{\omega_d} e^{-\delta t} \sin(\omega_d t)$

ii) $x(0\ \text{s}) = \hat{x} \sin(\varphi) = x_0$

$\dot{x}(0\ \text{s}) = \hat{x}(-\delta \sin(\varphi) + \omega_d \cos(\varphi)) = 0\ \text{m/s}$

$\Rightarrow \varphi = \arctan\left(\frac{\omega_d}{\delta}\right), \ \hat{x} = x_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{\omega_d}\right)^2}$

$\Rightarrow x(t) = x_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\delta}{\omega_d}\right)^2} e^{-\delta t} \sin\left(\omega_d t + \arctan\left(\frac{\omega_d}{\delta}\right)\right)$

2.4 (siehe nächste Seite)

2.4 a) Die Richtung der Kraft $\vec{F}_F$ hängt vom Ort $\vec{x}$ des Schwingkörpers ab.

Schwingung in x-Richtung: $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Fälle:
- $x = 0$ (Nulldurchgänge): $\vec{F}_F = \vec{0}$
- $x > 0$: $\vec{F}_F$ zeigt nach links
- $x < 0$: $\vec{F}_F$ zeigt nach rechts

b) $\vec{F}_F = \dot{\vec{p}}$

c) $\vec{F}_F = \begin{pmatrix} F_F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \dot{\vec{p}} = \begin{pmatrix} \dot{p} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow F_F = \dot{p}$

d) $F_F = - D \cdot x$ $\quad \dot{p} = m \cdot a$

$\Rightarrow - D \cdot x = m \cdot a$

e) $- D \cdot x = m \cdot \ddot{x}$ Differentialgleichung für die unbekannte Funktion x

f) …

$x(t) = \hat{x} \sin(\omega_0 t + \varphi)$

wobei: $\omega_0 := \sqrt{\frac{D}{m}}$

g) i) $x(0\text{ s}) = \hat{x} \sin(\varphi) = 0\text{ m}$

$\dot{x}(0\text{ s}) = \hat{x}\, \omega_0 \cos(\varphi) = v_0$

$\Rightarrow \varphi = 0,\ \hat{x} = \frac{v_0}{\omega_0}$

$\Rightarrow x(t) = \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$

ii) $x(0\text{ s}) = \hat{x} \sin(\varphi) = x_0$

$\dot{x}(0\text{ s}) = \hat{x}\, \omega_0 \cos(\varphi) = 0\text{ m/s}$

$\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2},\ \hat{x} = x_0$

$\Rightarrow x(t) = x_0 \sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right)$

2.5 a) $\hat{x} = 0.20\text{ m}$

$\varphi = \frac{\pi}{2}$

b) Periode $T_d = 1.0\text{ s}$

$\Rightarrow$ Kreisfrequenz $\omega_d = \frac{2\pi}{T_d} = 6.3\text{ s}^{-1}$