Aufgaben 2 Schwingungen
Drehschwingungen, Dämpfung

Lernziele

- sich aus dem Studium eines schriftlichen Dokumentes neue Kenntnisse und Fähigkeiten erarbeiten können.
- die Analogie zwischen einer Drehschwingung und einer linearen Schwingung kennen und verstehen.
- wissen und verstehen, welche Grössen und mit welcher Gesetzmässigkeit diese Grössen die Periodendauer einer Drehschwingung beeinflussen.
- verstehen, wie eine Schwingung gedämpft werden kann.
- verstehen, wie ein mechanischer Dämpfer funktioniert.
- verstehen, dass alle natürlich ablaufenden Schwingungen gedämpft sind.
- wissen, wie die Stärke der Dämpfung die Bewegung eines Schwingers beeinflusst.
- die bei einer mechanischen, gedämpften Schwingung auftretenden Impuls- und Energieflüsse verstehen.
- aus einem Experiment neue Erkenntnisse gewinnen können.
- einen neuen Sachverhalt analysieren und beurteilen können.

Aufgaben

2.1 Studieren Sie im Buch KPK 3 die folgenden Abschnitte:
- 1.8 Drehschwingungen: Hin- und herfliessender Drehimpuls (Seite 16)
- 1.10 Dämpfung von Schwingungen (Seiten 18 bis 21)

2.2 **Experiment Posten 1: Drehhantel** (15 min)

Eine gut gelagerte vertikale Achse ist mit dem inneren, frei beweglichen Ende einer Spiralfeder verbunden. Das äussere Ende der Spiralfeder ist fest montiert.

Auf die vertikale Achse ist eine Hantel (Stange mit zwei Gewichtsstücken) montiert. Wird die Hantel horizontal ausgelenkt und losgelassen, führt sie (zusammen mit der vertikalen Achse) eine Drehschwingung aus.

Das Trägheitsmoment der Hantel kann verändert werden, indem der Abstand der Gewichtsstücke von der Drehachse variiert wird bzw. indem die Gewichtsstücke ganz abmontiert werden.

Untersuchen Sie, ob und allenfalls wie die Periode T der Drehschwingung ...

a) ... von der Amplitude $\hat{\alpha}$ des Auslenkwinkels α abhängt.

b) ... vom Trägheitsmoment J des schwingenden Körpers abhängt.

Es genügt, wenn Sie die Abhängigkeiten qualitativ angeben, d.h. in der Form "Je grösser ..., desto grösser bzw. kleiner ... ."

2.3 **Experiment Posten 2: Drehpendel** (15 min)

Wird das Drehpendel von Hand etwas aus der Ruhelage ausgelenkt und losgelassen, so führt es eine Drehschwingung aus.

Am Fusse des Drehpendels sind seitlich zum Pendelkörper zwei Spulen angebracht. Fliesst elektrische Ladung durch die Spulen, wird im Pendelkörper ein Wirbelstrom induziert (Wirbelstrombremse). Auf diese Weise kann die Drehschwingung des Pendels gedämpft werden. Die Stärke der Dämpfung kann über die Stärke des elektrischen Ladungsstromes variiert werden.

Beobachten Sie Drehschwingungen für verschiedene Dämpfungsstärken:

a) Versuchen Sie, die im Buch KPK 3, Abb. 1.31, Seite 19, dargestellten Fälle nachzustellen.

b) Messen Sie für drei verschiedene kleine Dämpfungsstärken, d.h. für Fälle, wo es sich bei der Pedelbewegung noch um eine Schwingung handelt, die Periodendauer der Drehschwingung.

Beurteilen Sie, ob und allenfalls wie die Periodendauer von der Stärke der Dämpfung abhängt.

Hinweis:
- Beachten Sie die maximal zulässige elektrische Ladungsstromstärke für die Wirbelstrombremse (siehe Angaben auf dem Sockel des Drehpendels).

2.4 In dieser Aufgabe sollen Sie die Differentialgleichung für die gedämpfte Schwingung eines Federschwingers herleiten und die im Unterricht erwähnte Lösung der Differentialgleichung nachprüfen.

Betrachten Sie also noch einmal den gedämpften Federschwinger (Buch KPK 3, Abb. 1.28, Seite 18).

a) Am Schwingkörper greifen zwei Kräfte an, die Federkraft $\vec{F}_F$ (Kraft, die die Feder ausübt) und die Dämpfungskraft $\vec{F}_D$ (Kraft, die der Dämpfer ausübt).

Skizzieren Sie den Federschwinger.
Zeichnen Sie die beiden Kräfte $\vec{F}_F$ und $\vec{F}_D$ ein. Berücksichtigen Sie dabei alle möglichen Fälle für die Richtungen der beiden Kräfte.

b) Formulieren Sie für den Schwingkörper das Grundgesetz der Mechanik in allgemeiner vektorieller Form.

c) Die Bewegung des Federschwingers ist eindimensional. Es genügt daher, von allen vektoriellen Grössen nur die Komponente in Bewegungsrichtung zu betrachten.
Wir legen nun das Koordinatensystem so fest, dass die Schwingung in x-Richtung erfolgt.

Formulieren Sie für den Schwingkörper die skalare x-Komponente des Grundgesetzes der Mechanik.

d) Die im Grundgesetz auftretenden Grössen sind abhängig vom Ort x, der Geschwindigkeit v und der Beschleunigung a des Schwingkörpers. x, v und a sind dabei jeweils die x-Komponenten des Orts-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungsvektors.

