Aufgaben 14 Spektren
Spektrum, Mehrfachschwinger, Eigenschwingungen

Lernziele

- sich aus dem Studium eines schriftlichen Dokumentes neue Kenntnisse erarbeiten können.
- einen neuen Sachverhalt analysieren und beurteilen können.
- wissen und verstehen, dass eine Summe von Sinusfunktionen gleicher Frequenz eine Sinusfunktion dieser gleichen Frequenz ist.
- wissen und verstehen, dass sich eine periodische Funktion darstellen lässt als Summe von Sinusfunktionen, deren Frequenzen ganzzahlige Vielfache der Frequenz der periodischen Funktion sind.
- wissen und verstehen, was eine Zeitfunktion, eine Spektralfunktion, ein Spektrum ist.
- wissen und verstehen, was ein Doppelschwinger, ein Mehrfachschwinger ist.
- wissen und verstehen, was eine Eigenschwingung, eine Eigenfrequenz eines Doppelschwingers, eines Mehrfachschwingers ist.
- das Spektrum eines Doppelschwingers, eines Mehrfachschwingers kennen und verstehen.
- wissen, dass ein N-fachschwinger N verschiedene Eigenfrequenzen hat und N verschiedene Eigenschwingungen ausführen kann.
- ein mathematisches Modell zur Beschreibung der Schwingung eines Mehrfachschwingers aufstellen können.
- die Eigenschwingungen eines Mehrfachschwingers beschreiben und charakterisieren können.
- den Zusammenhang zwischen Trägheit und Elastizität bei einem schwingungsfähigen System verstehen.
- beurteilen können, ob bei einem schwingungsfähigen System Trägheit und Elastizität getrennt sind oder nicht.
- Beispiele von schwingungsfähigen Systemen, bei welchen Trägheit und Elastizität nicht mehr getrennt sind, kennen und deren Eigenschwingungen beschreiben und charakterisieren können.
- wissen, was die Grundschwingung und die Oberschwingungen eines schwingungsfähigen Systems sind.
- bei einem in Resonanz stehenden schwingungsfähigen System erkennen können, welche Eigenschwingung angeregt ist.
- den Zusammenhang zwischen den Eigenfrequenzen bei einem Federseil, bei einem Saiten- oder Blasinstrument kennen.
- die bei der Bewegung eines Systems gekoppelter Pendel auftretenden Impuls- und Energieflüsse kennen und verstehen.
- aus einem Experiment neue Erkenntnisse gewinnen können.
- einem Film relevante Informationen entnehmen können.

Aufgaben

14.1 Studieren Sie im Buch KPK 3 die folgenden Abschnitte:
- 3.1 Einige Ergebnisse aus der Mathematik (Seiten 27 bis 29)
- 3.2 Spektren (Seiten 29 und 30)
- 3.3 Doppelschwinger (Seiten 30 bis 32)
- 3.4 Mehrfachschwinger (Seite 33)
- 3.5 Wenn Trägheit und Elastizität nicht mehr getrennt sind (Seiten 33 bis 35)

14.2 **Experiment Posten 1: Federseil**

Das Federseil ist an einem Ende fest montiert. Nehmen Sie das freie Ende in Ihre Hand, und spannen Sie das Federseil.

a) Regen Sie nun nacheinander durch entsprechend schnelle Auf- und Abbewegungen der Hand mindestens drei verschiedene Eigenschwingungen des Seiles an.

i) Messen und notieren Sie sich die Frequenzen der beobachteten Eigenschwingungen, d.h die Eigenfrequenzen.

ii) Finden Sie eine Beziehung zwischen den Eigenfrequenzen.

b) Beurteilen Sie, ob beim Federseil Trägheit und Elastizität getrennt sind oder nicht (vgl. Buch KPK 3, Abschnitt 3.5, Seiten 33 bis 35)

14.3 **Experiment Posten 2: Gekoppelte Pendel**

Zwei gleiche Pendel sind über einen Faden mit angehängter Masse miteinander gekoppelt.

a) Regen Sie alle möglichen Eigenschwingungen des Systems an.

i) Messen und notieren Sie sich die Frequenzen der beobachteten Eigenschwingungen, d.h. die Eigenfrequenzen.

ii) Beurteilen Sie, inwiefern die einzelnen Eigenfrequenzen von der Stärke der Kopplung abhängen.

Hinweis:
- Die Stärke der Kopplung kann durch eine Höhenverstellung der Kopplungsvorrichtung an den Pendelstangen variiert werden.

b) Regen Sie das System der beiden Pendel wie folgt an:
- Pendel 1: Anfangsauslenkung $\neq 0$, Anfangsgeschwindigkeit = 0
- Pendel 2: Anfangsauslenkung = 0, Anfangsgeschwindigkeit = 0

Beobachten und beschreiben Sie die Impuls- und Energieflüsse zwischen den beiden Pendeln.

c) Beurteilen Sie, ob bei den gekoppelten Pendeln Trägheit und Elastizität getrennt sind oder nicht (vgl. Buch KPK 3, Abschnitt 3.5, Seiten 33 bis 35)

14.4 Betrachten Sie den ungedämpften Doppelschwinger im Buch KPK 3, Abb. 3.6, Seite 31.

Betrachten Sie zunächst den allgemeinen Fall verschiedener Massen (m_1, m_2) der beiden Schwingkörper sowie verschiedener Federkonstanten (D_1, D_{12}, D_2) der drei Federn.

a) Stellen Sie für den Doppelschwinger ein mathematisches Modell im Sinne der Aufgaben 12.4 und 13.4 auf.

i) Überlegen Sie sich, was für Einzelkräfte an den einzelnen Schwingkörpern angreifen.

ii) Formulieren Sie für die einzelnen Schwingkörper das Grundgesetz der Mechanik.

