Aufgaben 4 Translations-Mechanik
Gleichförmige Kreisbewegung, Bezugssystem, Scheinkräfte

Lernziele

- die Grössen zur Beschreibung einer Kreisbewegung und deren Zusammenhänge kennen.
- die Frequenz, Winkelgeschwindigkeit, Bahngeschwindigkeit für eine gleichförmige Kreisbewegung bestimmen können.
- die allgemeinen Zusammenhänge zwischen Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung kennen.
- wissen und verstehen, dass eine gleichförmige Kreisbewegung eine beschleunigte Bewegung ist.
- wissen und verstehen, dass bei einer gleichförmigen Kreisbewegung eines Körpers die Beschleunigung des Körpers und folglich die resultierende Kraft, d.h. die Summe aller auf den Körper wirkenden Kräfte in Richtung des Kreismittelpunktes gerichtet ist.
- bei einer gleichförmigen Kreisbewegung den Zusammenhang zwischen resultierender Kraft, Masse, Winkelgeschwindigkeit und Kreisbahnradius anwenden können.
- Problemstellungen zur gleichförmigen Kreisbewegung bearbeiten können.
- verstehen, was Trägheits- bzw. Scheinkräfte sind.
- wissen und verstehen, dass die Zentrifugalkraft und die Corioliskraft Scheinkräfte sind.
- wissen und verstehen, was das Laborsystem ist.
- einen einfacheren Vorgang bezüglich verschiedener Bezugssysteme beschreiben können.
- die drei Newton'schen Axiome in der Sprache der modernen Systemphysik kennen und verstehen.

Aufgaben

Gleichförmige Kreisbewegung

4.1 Betrachten Sie das Theorie-Blatt „Gleichförmige Kreisbewegung“. Bestimmen Sie den Zusammenhang zwischen ...

a) ... der Winkelgeschwindigkeit ω und der Frequenz f.

b) ... der Bahngeschwindigkeit v und der Winkelgeschwindigkeit ω.

4.2 Ein Körper befindet sich auf der Erde (mittlerer Erdradius $r_E = 6371$ km) in Chur (geografische Breite $\varphi = 47°$). Wegen der Erdrotation führt der Körper eine gleichförmige Kreisbewegung durch.

Bestimmen Sie ...

a) ... die Frequenz f des Körpers.

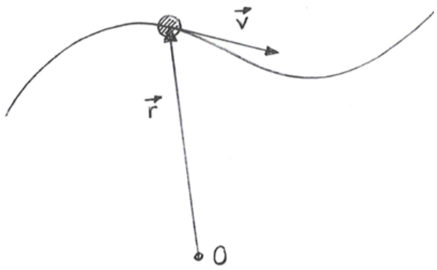
b) ... die Winkelgeschwindigkeit ω des Körpers.

c) ... die Bahngeschwindigkeit v des Körpers.

Hinweise:
- Geben Sie die Resultate jeweils zuerst allgemein algebraisch an.
- Berechnen Sie dann die konkreten Zahlenresultate mit einem Taschenrechner.

4.3 Betrachten Sie das Theorie-Blatt „Gleichförmige Kreisbewegung“. Bestimmen Sie, wie der Winkel φ von der Winkelgeschwindigkeit ω und der Zeit t abhängt, falls $\varphi(0s) := 0$

4.4 Bei einer **allgemeinen Bewegung** eines Körpers im dreidimensionalen Raum kann der Ort des Körpers durch einen Ortsvektor $\vec{r}$ beschrieben werden:

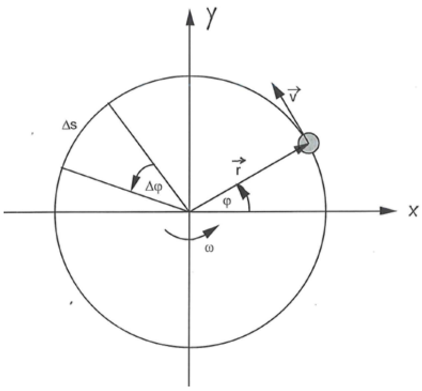


Die Geschwindigkeit $\vec{v}$ und die Beschleunigung $\vec{a}$ des Körpers werden dann wie folgt definiert:

$$\vec{v} := \dot{\vec{r}}$$

$$\vec{a} := \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$$

Betrachten Sie nun die **gleichförmige Kreisbewegung** eines Körpers in der x-y-Ebene:



Im Unterricht wurde aufgezeigt, dass der Ortsvektor $\vec{r}$ wie folgt lautet:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} r \cdot \cos(\omega t) \\ r \cdot \sin(\omega t) \end{pmatrix}$$

a) Bestimmen Sie den Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$, indem Sie den Ortsvektor $\vec{r}$ nach der Zeit t ableiten.

