

## Aufgaben 11      Mechanik Trägheitsmoment, Rotationsenergie

### Lernziele

- die Wirkung von Kräften beurteilen können, die an einem starren Körper angreifen.
- verstehen, dass der Drehimpuls eines Körpers von Masse, Massenverteilung und Winkelgeschwindigkeit abhängt.
- verstehen, was das Trägheitsmoment eines Körpers ist.
- die Analogie zwischen Trägheitsmoment und Masse kennen und verstehen.
- das Trägheitsmoment eines einfacheren Körpers bestimmen können.
- die Drehimpulsbilanz bzw. das Aktionsprinzip der Rotations-Mechanik anwenden können.
- den Drehimpuls als Energieträger verstehen.
- die Translationsenergie, die Rotationsenergie und die totale kinetische Energie eines einfacheren Körpers bestimmen können.
- die Energiebilanz in konkreten Problemstellungen anwenden können.
- sich aus dem Studium eines schriftlichen Dokumentes neue Kenntnisse und Fähigkeiten erarbeiten können.
- einen neuen Sachverhalt analysieren und beurteilen können.
- aus einem Experiment neue Erkenntnisse gewinnen können.
- eine neue Problemstellung selbstständig bearbeiten können.

### Aufgaben

#### Trägheitsmoment

##### 11.1 Vorgängiges Selbststudium

- Studieren Sie im Lehrbuch KPK 4 den folgenden Abschnitt:  
- 3.3 Wovon der Drehimpuls abhängt - Schwungräder (Seiten 42 bis 44, Aufgaben: nur 3 und 4)
- Studieren Sie das folgende **YouTube-Video**:  
- [Pirouetteneffekt](#) (1:05)
- Führen Sie in Moodle den [Test 11.1](#) durch.

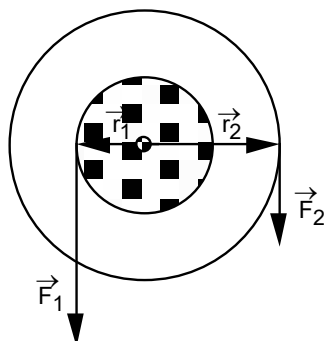
- 11.2 An den vier Ecken eines Rechtecks mit den Seitenlängen von 30 cm und 40 cm befinden sich Kugeln mit der Masse von je 200 g.

Bestimmen Sie das gesamte Trägheitsmoment der vier Kugeln bezüglich derjenigen Achse, welche senkrecht zur Rechteckebene und durch den Mittelpunkt des Rechtecks verläuft.

Hinweise:

- Da der Durchmesser einer Kugel im Vergleich zu den Seitenlängen des Rechtecks als klein angesehen werden kann, kann man die Kugeln als Massenpunkte, d.h. als punktförmige Körper betrachten.
- Die Masse der für den Zusammenhalt der vier Kugeln benötigten Verbindungsstäbe kann im Vergleich zu den Massen der Kugeln vernachlässigt werden.

- 11.3 Betrachten Sie das folgende Wellrad:



Das Wellrad besteht aus zwei miteinander fest verbundenen Scheiben mit Radien  $r_1$  und  $r_2$ . Im Radius  $r_1$  greift eine Kraft  $\vec{F}_1$  und im Radius  $r_2$  eine Kraft  $\vec{F}_2$  an. Die beiden Kräfte werden über aufgewickelte Schnüre realisiert. Die Massen der Schnüre kann gegenüber der Masse des Wellrades vernachlässigt werden.

Man möchte das Trägheitsmoment  $J$  des Wellrades bestimmen. Dazu lässt man am zunächst ruhenden Wellrad während der Zeitspanne  $\Delta t$  die beiden Kräfte  $\vec{F}_1$  und  $\vec{F}_2$  angreifen und misst die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  des Wellrades nach dieser Zeitspanne  $\Delta t$ .

Da die beiden Kräfte  $\vec{F}_1$  und  $\vec{F}_2$  über aufgewickelte Schnüre realisiert werden, bleiben sie und ihre beiden Drehmomente sowohl richtungs- als auch betragsmässig über die ganze Zeitspanne  $\Delta t$  konstant.

Bekannt sind also die Beträge  $F_1$  und  $F_2$  der Kräfte  $\vec{F}_1$  und  $\vec{F}_2$ , die Radien  $r_1$  und  $r_2$ , die Zeitspanne  $\Delta t$  sowie die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  des Wellrades nach der Zeitspanne  $\Delta t$ .

Bestimmen Sie daraus das Trägheitsmoment  $J$  des Wellrades.

Hinweise:

- Betrachten Sie die Drehmomente  $\vec{M}_1$  und  $\vec{M}_2$  der beiden Kräfte  $\vec{F}_1$  und  $\vec{F}_2$ .
- Wenden Sie die Drehimpulsbilanz bzw. das Aktionsprinzip der Rotationsmechanik an.

