

Aufgaben 5 Elektromagnetische Wellen Elektromagnetische Welle, Wellengleichung, Doppler-Effekt

Lernziele

- sich aus dem Studium eines schriftlichen Dokumentes neue Kenntnisse und Fähigkeiten erarbeiten können.
- einen bekannten oder neuen Sachverhalt analysieren und beurteilen können.
- eine neue Problemstellung selbstständig bearbeiten können.
- die allgemeine Form einer eindimensionalen Wellenfunktion kennen und verstehen.
- die eindimensionale Wellengleichung kennen und verstehen.
- wissen und verstehen, was eine elektromagnetische Welle ist.
- den Träger einer elektromagnetischen Welle kennen.
- wissen, wie eine elektromagnetische Welle erzeugt werden kann.
- wissen, dass elektromagnetische Wellen Transversalwellen sind.
- die gegenseitige Lage des elektrischen und des magnetischen Feldstärkevektors in einer elektromagnetischen Welle kennen.
- die Richtungen des elektrischen und des magnetischen Feldstärkevektors bezüglich der Ausbreitungsrichtung einer elektromagnetischen Welle kennen.
- die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer elektromagnetischen Welle im Vakuum kennen.
- einen Überblick über das Frequenzspektrum der elektromagnetischen Wellen haben.
- die mathematische Beschreibung einer sinusförmigen ebenen elektromagnetischen Welle kennen.
- den Doppler-Effekt verstehen.
- die Zusammenhänge zwischen gesendeter und wahrgenommener Frequenz beim Doppler-Effekt verstehen und anwenden können.
- den Unterschied zwischen dem Doppler-Effekt bei mechanischen Wellen und dem Doppler-Effekt bei elektromagnetischen Wellen kennen und verstehen.

Aufgaben

Elektromagnetische Welle, Wellengleichung

- 5.1 Studieren Sie im Lehrbuch KPK 3 den folgenden Abschnitt:
- 4.7 Elektromagnetische Wellen (Seite 32)

Hinweis:

- Der in der Formel (4.5) vorkommende und in der Abb. 4.21 skizzierte magnetische Feldvektor \vec{H} unterscheidet sich im Vakuum vom Feldvektor \vec{B} , den Sie aus der Physik 2 kennen, nur durch den Faktor μ_0 (magnetische Feldkonstante): $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$.

- 5.2 Studieren Sie im Lehrbuch Tipler/Mosca den folgenden Abschnitt:
- 12.2 Periodische Wellen, harmonische Wellen (nur den Teil „Elektromagnetische Wellen“, Seiten 479 und 480)

- 5.3 Die folgende Funktion y beschreibt eine eindimensionale harmonische Welle, welche sich in die positive x -Richtung fortbewegt:

$$y(x,t) = \hat{y} \sin(kx - \omega t + \varphi)$$

- a) Zeigen Sie, dass die Funktion y die folgende Form aufweist:

$$y(x,t) = f(z) = f(x - vt) \quad (z := x - vt)$$

Hinweise :

- Klammern Sie im Argument der Sinus-Funktion den Faktor k aus.
- Überlegen Sie sich, wie die Grössen k , ω und v zusammenhängen.

- b) (siehe nächste Seite)

- b) Zeigen Sie, dass die Funktion y die folgende partielle Differentialgleichung, die sogenannte Wellengleichung, erfüllt:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t)$$

- 5.4 Zeigen Sie, dass jede Funktion y der Form

$$y(x,t) = f(z) = f(x - vt) \quad (z := x - vt)$$

die folgende partielle Differentialgleichung, die sogenannte Wellengleichung, erfüllt:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t)$$

Hinweis:

- Beim Ableiten der Funktion y benötigt man die Kettenregel:

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x,t) = \frac{df}{dz}(z) \cdot \frac{\partial z}{\partial x}(x,t) = \dots$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,t) = \frac{df}{dz}(z) \cdot \frac{\partial z}{\partial t}(x,t) = \dots$$

