

## Aufgaben 3                      Schwingungen Erzwungene Schwingung, Resonanz

### Lernziele

- sich aus dem Studium eines schriftlichen Dokumentes neue Kenntnisse und Fähigkeiten erarbeiten können.
- verstehen, was eine erzwungene Schwingung ist.
- wissen und verstehen, was die Eigenfrequenz eines Schwingers, ein Erreger und die Erregerfrequenz sind.
- wissen und verstehen, dass bei einer erzwungenen Schwingung die im zeitlichen Mittel vom Erreger zum Schwinger fließende Energie im Dämpfer dissipiert wird.
- wissen, von welchen Grössen die Energie abhängt, die bei einer erzwungenen Schwingung im Dämpfer im zeitlichen Mittel dissipiert wird.
- wissen, dass eine erzwungene Schwingung einen Einschwingvorgang durchläuft.
- aus einem grafisch dargestellten zeitlichen Verlauf einer Schwingungsgrösse den Einschwingvorgang und die stationäre Phase einer erzwungenen Schwingung erkennen können.
- wissen, dass bei einer sinusförmig angeregten erzwungenen Schwingung die Frequenz in der stationären Phase gleich gross ist wie die Erregerfrequenz.
- das mathematische Modell zur Beschreibung einer erzwungenen mechanischen Schwingung kennen und verstehen.
- das Phänomen Resonanz kennen und verstehen.
- wissen und verstehen, was eine Resonanzkurve ist.
- den qualitativen Verlauf einer Resonanzkurve kennen und verstehen.
- wissen und verstehen, dass bei Resonanz der zeitlich gemittelte Energiestrom vom Erreger zum Schwinger maximal ist.
- wissen und verstehen, von welchen Grössen die Resonanzfrequenz abhängt.

### Aufgaben

- 3.1        Studieren Sie im Buch KPK 3 die folgenden Abschnitte:
- 2.1 Was ist Resonanz? (Seite 14)
  - 2.2 Resonanz eines mechanischen Schwingers (Seite 15)
  - 2.3 Wie man eine Resonanzkurve aufnimmt (Seite 16)

- 3.2        a)        Studieren Sie das folgende **YouTube-Video**:
- [Fedependel](#)

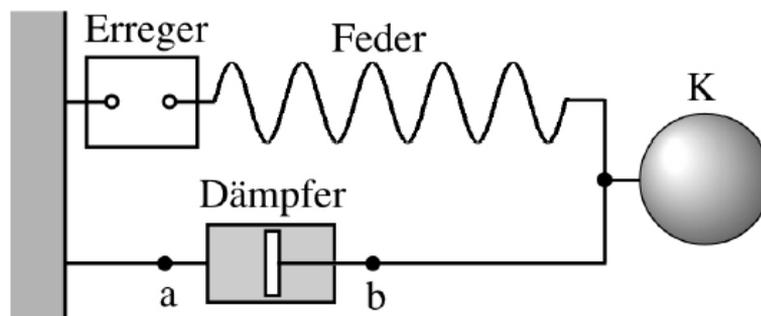
- b)        Studieren Sie das folgende **Applet**:
- [Erzwungene Schwingung, Resonanz](#)

Hinweise:

- Wählen Sie die Einstellung „Diagramm Elongation“.
- Beobachten Sie den sogenannten Einschwingvorgang.
- Beobachten Sie, dass der Schwingkörper im eingeschwungenen Zustand mit der Erregerfrequenz schwingt.
- Beobachten Sie, dass die Ortsamplitude der Schwingung im eingeschwungenen Zustand von der Erregerfrequenz abhängt.

- 3.3        (siehe nächste Seite)

3.3 Betrachten Sie die erzwungene Schwingung eines Federschwingers (Lehrbuch KPK 3, Abb. 2.3, Seite 15):



Das Koordinatensystem soll wie folgt festgelegt werden:

- Die Schwingung soll in x-Richtung erfolgen.
- Die positive x-Richtung soll nach rechts zeigen.
- Die Ruhelage soll bei  $x = 0$  liegen.

Am Schwingkörper greifen zwei Kräfte an, die Federkraft  $\vec{F}_F$  (Kraft, die die Feder ausübt) und die Dämpfungskraft  $\vec{F}_D$  (Kraft, die der Dämpfer ausübt) (siehe Unterricht).

- a) Formulieren Sie für den Schwingkörper das Aktionsprinzip in allgemeiner vektorieller Form.
- b) Formulieren Sie für den Schwingkörper die skalare x-Komponente des Aktionsprinzips.

Die drei Größen in der in b) formulierten Gleichung hängen vom Ort  $x$ , der Geschwindigkeit  $v$ , der Beschleunigung  $a$  des Schwingkörpers sowie vom Ort  $x_E$  des Erregers ab.  $x$ ,  $v$ ,  $a$  und  $x_E$  sind dabei jeweils die skalaren x-Komponenten der entsprechenden Vektoren.

- c) Geben Sie an, wie die drei Größen von  $x$ ,  $v$ ,  $a$  und  $x_E$  abhängen, und setzen Sie die Ausdrücke in das Ergebnis von b) ein.