### Rotationsenergie

#### 11.4 Vorgängiges Selbststudium

- a) Studieren Sie im Lehrbuch KPK 4 den folgenden Abschnitt:  
- 5.3 Der Drehimpuls als Energieträger (Seiten 68 und 69)

Hinweise:

- (gleicher Hinweis wie bei der Aufgabe 3.1)

Im Lehrbuch KPK 4 wird für die **Energie** das Formelzeichen  $E$  verwendet. In der Physik wird die Energie jedoch häufig auch mit  $W$  bezeichnet, um Verwechslungen mit anderen Grössen zu vermeiden. Wir werden im Unterricht deshalb die Energie mit  $W$  bezeichnen.

- (gleicher Hinweis wie bei der Aufgabe 3.1)

Im Lehrbuch KPK 4 wird für die **Energiestromstärke** das Formelzeichen  $P$  verwendet. Dies hat den Nachteil, dass man so eine Energiestromstärke nicht von einer Leistung unterscheiden kann, für welche auch das Formelzeichen  $P$  verwendet wird. Wir werden im Unterricht deshalb die Energiestromstärke mit  $I_W$  bezeichnen.

- Im Lehrbuch KPK 4 wird für die **Drehimpulsstromstärke** das Formelzeichen  $M$  verwendet, also das gleiche Formelzeichen wie für das Drehmoment. Das kann so begründet werden, dass ein Drehmoment eine Drehimpulsstromstärke bezüglich eines Körpers ist. Andererseits wird so nicht klar zwischen einer Drehimpulsstromstärke und einem Drehmoment unterschieden. Wir werden im Unterricht deshalb die Drehimpulsstromstärke mit  $I_L$  bezeichnen.

- b) Führen Sie in Moodle den [Test 11.2](#) durch.

#### 11.5 In einem Fahrzeug kann ein Schwungrad zur Speicherung von Energie eingesetzt werden.

Bei der Talfahrt wird üblicherweise durch das Bremsen Energie dissipiert, die man nicht mehr nutzen kann. Mit einem installierten Schwungrad könnte man jedoch wenigstens einen Teil der Energie speichern und bei der Bergfahrt wieder nutzen.

Nehmen Sie an, dass das Schwungrad aus einer homogenen Kreisscheibe, d.h. einem flachen Vollzylinder besteht. Die Drehachse verläuft senkrecht zur Radebene durch den Schwerpunkt.

- a) Mit einer Winkelgeschwindigkeit, die 20 Umdrehungen pro Sekunde entspricht, soll im Schwungrad die folgende Energiemenge gespeichert werden können:

Die gespeicherte Energie soll für die Fahrt eines Autos der Masse 2.0 t (inkl. Schwungrad) von Davos (1559 m ü.M.) auf den Flüelapass (2384 m ü.M.) ausreichen.

(Fortsetzung siehe nächste Seite)

Bestimmen Sie das dazu notwendige Trägheitsmoment des Schwungrades.

Hinweise:

- Wenden Sie die Energiebilanz an.
- Nehmen Sie an, dass rund 75% der Energie durch Reibung (Luftwiderstand, Rollreibung) dissipiert wird.
- Bestimmen Sie zuerst die algebraische Lösung, d.h. ohne konkrete Zahlenwerte.

- b) Beurteilen Sie, ob man ein Schwungrad mit dem in a) geforderten Trägheitsmoment in ein Auto einbauen könnte.

11.6 Ein Voll- und ein Hohlzylinder mit derselben Masse  $m$  und demselben Radius  $r$  rollen mit der konstanten Geschwindigkeit  $v$  auf einer horizontalen Ebene.

- a) Drücken Sie für beide Zylinder die Translationsenergie  $W_{\text{transl}}$ , die Rotationsenergie  $W_{\text{rot}}$  und die gesamte kinetische Energie  $W_{\text{kin}} (= W_{\text{transl}} + W_{\text{rot}})$  durch  $m$  und  $v$  aus.

Hinweis:

- Überlegen Sie sich beim Ausdrücken von  $W_{\text{rot}}$  durch  $m$  und  $v$ , wie die Geschwindigkeit  $v$  und die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  bei einem rollenden (nicht gleitenden!) Zylinder zusammenhängen.

- b) Bestimmen Sie für beide Zylinder die Anteile von  $W_{\text{transl}}$  und  $W_{\text{rot}}$  an der gesamten kinetischen Energie  $W_{\text{kin}}$ .

11.7 Ein Voll- und ein Hohlzylinder mit derselben Masse und demselben Radius rollen aus der Ruhe und aus derselben Höhe eine schiefe Ebene hinunter. Man beobachtet, dass der Vollzylinder als erster den Fuss der schiefen Ebene erreicht (vgl. Experiment im Unterricht).