- 5.5 Im Vakuum (d.h. ohne Materie in den Feldern) folgen aus den Maxwell-Gleichungen für die elektrische Feldstärke \vec{E} und die magnetische Feldstärke \vec{B} (auch „magnetische Flussdichte“ genannt) im eindimensionalen Fall die folgenden Wellengleichungen (ohne Herleitung, vgl. Unterricht):

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} \quad \frac{\partial^2 B}{\partial x^2} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} \quad (*)$$

Überprüfen Sie, dass die folgenden Funktionen, die eine sinusförmige elektromagnetische Welle beschreiben, die Wellengleichungen (*) erfüllen, falls $v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$

$$E(x,t) = \hat{E} \sin(kx - \omega t + \varphi)$$

$$B(x,t) = \hat{B} \sin(kx - \omega t + \varphi)$$

- 5.6 Beurteilen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie das entsprechende Kästchen an.

	wahr	falsch
a) Eine elektromagnetische Welle hat keinen Wellenträger.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
b) Die Wellengleichung ist eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
c) Bei einer elektromagnetischen Welle schwingen die elektrischen und magnetischen Feldvektoren immer senkrecht zueinander.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
d) Ein Indiz dafür, dass Licht eine elektromagnetische Welle ist, ist die Tatsache, dass sich eine elektromagnetische Welle im Vakuum mit der gleichen Geschwindigkeit ausbreitet wie Licht.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
e) Eine elektromagnetische Welle der Wellenlänge 500 μm ist eine Lichtwelle im sichtbaren Bereich.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Doppler-Effekt

- 5.7 Studieren Sie die folgenden **YouTube-Videos**:

- [Doppler-Effekt: Martinshorn](#)

- [Doppler-Effekt: Wellenwanne](#)

- 5.8 Studieren Sie das folgende **Applet**:
- [Doppler-Effekt](#)
- 5.9 An einem ruhenden Beobachter fährt eine pfeifende Lokomotive (1500 Hz) mit einer Geschwindigkeit von 120 km/h vorbei.
Bestimmen Sie die Frequenz des Tones, den der Beobachter ...
- ... vor dem Vorbeifahren der Lokomotive hört.
 - ... nach dem Vorbeifahren der Lokomotive hört.
- 5.10 Bei einem Marschmusikwettbewerb marschieren eine Blaskapelle an einer Jury vorbei.
Wie schnell müssten die Musiker marschieren, damit die Jury-Mitglieder die Musik nach dem Vorbeimarsch um einen halben Ton tiefer hören würden als beim Herannahen der Kapelle?
Hinweis:
- Das Frequenzverhältnis zweier Töne, die sich um einen halben Ton unterscheiden, beträgt 16:15.
- 5.11 Die Hupe eines stehenden Autos besitzt die Frequenz 440 Hz.
Bestimmen Sie die Frequenz, die ein anderer Autofahrer wahrnimmt, wenn er sich mit 100 km/h ...
- ... nähert.
 - ... entfernt.
- 5.12 * **Bewegte Quelle, bewegter Beobachter**
Eine Quelle und ein Beobachter bewegen sich auf einer gemeinsamen Geraden, die Quelle mit der Geschwindigkeit v_Q , der Beobachter mit der Geschwindigkeit v_B .
Die Quelle sendet einen Ton der Frequenz f_Q aus, der Beobachter empfängt einen Ton der Frequenz f_B .
Bestimmen Sie die Beziehung zwischen den beiden Frequenzen f_Q und f_B . Berücksichtigen Sie dabei alle zu unterscheidenden Fälle für die Bewegungsrichtungen von Quelle und Beobachter.
- 5.13 Ein Autofahrer wird von der Polizei angehalten und gebüsst, weil er ein Rotlicht überfahren haben soll. Der Autofahrer wehrt sich: Er behauptet, Grün gesehen zu haben, und führt dies auf den Doppler-Effekt zurück.
Beurteilen Sie die Argumentation des Autofahrers: Bestimmen Sie die Geschwindigkeit, mit welcher ein Autofahrer fahren müsste, um das rote Licht einer Ampel wegen des Dopplereffekt als grünes Licht zu sehen.
- 5.14 Ein Auto fährt geradlinig auf ein Polizei-Radargerät zu.
Das Radargerät sendet eine Radarwelle der Frequenz f in Richtung des Autos aus. Die Welle wird vom Auto reflektiert und gelangt wieder zum Radargerät zurück. Das Radargerät registriert die Frequenz f_R der reflektierten Welle und vergleicht sie mit der Frequenz f der ausgesendeten Welle.
Bestimmen Sie aus den Frequenzen f und f_R die Geschwindigkeit v des Autos.
- 5.15 Betrachten Sie noch einmal die Aufgabe 5.14. Jemand realisiert nicht, dass es sich bei den Radarwellen um elektromagnetische Wellen handelt, und verwendet die Formeln für den Doppler-Effekt bei mechanischen Wellen.
- Bestimmen Sie die Geschwindigkeit v , die sich aus dieser falschen Betrachtung aus den Frequenzen f und f_R ergibt.
 - Vergleichen Sie die Ergebnisse aus 5.14 und 5.15 a).