Unter der Annahme, dass der zeitliche Verlauf des Ortes  $x_E$  des Erregers bzw. des linken Federendes sinusförmig ist, d.h.

$$x_E = x_E(t) = \hat{x}_E \sin(\omega_E t)$$

lautet der zeitliche Verlauf des Ortes  $x$  des Schwingkörpers bei schwacher Dämpfung wie folgt (siehe Unterricht):

$$x = x(t) = C_1 e^{-\delta t} \sin(\omega_d t + C_2) + \hat{x} \sin(\omega_E t + \varphi)$$

$$\text{wobei: } \delta := \frac{k}{2m}$$

$$\omega_0 := \sqrt{\frac{D}{m}}$$

$$\omega_d := \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad (\delta < \omega_0, \text{ schwache Dämpfung})$$

Im eingeschwungenen bzw. stationären Zustand, d.h. für  $t \rightarrow \infty$ , gilt:

$$x = x(t) = \hat{x} \sin(\omega_E t + \varphi)$$

Dabei gilt für die Amplitude  $\hat{x}$ :

$$\hat{x} = \hat{x}(\omega_E) = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + 4\delta^2 \omega_E^2}} \hat{x}_E$$

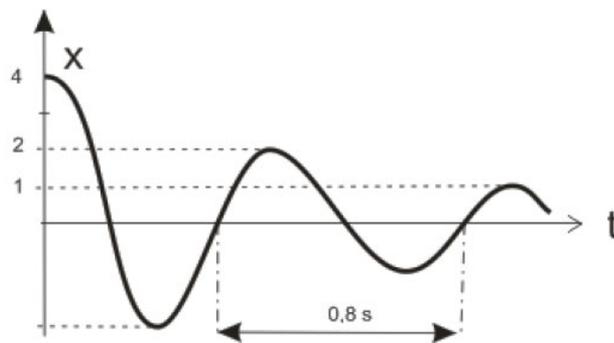
- d) Überprüfen Sie, dass im eingeschwungenen Zustand die Ortsamplitude  $\hat{x}$  maximal ist für

$$\omega_E = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

- e) Bestimmen Sie für den eingeschwungenen Zustand den zeitlichen Verlauf der Geschwindigkeit  $v = v(t)$  des Schwingkörpers sowie die dazugehörige Geschwindigkeitsamplitude  $\hat{v}$ .

- f) Überprüfen Sie, dass im eingeschwungenen Zustand die Geschwindigkeitsamplitude  $\hat{v}$  maximal ist für  $\omega_E = \omega_0$

- 3.4 Erfährt ein schwingungsfähiges Bauteil in einem mechanischen Aufbau einen Schlag, führt es eine gedämpfte Schwingung aus. Der zeitliche Verlauf des Ausschlags  $x$  sieht wie folgt aus:



Die in der Grafik angegebenen Grössen sollen auf zwei signifikante Stellen genau angenommen werden, also  $0.8 = 0.80$ ,  $1 = 1.0$ ,  $2 = 2.0$ ,  $4 = 4.0$ .

- a) Bestimmen Sie ...
- ... die Kreisfrequenz  $\omega_d$  der gedämpften Schwingung.
  - ... die Dämpfungskonstante  $\delta$ .

Hinweis:

- Die Zeitpunkte, zu welchen der Sinusterm  $\sin(\omega_d t + \dots)$  im Ausdruck  $x(t) = \dots$  jeweils den Wert 1 annimmt, liegen  $0.8$  s auseinander.

Wird das Bauteil von aussen mit der Frequenz  $\omega_E$  angeregt, ergibt sich eine erzwungene Schwingung.

- b) Bestimmen Sie die Frequenz  $\omega_E$ , bei welcher ...
- ... die Geschwindigkeitsamplitude  $\hat{v}$  der erzwungenen Schwingung maximal ist.
  - ... die Ortsamplitude  $\hat{x}$  der erzwungenen Schwingung maximal ist.

**Lösungen**

3.1 ...

3.2 ...

3.3 a)  $\vec{F}_F + \vec{F}_D = \dot{\vec{p}}$

b)  $\vec{F}_F = \begin{pmatrix} F_F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{F}_D = \begin{pmatrix} F_D \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dot{\vec{p}} = \begin{pmatrix} \dot{p} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow F_F + F_D = \dot{p}$

c)  $F_F = -D \cdot (x - x_E) \quad F_D = -k \cdot v \quad \dot{p} = m \cdot a$   
 $\Rightarrow -D \cdot (x - x_E) - k \cdot v = m \cdot a$

d) ...

Hinweise:

- Es genügt zu zeigen, dass der Ausdruck unter der Wurzel minimal ist.
- Der Ausdruck unter der Wurzel ist eine quadratische Funktion in  $z := \omega_E^2$ .
- Das Maximum bzw. Minimum einer quadratischen Funktion liegt an der Stelle des Scheitelpunktes des Funktionsgraphen.

e)  $v = v(t) = \hat{x} \omega_E \cos(\omega_E t + \varphi)$

$$\hat{v} = \hat{v}(\omega_E) = \hat{x} \omega_E = \frac{\omega_0^2 \omega_E}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + 4\delta^2 \omega_E^2}} \hat{x}_E$$

f) ...

Hinweis:

- Bestimmen Sie mit Hilfe der Differentialrechnung das absolute bzw. globale Maximum der Funktion  $\hat{v} = \hat{v}(\omega_E)$ .

3.4 a) i)  $\omega_d = \frac{2\pi}{T_d} = \frac{2\pi}{0.80 \text{ s}} = 7.9 \text{ s}^{-1}$

ii)  $\frac{e^{-\delta(t+T_d)}}{e^{-\delta t}} = e^{-\delta T_d} = 0.50$

$\Rightarrow \delta = -\frac{\ln(0.50)}{T_d} = -\frac{\ln(0.50)}{0.80 \text{ s}} = 0.87 \text{ s}^{-1}$

b) i)  $\omega_E = \omega_0$

$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

$\Rightarrow \omega_E = \sqrt{\omega_d^2 + \delta^2} = \dots \text{ (Zahlenwerte aus a)} = 7.9 \text{ s}^{-1}$

ii)  $\omega_E = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$

$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

$\Rightarrow \omega_E = \sqrt{\omega_d^2 - \delta^2} = \dots \text{ (Zahlenwerte aus a)} = 7.8 \text{ s}^{-1}$