Finden Sie aus den Ergebnissen der Aufgabe 11.6 eine Erklärung dafür, warum der Vollzylinder vor dem Hohlzylinder unten ankommt.

**Lösungen**

11.1 a) -

b) **Beobachtung**

Die Winkelgeschwindigkeit ist bei gebeugten Armen grösser als bei gestreckten Armen.

**Erklärung**

Da zwischen der Umgebung (Boden, Luft) und dem Gesamtkörper (Drehstuhl, Mensch, Gewichtsstücke) kein Drehimpuls fliesst, bleibt der im Gesamtkörper gespeicherte Drehimpuls konstant (Drehimpulsbilanz).

Das Strecken (bzw. Beugen) der Arme vergrössert (bzw. verkleinert) das Trägheitsmoment  $J$  des Gesamtkörpers. Aus  $L = J \cdot \omega$  folgt, dass sich bei konstantem Drehimpuls  $L$  die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  verkleinern (bzw. vergrössern) muss.

c) -

11.2  $J = 0.050 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

11.3 Drehimpulsbilanz / Aktionsprinzip der Rotations-Mechanik **vektoriell:**

$$\vec{M}_1 + \vec{M}_2 = J \cdot \vec{\omega}$$

Drehimpulsbilanz / Aktionsprinzip der Rotations-Mechanik **1-dimensional:**

$$M_1 - M_2 = J \cdot \dot{\omega} \quad (\text{Bem.: } M_1 \text{ und } M_2 \text{ sind die Beträge der Drehmomente } \vec{M}_1 \text{ und } \vec{M}_2.)$$

$$M_1 = r_1 \cdot F_1 \quad (\text{Bem.: } r_1 \text{ ist der Betrag von } \vec{r}_1, F_1 \text{ ist der Betrag der Kraft } \vec{F}_1.)$$

$$M_2 = r_2 \cdot F_2 \quad (\text{Bem.: } r_2 \text{ ist der Betrag von } \vec{r}_2, F_2 \text{ ist der Betrag der Kraft } \vec{F}_2.)$$

$$\Delta\omega = \dot{\omega} \cdot \Delta t$$

$$\omega = \Delta\omega$$

---


$$\Rightarrow J = (r_1 \cdot F_1 - r_2 \cdot F_2) \frac{\Delta t}{\omega}$$

11.4 -

11.5 a) **Energiebilanz**

$$W_{\text{rot,Davos}} + W_{\text{G,Davos}} = W_{\text{rot,Flüelapass}} + W_{\text{G,Flüelapass}} + W_{\text{diss}} \quad (\text{wobei } W_{\text{G,Davos}} = W_{\text{rot,Flüelapass}} = 0 \text{ J})$$

$$W_{\text{rot,Davos}} = \frac{1}{2} J \omega^2$$

$$W_{\text{G,Flüelapass}} = mgh \quad (m = \text{Masse Auto inkl. Schwungrad})$$

$$x = \frac{W_{\text{diss}}}{W_{\text{rot,Davos}}}$$

$$\omega = 2\pi f$$

---


$$\Rightarrow J = \frac{mgh}{2\pi^2 f^2 (1-x)} = \frac{2.0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot 9.81 \text{ N/m} \cdot 825 \text{ m}}{2\pi^2 \cdot (20 \text{ 1/s})^2 \cdot (1 - 75\%)} = 8.2 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

b)  $J = \frac{1}{2} m_{\text{Schwungrad}} r^2$

z.B.  $m_{\text{Schwungrad}} = 0.20 \text{ t}$  ( $m_{\text{Auto}} = 1.8 \text{ t}$ )  $\Rightarrow r = 9.1 \text{ m}$

$m_{\text{Schwungrad}} = 0.50 \text{ t}$  ( $m_{\text{Auto}} = 1.5 \text{ t}$ )  $\Rightarrow r = 5.7 \text{ m}$

$m_{\text{Schwungrad}} = 1.0 \text{ t}$  ( $m_{\text{Auto}} = 1.0 \text{ t}$ )  $\Rightarrow r = 4.0 \text{ m}$

Ein solch grosses Schwungrad könnte man nicht in ein Auto einbauen.

11.6 (siehe nächste Seite)

11.6

	$W_{\text{transl}}$	$W_{\text{rot}}$	$W_{\text{kin}}$	$W_{\text{transl}} / W_{\text{kin}}$	$W_{\text{rot}} / W_{\text{kin}}$
Vollzylinder	$\frac{1}{2} mv^2$	$\frac{1}{4} mv^2$	$\frac{3}{4} mv^2$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
Hohlzylinder	$\frac{1}{2} mv^2$	$\frac{1}{2} mv^2$	$mv^2$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

11.7 ...