Hinweise:
- Die Länge der Federn sowie die Distanz zwischen den beiden äusseren Federbefestigungen seien so gewählt, dass alle drei Federn entspannt sind, wenn sich die beiden Schwingkörper in ihren Ruhelagen befinden.
- Führen Sie für die beiden Schwingkörper je eine eigene x-Koordinatenachse ein. Wenn x_1 die x-Koordinate des linken Schwingkörpers und x_2 diejenige des rechten ist, dann soll $x_1 = x_2 = 0$ m gelten, wenn sich die beiden Schwingkörper in ihren Ruhelagen befinden.
- Vernachlässigen Sie jegliche Reibung. Der Doppelschwinger soll ja ungedämpft sein.
- Die beiden in ii) zu formulierenden Gleichungen bilden ein System zweier gekoppelter Differentialgleichungen für die unbekannten Funktionen x_1 und x_2. Die Differentialgleichungen heissen gekoppelt, da in beiden Gleichungen sowohl x_1 als auch x_2 vorkommt.

Betrachten Sie nun den Spezialfall, dass beide Massen sowie alle Federkonstanten gleich sind, d.h. $m_1 = m_2 =: m$ sowie $D_1 = D_{12} = D_2 =: D$.

b) Überprüfen Sie für alle in der Aufgabe 14.3 a) gefundenen Eigenschwingungen des Doppelschwingers, dass die entsprechenden Funktionen x_1 und x_2 die in a) ii) gefundenen Differentialgleichungen erfüllen.

Drücken Sie die Eigenkreisfrequenzen durch m und D aus.

14.5 (siehe nächste Seite)

14.5 Am 7. November 1940 wurde die erst kurz zuvor eingeweihte Tacoma Narrows Brücke (siehe Bild) durch Winde derart in Schwingung versetzt, dass sie einstürzte.

Sie haben im Unterricht einen Videofilm über den Einsturz gesehen.

a) Beurteilen Sie schlüssig, ob die Brücke als ein-, zwei- oder dreidimensionaler schwingender Körper zu betrachten ist.

b) Welche Eigenschwingung(en) war(en) angeregt (Grundschwingung, 1. Oberschwingung, ...)?

c) Schätzen Sie die Kräfte eines Taifuns ab.

d) Begründen Sie, warum bei einem Erdbeben kleine Brücken gefährdeter sind als grosse Brücken.

Lösungen

14.1 ...
Lösungen zu den Aufgaben siehe kopierte Blätter (ausser Abschnitt 3.4)

14.2 a) i) ...

ii) Die Eigenfrequenzen sind ganzzahlige Vielfache der Grundfrequenz (Frequenz der Grundschwingung) f_0.

b) Trägheit und Elastizität sind nicht getrennt.

14.3 a) i) Es gibt zwei Eigenschwingungen.

ii) Nur eine der beiden Eigenfrequenzen hängt von der Stärke der Kopplung ab.

b) ...

c) Trägheit und Elastizität sind getrennt.

14.4 a) i) …

ii) Linker Körper: $-D_1 \cdot x_1 + D_{12}\left(x_2 - x_1\right) = m_1 \cdot \ddot{x}_1$
Rechter Körper: $-D_{12}\left(x_2 - x_1\right) - D_2 \cdot x_2 = m_2 \cdot \ddot{x}_2$

b) $m_1 = m_2 =: m$
$D_1 = D_{12} = D_2 =: D$

Linker Körper: $D(-2x_1 + x_2) = m \cdot \ddot{x}_1$
Rechter Körper: $D(x_1 - 2x_2) = m \cdot \ddot{x}_2$

1. Eigenschwingung: $x_1 = x_2$

Linker Körper: $-D \cdot x_1 = m \cdot \ddot{x}_1$
Rechter Körper: $-D \cdot x_2 = m \cdot \ddot{x}_2$

Eigenkreisfrequenz $\omega_1 = \sqrt{\frac{D}{m}}$

2. Eigenschwingung: $x_1 = -x_2$

Linker Körper: $-3D \cdot x_1 = m \cdot \ddot{x}_1$
Rechter Körper: $-3D \cdot x_2 = m \cdot \ddot{x}_2$

Eigenkreisfrequenz $\omega_2 = \sqrt{\frac{3D}{m}} = \sqrt{3}\,\omega_1$

14.5 a) zweidimensional

b) 1. Oberschwingung (Torsion), Grundschwingung (Schwingung in Längsrichtung)

c) ...

d) ...