5.16 Beurteilen Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.
Kreuzen Sie das entsprechende Kästchen an.

	wahr	falsch
a) Der Doppler-Effekt tritt sowohl bei Schallwellen als auch bei elektromagnetischen Wellen auf.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
b) Beim Doppler-Effekt von Schallwellen kommt es nur auf die Relativgeschwindigkeit zwischen Quelle und Beobachter an.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
c) Beim Doppler-Effekt von elektromagnetischen Wellen kommt es auf die Geschwindigkeiten der Quelle und des Beobachters relativ zum Wellenträger an.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
d) Bewegen sich Quelle und Beobachter einer elektromagnetischen Welle aufeinander zu, dann registriert der Beobachter eine Welle grösserer Wellenlänge, als wenn sie sich voneinander entfernen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
e) Der Doppler-Effekt ist bei Schallwellen schwächer ausgeprägt als bei optischen Wellen, weil die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Schallwellen viel kleiner ist als jene optischer Wellen.	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Lösungen

5.1 ...

5.2 ...

5.3 ...

$$\begin{aligned}
 5.4 \quad \frac{\partial y}{\partial x}(x,t) &= \frac{df}{dz}(z) \cdot \frac{\partial z}{\partial x}(x,t) = \frac{df}{dz}(z) \cdot 1 = \frac{df}{dz}(z) \\
 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{df}{dz}(z) = \frac{d}{dz} \frac{df}{dz}(z) \cdot \frac{\partial z}{\partial x}(x,t) = \frac{d^2 f}{dz^2}(z) \cdot 1 = \frac{d^2 f}{dz^2}(z) \\
 \frac{\partial y}{\partial t}(x,t) &= \frac{df}{dz}(z) \cdot \frac{\partial z}{\partial t}(x,t) = \frac{df}{dz}(z) \cdot (-v) = -v \cdot \frac{df}{dz}(z) \\
 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(-v \cdot \frac{df}{dz}(z) \right) = -v \cdot \frac{\partial}{\partial t} \frac{df}{dz}(z) = -v \cdot \frac{d}{dz} \frac{df}{dz}(z) \cdot \frac{\partial z}{\partial t}(x,t) = -v \cdot \frac{d^2 f}{dz^2}(z) \cdot (-v) = v^2 \frac{d^2 f}{dz^2}(z) \\
 \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) &= \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5.5 \quad \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} &= -k^2 \hat{E} \sin(kx - \omega t + \varphi) \\
 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} &= -\omega^2 \hat{E} \sin(kx - \omega t + \varphi) \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

- 5.6 a) falsch
 b) wahr
 c) wahr
 d) wahr
 e) falsch

5.7 ...

5.8 ...

