Aufgaben 6 Schwingungen
Erzwungene Schwingung, Resonanz

Lernziele

- verstehen, was eine erzwungene Schwingung ist.
- wissen und verstehen, was die Eigenfrequenz eines Schwingers, ein Erreger und die Erregerfrequenz sind.
- wissen und verstehen, dass bei einer erzwungenen Schwingung die im zeitlichen Mittel vom Erreger zum Schwinger fliessende Energie im Dämpfer dissipiert wird.
- wissen, von welchen Grössen die Energie abhängt, die bei einer erzwungenen Schwingung im Dämpfer im zeitlichen Mittel dissipiert wird.
- wissen, dass eine erzwungene Schwingung einen Einschwingvorgang durchläuft.
- aus einem grafisch dargestellten zeitlichen Verlauf einer Schwingungsgrösse den Einschwingvorgang und die stationäre Phase einer erzwungenen Schwingung erkennen können.
- wissen, dass bei einer sinusförmig angeregten erzwungenen Schwingung die Frequenz in der stationären Phase gleich gross ist wie die Erregerfrequenz.
- das mathematische Modell zur Beschreibung einer erzwungenen mechanischen Schwingung kennen und verstehen.
- das Phänomen Resonanz kennen und verstehen.
- wissen und verstehen, was eine Resonanzkurve ist.
- den qualitativen Verlauf einer Resonanzkurve kennen und verstehen.
- wissen und verstehen, dass bei Resonanz der zeitlich gemittelte Energiestrom vom Erreger zum Schwinger maximal ist.
- wissen und verstehen, von welchen Grössen die Resonanzfrequenz abhängt.
- mit der Modellierungssoftware Insight Maker ein einfaches systemdynamisches Modell erstellen und damit einfache Simulationen und Parameterstudien ausführen können.

Aufgaben

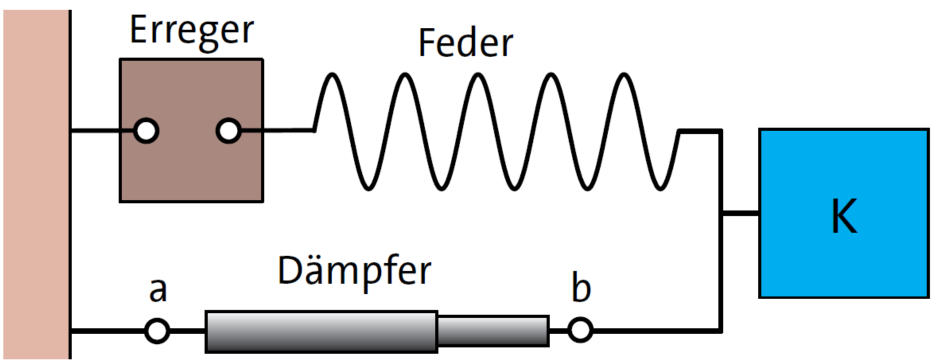
6.1 **Vorgängiges Selbststudium**

a) Studieren Sie im Lehrbuch KPK 3 die folgenden Abschnitte:
- 2.1 Was ist Resonanz? (Seite 21)
- 2.2 Resonanz eines mechanischen Schwingers (Seiten 21 und 22)

b) Studieren Sie das folgende **YouTube-Video**:
- Erzwungene Schwingung Federschwinger (4:06)

c) Führen Sie in Moodle den Test 6.1 durch.

6.2 Betrachten Sie die erzwungene Schwingung eines Federschwingers (Lehrbuch KPK 3, Abb. 2.3, Seite 22):



(Fortsetzung siehe nächste Seite)

Die Koordinatensysteme (Ort x des Schwingkörpers, Ort x_E des linken Federendes) sollen wie folgt festgelegt werden:
- Die Schwingung soll in x-Richtung erfolgen.
- Die positiven x- und x_E-Richtungen sollen nach rechts zeigen.
- Die Ruhelage soll bei $x = x_E = 0$ liegen.

Am Schwingkörper greifen zwei Kräfte an, die Federkraft F_F (Kraft, die die Feder ausübt) und die Dämpfungskraft F_D (Kraft, die der Dämpfer ausübt).

a) Formulieren Sie für den Schwingkörper das (aus der Mechanik bekannte) Aktionsprinzip.

b) Die in a) formulierte Gleichung enthält drei Grössen.
Beurteilen Sie, ob und wie diese drei Grössen vom Ort x, der Geschwindigkeit v und der Beschleunigung a des Schwingkörpers sowie vom Ort x_E des linken Federendes abhängen.
Setzen Sie dann die drei Ausdrücke in das Ergebnis von a) ein.