Hinweis:
- Die Komponenten von $\vec{v}$ sind die Ableitungen der entsprechenden Komponenten von $\vec{r}$.

b) Überprüfen Sie, dass $\vec{v}$ zu jedem Zeitpunkt senkrecht zu $\vec{r}$ gerichtet ist.

c) Bestimmen Sie den Beschleunigungsvektor $\vec{a}$, indem Sie den Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}$ nach der Zeit t ableiten.

d) Überprüfen Sie, dass $\vec{a}$ zu jedem Zeitpunkt entgegengesetzt zu $\vec{r}$ gerichtet ist.

Hinweis:
- $\vec{a}$ kann als Vielfaches von $\vec{r}$ ausgedrückt werden.

e) Bestimmen Sie den Betrag der Beschleunigung $\vec{a}$ in Abhängigkeit des Radius‘ r und der Winkelgeschwindigkeit ω.

4.5 Wird die Bewegung der Erde um die Sonne vernachlässigt, so führt ein mit der Erde fest verbundener Körper (m = 70 kg) wegen der Erdrotation eine gleichförmige Kreisbewegung aus.

a) Aus welchen Einzelkräften setzt sich die resultierende Kraft zusammen?
Skizzieren Sie den Körper, und zeichnen Sie alle an ihm angreifenden Kräfte ein.

b) (siehe nächste Seite)

b) Bestimmen Sie den Betrag der resultierenden Kraft, falls sich der Körper auf der geografischen Breite φ befindet:

i) $\varphi = 0°$ ii) $\varphi = 30°$ iii) $\varphi = 60°$ iv) $\varphi = 90°$

Hinweise:
- Geben Sie das Resultat zuerst allgemein algebraisch an.
- Berechnen Sie dann die konkreten Zahlenresultate mit einem Taschenrechner.

4.6 Ein Körper der Masse m ist am Ende einer Schnur der Länge *l* befestigt. Er wird mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω auf einem horizontal liegenden Kreis herumgeschleudert.

a) Skizzieren Sie die Anordnung.
Zeichnen Sie sowohl alle Kräfte, die am Körper angreifen, als auch die resultierende Kraft ein.
Die gezeichneten Längen der Kraftpfeile sollen dabei proportional zu den Beträgen der Kräfte sein.

b) Bestimmen Sie Winkelgeschwindigkeit ω in Abhängigkeit des Winkels α zwischen der Schnur und der Vertikalen.

Bezugssystem, Scheinkräfte

4.7 Ein Körper wird bezüglich des sogenannten Laborsystems (= Bezugssystem, in welchem die Erde ruht) mit der Geschwindigkeit v_0 unter dem Winkel α zur Horizontalen schräg nach oben abgeworfen.

Von welchem anderen Bezugssystem aus erscheint die Bewegung des Körpers ...

a) ... als freier Fall?

b) ... als waagrechter Wurf?

c) ... als senkrechter Wurf?

4.8 In der Aufgabe 4.9 werden Sie einen Text zu Trägheitskräften in einem beschleunigten Bezugssystem studieren. In diesem Text werden die drei Newton'schen Axiome erwähnt.

In der herkömmlichen "Kräfte-Sprache" lauten die drei Newton'schen Axiome wie folgt:

(1) Ein Körper beharrt in seinem Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung, wenn keine Kraft auf ihn wirkt. (**Trägheitsprinzip**)

(2) Die Summe aller auf einen Körper wirkenden Kräfte ist (bei konstanter Masse des Körpers) proportional zur Beschleunigung des Körpers. (**Aktionsprinzip**)

(3) Übt ein Körper A eine Kraft auf einen Körper B aus, so übt der Körper B eine gleich grosse,entgegengesetzt gerichtete Kraft auf den Körper A aus. (**Wechselwirkungsprinzip, "actio = reactio"**)

Wenn man das erste Newton'sche Axiom in die Sprache der modernen Systemphysik übersetzt, lautet es wie folgt:

(1) Der in einem Körper gespeicherte Impuls ändert sich nicht, wenn kein Impuls in ihn hinein oder aus ihm heraus fliesst.

Übersetzen Sie das zweite und dritte Newton'sche Axiom auf analoge Weise in die Sprache der modernen Systemphysik. Formulieren Sie also die Axiome mit Hilfe der Begriffe "Impuls" und "Impulsströme".

4.9 Studieren Sie aus dem Buch Metzler-Physik (kopiertes Blatt) den Abschnitt "1.2.9 Trägheitskräfte im beschleunigten Bezugssystem: Galilei-Transformation und Inertialsystem" (Seiten 56 bis 58). Lassen Sie dabei jedoch den letzten Absatz "Galilei Transformation und Inertialsysteme" (Seite 58) weg.