- 5.9 a) vor dem Vorbeifahren
 $f_B = \frac{f_Q}{1 - \frac{v}{c}} \approx 1660 \text{ Hz}$ (Annahme: $c = 340 \text{ m/s}$)
 b) nach dem Vorbeifahren
 $f_B = \frac{f_Q}{1 + \frac{v}{c}} \approx 1370 \text{ Hz}$ (Annahme: $c = 340 \text{ m/s}$)

5.10 (siehe nächste Seite)

5.10 $\frac{f_{B1}}{f_{B2}} = k$
 $f_{B1} = \frac{f_Q}{1 - \frac{v}{c}}$ $c = \text{Schallgeschwindigkeit}$
 $f_{B2} = \frac{f_Q}{1 + \frac{v}{c}}$

 $\Rightarrow v = \frac{k-1}{k+1} c = 11 \text{ m/s} = 39 \text{ km/h}$ (Annahme: $c = 340 \text{ m/s}$)
 Dies liegt über dem 100-m-Weltrekord!

5.11 a) beim sich Nähern
 $f_B = f_Q \left(1 + \frac{v}{c}\right) = 476 \text{ Hz}$ (Annahme: $c = 340 \text{ m/s}$)

b) beim sich Entfernen
 $f_B = f_Q \left(1 - \frac{v}{c}\right) = 404 \text{ Hz}$ (Annahme: $c = 340 \text{ m/s}$)

5.12 * a) Quelle und Beobachter bewegen sich in entgegengesetzten Richtungen aufeinander zu.

$$f_B = f_Q \frac{c + v_B}{c - v_Q}$$

b) Quelle und Beobachter bewegen sich in entgegengesetzten Richtungen voneinander weg.

$$f_B = f_Q \frac{c - v_B}{c + v_Q}$$

c) Der Beobachter bewegt sich hinter der Quelle her.

$$f_B = f_Q \frac{c + v_B}{c + v_Q}$$

Bemerkung: $f_B = f_Q$, falls $v_B = v_Q$

d) Die Quelle bewegt sich hinter dem Beobachter her.

$$f_B = f_Q \frac{c - v_B}{c - v_Q}$$

Bemerkung: $f_B = f_Q$, falls $v_B = v_Q$

5.13 $v = \frac{1 - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2}{1 + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2} c = 4.90 \cdot 10^7 \text{ m/s} = 1.76 \cdot 10^8 \text{ km/h}$

Annahmen: $\lambda_1 = \lambda_{\text{grün}} = 530 \text{ nm}$, $\lambda_2 = \lambda_{\text{rot}} = 625 \text{ nm}$

(vgl. Lehrbuch Tipler/Mosca, Übung 31.2, Seite 1147)

5.14 Hinlaufende Radarwelle: Radargerät \rightarrow Auto
 - Das Radargerät sendet eine Radarwelle der Frequenz f aus.
 - Das Auto empfängt eine Welle der Frequenz f_1 .

Reflektierte Radarwelle: Auto \rightarrow Radargerät
 - Das Auto reflektiert eine Welle der Frequenz f_1 .
 - Das Radargerät empfängt eine Welle der Frequenz f_R .

$$f_1 = \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} f \quad c = \text{Ausbreitungsgeschwindigkeit der Radarwelle}$$

$$f_R = \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} f_1$$

 $\Rightarrow v = \frac{f_R - f}{f_R + f} c$

- 5.15 a) Hinlaufende Radarwelle: Radargerät \rightarrow Auto
- Das Radargerät sendet eine Radarwelle der Frequenz f aus (ruhende Quelle).
- Das Auto empfängt eine Welle der Frequenz f_1 (bewegter Beobachter).
Reflektierte Radarwelle: Auto \rightarrow Radargerät
- Das Auto reflektiert eine Welle der Frequenz f_1 (bewegte Quelle).
- Das Radargerät empfängt eine Welle der Frequenz f_R (ruhender Beobachter).

$$f_1 = f \left(1 + \frac{v}{c} \right) \quad c = \text{Ausbreitungsgeschwindigkeit der Radarwelle}$$
$$f_R = \frac{f_1}{1 - \frac{v}{c}}$$

$$\Rightarrow v = \frac{f_R - f}{f_R + f} c$$

- b) Die Ergebnisse für v und f_R sind zufälligerweise gleich. Die Ergebnisse für f_1 sind jedoch verschieden.
- 5.16 a) wahr
b) falsch
c) falsch
d) falsch
e) falsch