Aufgaben 5 Mechanik
Trägheitsmoment, Aktionsprinzip der Rotations-Mechanik, Rotationsenergie

Lernziele

- die Wirkung von Kräften beurteilen können, die an einem starren Körper angreifen.
- verstehen, dass der Drehimpuls eines Körpers von Masse, Massenverteilung und Winkelgeschwindigkeit abhängt.
- verstehen, was das Trägheitsmoment eines Körpers ist.
- die Analogie zwischen Trägheitsmoment und Masse kennen und verstehen.
- das Trägheitsmoment eines einfacheren Körpers bestimmen können.
- die Drehimpulsbilanz bzw. das Aktionsprinzip der Rotations-Mechanik anwenden können.
- den Drehimpuls als Energieträger verstehen.
- wissen, dass sich die totale kinetische Energie eines starren Körpers aus der Translations- und der Rotationsenergie zusammensetzt.
- die Translations- und die Rotationsenergie eines einfacheren Körpers bestimmen können.
- die Energiebilanz in konkreten Problemstellungen anwenden können.
- eine neue Problemstellung selbstständig bearbeiten und in einer Gruppe diskutieren können.

Aufgaben

Trägheitsmoment, Aktionsprinzip der Rotations-Mechanik

5.1 Studieren Sie im Lehrbuch KPK 4 die folgenden Abschnitte:
- 3.3 Wovon der Drehimpuls abhängt - Schwungräder (Seite 35, ohne Aufgaben)
- 3.6 Drehimpuls und Winkelgeschwindigkeit als Vektoren (Seite 38)

5.2 An den vier Ecken eines Rechtecks mit den Seitenlängen von 30 cm und 40 cm befinden sich Kugeln mit der Masse von je 200 g.

Bestimmen Sie das Gesamtträgheitsmoment um eine Achse durch den Mittelpunkt des Rechtecks senkrecht zur Rechteckebene.

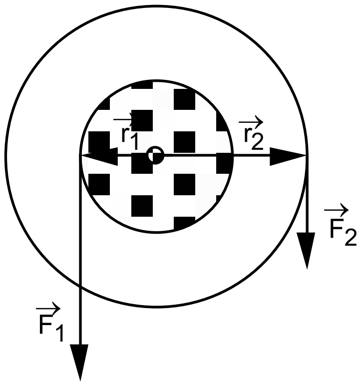
Hinweis:
- Da der Durchmesser einer Kugel im Vergleich zu den Seitenlängen des Rechtecks als klein angesehen werden kann, kann man die Kugeln als Massenpunkte, d.h. als punktförmige Körper betrachten.

5.3 Studieren Sie das folgende **YouTube-Video**:
- Pirouetteneffekt (1:05)

5.4 Bearbeiten Sie die folgenden Aufgaben aus dem Lehrbuch KPK 4:
- Aufgaben am Ende des Abschnitts 3.3 (Seite 35)
- Aufgaben am Ende des Abschnitts 3.5 (Seite 37)

5.5 (siehe nächste Seite)

5.5 Betrachten Sie das folgende Wellrad:



Das Wellrad besteht aus zwei miteinander fest verbundenen Scheiben mit Radien r_1 und r_2. Im Radius r_1 greift eine Kraft $\vec{F}_1$ und im Radius r_2 eine Kraft $\vec{F}_2$ an. Die beiden Kräfte werden über aufgewickelte Schnüre realisiert. Die Massen der Schnüre kann gegenüber der Masse des Wellrades vernachlässigt werden.

Man möchte das Trägheitsmoment J des Wellrades bestimmen. Dazu lässt man am zunächst ruhenden Wellrad während der Zeitspanne Δt die beiden Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ angreifen und misst die Winkelgeschwindigkeit ω des Wellrades nach dieser Zeitspanne Δt.

Da die beiden Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ über aufgewickelte Schnüre realisiert werden, bleiben sie und ihre beiden Drehmomente sowohl richtungs- als auch betragsmässig über die ganze Zeitspanne Δt konstant.

Bekannt sind also die Beträge F_1 und F_2 der Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$, die Radien r_1 und r_2, die Zeitspanne Δt sowie die Winkelgeschwindigkeit ω des Wellrades nach der Zeitspanne Δt.