Hinweis:
- Im Text wird die resultierende Kraft bei einer gleichförmigen Kreisbewegung („Zentripetalkraft") mit $\vec{F}_R$ und die Zentrifugalkraft mit $\vec{F}_Z$ bezeichnet.

4.10 Ein Fahrstuhl bewegt sich im Laborsystem mit konstanter Beschleunigung nach unten. Im Fahrstuhl hängt eine Kugel an einem Kraftmessgerät.

Zwei Beobachter A und B befinden sich in verschiedenen Bezugssystemen:

a) Der Beobachter A befindet sich im Laborsystem.

b) Der Beobachter B befindet sich im Ruhesystem des Fahrstuhls, d.h. im Bezugssystem, in welchem der Fahrstuhl in Ruhe ist.

Beschreiben Sie, was die beiden Beobachter A und B am Kraftmessgerät ablesen, und erklären Sie die Beobachtung aus Sicht des jeweiligen Bezugssystems.

Lösungen

4.1 a) $\omega = 2\pi f$ b) $v = r\omega$

4.2 a) $f = \frac{1}{T} = 1.2\cdot 10^{-5}$ Hz b) $\omega = \frac{2\pi}{T} = 7.3\cdot 10^{-5}\ s^{-1}$

c) $v = \frac{2\pi\, r_E \cos(\varphi)}{T} = 0.32$ km/s

4.3 $\varphi = \omega t$

4.4 a) $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \begin{pmatrix} -\ r\omega\cdot\sin(\omega t) \\ r\omega\cdot\cos(\omega t) \end{pmatrix}$

b) $\vec{v}\cdot\vec{r} = 0$

c) $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \begin{pmatrix} -\ r\omega^2\cdot\cos(\omega t) \\ -\ r\omega^2\cdot\sin(\omega t) \end{pmatrix}$

d) $\vec{a} = -\ \omega^2\ \vec{r}$ $\qquad -\ \omega^2 < 0$

e) $a := |\vec{a}| = r\omega^2$

4.5 a) Gewichtskraft, Haftreibungskraft, Normalkraft

b) $F_{res} = m\ r_E \cos(\varphi)\ \omega^2$

i) $F_{res} = 2.4$ N ii) $F_{res} = 2.0$ N

iii) $F_{res} = 1.2$ N iv) $F_{res} = 0$ N

4.6 a) ...

b) $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}\frac{1}{\cos(\alpha)}}$

4.7 Das Bezugssystem bewegt sich bezüglich des Laborsystems geradlinig gleichförmig…

a) … schräg nach oben in die Anfangsrichtung und mit der Anfangsgeschwindigkeit des abgeworfenen Körpers.

b) … senkrecht nach oben mit der Geschwindigkeit, die gleich der vertikalen Komponente der Anfangsgeschwindigkeit des abgeworfenen Körpers ist.

c) … waagrecht mit der Geschwindigkeit, die gleich der horizontalen Komponente der Anfangsgeschwindigkeit des abgeworfenen Körpers ist.

4.8 (1) Der in einem Körper gespeicherte Impuls ändert sich nicht, wenn kein Impuls in ihn hinein oder aus ihm heraus fliesst.

(2) Fliesst Impuls in einen Körper hinein oder aus ihm heraus, so ist die Summe der entsprechenden Impulsstromstärken gleich der Änderungsrate des im Körper gespeicherten Impulses und somit (bei konstanter Masse des Körpers) proportional zur Änderungsrate der Geschwindigkeit des Körpers. (**Impulsbilanz, Grundgesetz der Mechanik**)

(3) Fliesst Impuls von einem Körper A zu einem Körper B, so ist die Stromstärke des aus dem Körper A heraus fliessenden Impulses gleich gross wie die Stromstärke des in den Körper B hinein fliessenden Impulses.

4.9 ...

4.10 Beide Beobachter stellen fest, dass das Kraftmessgerät eine Kraft anzeigt, die kleiner ist als die Gewichtskraft der Kugel.

a) Da die Kugel nach unten beschleunigt wird, muss der in der Kugel gespeicherte Impuls zunehmen (Ann.: positive Richtung nach unten). Es muss also weniger Impuls durch das Kraftmessgerät abfliessen als über das Gravitationsfeld zufliesst.

b) Die Kugel ist in Ruhe. Nach der Impulsbilanz müsste also gleich viel Impuls aus der Kugel abfliessen wie durch das Gravitationsfeld zufliesst. Da der am Kraftmesser angezeigte Impulsstrom schwächer ist als der gravitative Impulsstrom, schliesst der Beobachter B fälschlicherweise auf einen zusätzlichen abfliessenden Impulsstrom bzw. auf eine nach oben wirkende Scheinkraft.