Geben Sie die Abhängigkeiten der im Grundgesetz auftretenden Grössen von x, v und a an, und setzen Sie die Ausdrücke in das Grundgesetz ein.

e) Setzen Sie in die Gleichung, die Sie in d) formuliert haben, die folgenden Beziehungen für die Geschwindigkeit v und die Beschleunigung a ein:

$$v = \dot{x}$$
$$a = \dot{v} = \ddot{x}$$

Sie erhalten dann eine sogenannte Differentialgleichung für die unbekannte Funktion

$$x: \ \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \longmapsto x = x(t)$$

f) Überprüfen Sie, dass die Funktion mit der folgenden Funktionsgleichung die in e) hergeleitete Differentialgleichung löst (vgl. Unterricht):

$$x(t) = \hat{x}\, e^{-\delta t} \sin(\omega_d t + \varphi)$$

wobei: $\delta := \frac{k}{2m}$

$$\omega_0 := \sqrt{\frac{D}{m}}$$

$$\omega_d := \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$$

g) Die in f) angegebene Lösung x(t) = … der Differentialgleichung ist die sogenannte allgemeine Lösung. Sie enthält noch die beiden freien Parameter $\hat{x}$ ($\hat{x} \in \mathbb{R}^+$) und φ ($0 \le \varphi < 2\pi$).

Bestimmen Sie $\hat{x}$ und φ, so dass die folgenden Anfangsbedingungen erfüllt sind:

i) $x(0\text{ s}) = 0\text{ m}$ und $\dot{x}(0\text{ s}) = v_0 > 0\text{ m/s}$

ii) $x(0\text{ s}) = x_0 > 0\text{ m}$ und $\dot{x}(0\text{ s}) = 0\text{ m/s}$

2.5 Bearbeiten Sie die Aufgabe 2.4 a) bis g) für den Fall ohne Dämpfung (k = 0 Ns/m).

Lösungen

2.1 ...

2.2 a) T unabhängig von $\hat{\alpha}$

b) T abhängig von J
Je grösser J, desto grösser T $\left(\text{genau: } T \sim \sqrt{J}\right)$

2.3 a) ...

b) Je stärker die Dämpfung ist, desto grösser ist T.

2.4 a) ...

b) $\vec{F}_F + \vec{F}_D = \dot{\vec{p}}$

c) $\vec{F}_F = \begin{pmatrix} F_F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{F}_D = \begin{pmatrix} F_D \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dot{\vec{p}} = \begin{pmatrix} \dot{p} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow \; F_F + F_D = \dot{p}$

d) $F_F = -D \cdot x \quad F_D = -k \cdot v \quad \dot{p} = m \cdot a$
$\Rightarrow \; -D \cdot x - k \cdot v = m \cdot a$

e) $-D \cdot x - k \cdot \dot{x} = m \cdot \ddot{x}$

f) ... (Funktion x(t) = ... in Differentialgleichung einsetzen)

g) i) $x(0\text{ s}) = \hat{x}\sin(\varphi) = 0\text{ m}$
$\dot{x}(0\text{ s}) = \hat{x}(-\delta\sin(\varphi) + \omega_d\cos(\varphi)) = v_0$

$\Rightarrow \; \varphi = 0, \; \hat{x} = \frac{v_0}{\omega_d}$
$\Rightarrow \; x(t) = \frac{v_0}{\omega_d} e^{-\delta t} \sin(\omega_d t)$

ii) $x(0\text{ s}) = \hat{x}\sin(\varphi) = x_0$
$\dot{x}(0\text{ s}) = \hat{x}(-\delta\sin(\varphi) + \omega_d\cos(\varphi)) = 0\text{ m/s}$

$\Rightarrow \; \varphi = \arctan\left(\frac{\omega_d}{\delta}\right), \; \hat{x} = x_0\sqrt{1+\left(\frac{\delta}{\omega_d}\right)^2}$
$\Rightarrow \; x(t) = x_0\sqrt{1+\left(\frac{\delta}{\omega_d}\right)^2}\, e^{-\delta t} \sin\left(\omega_d t + \arctan\left(\frac{\omega_d}{\delta}\right)\right)$

2.5 a) ...

b) $\vec{F}_F = \dot{\vec{p}}$

c) $\vec{F}_F = \begin{pmatrix} F_F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dot{\vec{p}} = \begin{pmatrix} \dot{p} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
$\Rightarrow \; F_F = \dot{p}$

d) $F_F = -D \cdot x \quad \dot{p} = m \cdot a$
$\Rightarrow \; -D \cdot x = m \cdot a$

e) $-D \cdot x = m \cdot \ddot{x}$

f) $x(t) = \hat{x}\sin(\omega_0 t + \varphi)$
wobei: $\omega_0 := \sqrt{\frac{D}{m}}$

g) (siehe nächste Seite)

g) i) $x(0\text{ s}) = \hat{x}\sin(\varphi) = 0\text{ m}$
$\dot{x}(0\text{ s}) = \hat{x}\,\omega_0\cos(\varphi) = v_0$

$\Rightarrow\ \varphi = 0,\ \hat{x} = \frac{v_0}{\omega_0}$

$\Rightarrow\ x(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$

ii) $x(0\text{ s}) = \hat{x}\sin(\varphi) = x_0$
$\dot{x}(0\text{ s}) = \hat{x}\,\omega_0\cos(\varphi) = 0\text{ m/s}$

$\Rightarrow\ \varphi = \frac{\pi}{2},\ \hat{x} = x_0$

$\Rightarrow\ x(t) = x_0\sin\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right)$