Unter der Annahme, dass der zeitliche Verlauf des Ortes x_E des linken Federendes sinus-förmig ist, d.h.

$$x_E = x_E(t) = \hat{x}_E \sin(\omega_E t)$$

lautet der zeitliche Verlauf des Ortes x des Schwingkörpers bei schwacher und geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung wie folgt (siehe Unterricht):

$$x = x(t) = C_1\, e^{-\delta t} \sin(\omega_d t + C_2) + \hat{x} \sin(\omega_E t + \varphi)$$

wobei: $\delta := \frac{k}{2m}$

$\omega_0 := \sqrt{\frac{D}{m}}$

$\omega_d := \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ ($\delta < \omega_0$, schwache Dämpfung)

Im eingeschwungenen bzw. stationären Zustand, d.h. für $t \to \infty$, gilt:

$$x = x(t) = \hat{x} \sin(\omega_E t + \varphi)$$

Dabei gilt für die Amplitude $\hat{x}$:

$$\hat{x} = \hat{x}(\omega_E) = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + 4\delta^2\omega_E^2}}\,\hat{x}_E$$

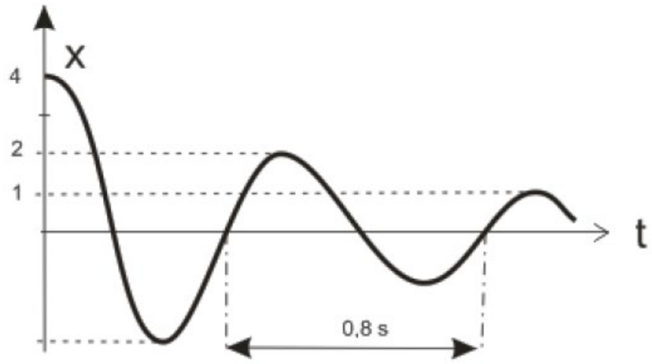
c) Überprüfen Sie, dass im eingeschwungenen Zustand die Ortsamplitude $\hat{x}$ maximal ist für

$$\omega_E = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

Hinweise:
- Es genügt zu zeigen, dass der Ausdruck unter der Wurzel minimal ist.
- Der Ausdruck unter der Wurzel ist eine quadratische Funktion in $z := \omega_E^2$.
- Das Maximum bzw. Minimum einer quadratischen Funktion liegt an der Stelle des Scheitelpunktes des Funktionsgrafen.
- Um den Scheitelpunkt zu bestimmen, muss die Funktionsgleichung der quadratischen Funktion in die Scheitelpunktsform umgeformt werden.

6.3 (siehe nächste Seite)

6.3 Erfährt ein schwingungsfähiges Bauteil (z.B. ein Balken) einen Schlag, führt es eine gedämpfte Schwingung aus. Der zeitliche Verlauf des Ausschlags x sieht wie folgt aus:



Die in der Grafik angegebenen Grössen sollen auf drei signifikante Stellen genau angenommen werden, also 0.8 = 0.800, 1 = 1.00, 2 = 2.00, 4 = 4.00.

a) Bestimmen Sie ...

i) ... die Kreisfrequenz ω_d der gedämpften Schwingung.

ii) * ... die Dämpfungskontante δ.

Hinweise:
- Der Wert des Exponentialfaktors $e^{-\delta t}$ im Ausdruck x(t) = … (siehe Unterricht) nimmt alle 0.8 s auf die Hälfte ab. Die Begründung dieser Aussage folgt aus den folgenden beiden weiteren Hinweisen:
- Die Periode T_d der gedämpften Schwingung beträgt 0.8 s (siehe Graf). Aber auch die Hochpunkte des Grafen, d.h. die Zeitpunkte, zu welchen der Ausdruck x(t) = … jeweils ein lokales Maximum annimmt, liegen 0.8 s auseinander (ohne Beweis).
- Zu diesen Zeitpunkten nimmt der Sinusfaktor $\sin(\omega_d t + \varphi)$ im Ausdruck x(t) = … jeweils den gleichen Wert (< 1) an (ohne Beweis).

Wird das Bauteil von aussen mit der Frequenz ω_E angeregt, ergibt sich eine erzwungene Schwingung.

b) Bestimmen Sie die Frequenz ω_E, bei welcher ...

i) ... die Geschwindigkeitsamplitude $\hat{v}$ der erzwungenen Schwingung maximal ist.

ii) ... die Ortsamplitude $\hat{x}$ der erzwungenen Schwingung maximal ist.

Hinweis:
- Verwenden Sie die Ergebnisse aus a).

6.4 In der Aufgabe 5.5 haben Sie mit Insight Maker ein systemdynamisches Modell für die Schwingung eines freien, gedämpften Federschwingers erstellt. Das Modell soll nun so abgeändert werden, dass mit ihm die erzwungene Schwingung des Federschwingers in der Aufgabe 6.2 modelliert und simuliert werden kann.

a) Ergänzen Sie das Modell mit Grössen, die den Erreger modellieren.

Hinweise:
- Fügen Sie die Erregerfrequenz ω_E und die Erregerauslenkung x_E als neue Modellgrössen ein.
- Der Topf, welcher die in der Feder gespeicherte Energie W_F modelliert, kann entfernt werden.

b) Simulieren Sie die erzwungene Schwingung für verschiedene Werte der Erregerfrequenz ω_E.
Betrachten Sie dabei die Fälle $\omega_E \ll \omega_0$, $\omega_E < \omega_0$, $\omega_E \approx \omega_0$, $\omega_E > \omega_0$, $\omega_E \gg \omega_0$.
Stellen Sie jeweils die folgenden Grössen je in einem gemeinsamen Diagramm dar:
- Ort x des Schwingkörpers, Erregerauslenkung x_E
- Kinetische Energie W_{kin}, im Dämpfer dissipierte Energie W_{diss}