Bestimmen Sie daraus das Trägheitsmoment J des Wellrades.

Rotationsenergie

5.6 Studieren Sie im Lehrbuch KPK 4 den folgenden Abschnitt:
- 5.3 Der Drehimpuls als Energieträger (Seite 54)

Hinweise:
- (gleicher Hinweis wie bei der Aufgabe 3.1)
  Im Lehrbuch KPK 4 wird für die **Energiestromstärke** das Formelzeichen P verwendet. Dies hat den Nachteil, dass man so eine Energiestromstärke nicht von einer Leistung unterscheiden kann, für welche auch das Formelzeichen P verwendet wird. Wir werden im Unterricht deshalb die Energiestromstärke mit I_W bezeichnen. (gleicher Hinweis wie bei der Aufgabe 3.1)
- Im Lehrbuch KPK 4 wird für die **Drehimpulsstromstärke** das Formelzeichen M verwendet, also das gleiche Formelzeichen wie für das Drehmoment. Das kann so begründet werden, dass ein Drehmoment ja eine Drehimpulsstromstärke bezüglich eines Körpers ist. Andererseits wird so nicht klar zwischen einer Drehimpulsstromstärke und einem Drehmoment unterschieden. Wir werden im Unterricht deshalb die Drehimpulsstromstärke mit I_L bezeichnen.

5.7 In einem Fahrzeug kann ein Schwungrad zur Speicherung von Energie eingesetzt werden.

Bei der Talfahrt wird üblicherweise durch das Bremsen Energie dissipiert, die man nicht mehr nutzen kann. Mit einem installierten Schwungrad könnte man jedoch wenigstens einen Teil der Energie speichern und bei der Bergfahrt wieder nutzen.

Nehmen Sie an, dass das Schwungrad aus einer homogenen Kreisscheibe, d.h. einem flachen Vollzylinder besteht. Die Drehachse verläuft senkrecht zur Radebene durch den Schwerpunkt.

a) Mit einer Winkelgeschwindigkeit, die 20 Umdrehungen pro Sekunde entspricht, soll im Schwungrad die folgende Energiemenge gespeichert werden können:

Die gespeicherte Energie soll für die Fahrt eines Autos der Masse 1.5 t (inkl. Schwungrad) von Davos (1559 m ü.M.) auf den Flüelapass (2384 m ü.M.) ausreichen.

Bestimmen Sie das dazu notwendige Trägheitsmoment des Schwungrades.

Hinweise:
- Wenden Sie die Energiebilanz an.
- Nehmen Sie an, dass rund 75% der Energie durch Reibung (Luftwiderstand, Rollreibung) dissipiert wird.
- Bestimmen Sie zuerst die algebraische Lösung, d.h. ohne konkrete Zahlenwerte.

b) Beurteilen Sie, ob man ein Schwungrad mit dem in a) geforderten Trägheitsmoment in ein Auto einbauen könnte.

5.8 Ein Voll- und ein Hohlzylinder mit derselben Masse m und demselben Radius r rollen mit der konstanten Geschwindigkeit v auf einer horizontalen Ebene.

a) Drücken Sie für beide Zylinder die Translationsenergie W_{transl}, die Rotationsenergie W_{rot} und die gesamte kinetische Energie W_{kin} (= $W_{transl} + W_{rot}$) durch m und v aus.

Hinweis:
- Überlegen Sie sich beim Ausdrücken von W_{rot} durch m und v, wie die Geschwindigkeit v und die Winkelgeschwindigkeit ω bei einem rollenden (nicht gleitenden!) Zylinder zusammenhängen.

b) Bestimmen Sie für beide Zylinder die Anteile von W_{transl} und W_{rot} an der gesamten kinetischen Energie W_{kin}.

5.9 Ein Voll- und ein Hohlzylinder mit derselben Masse und demselben Radius rollen aus der Ruhe und aus derselben Höhe eine schiefe Ebene hinunter. Man beobachtet, dass der Vollzylinder als erster den Fuss der schiefen Ebene erreicht (vgl. Experiment im Unterricht).

Finden Sie aus den Ergebnissen der Aufgabe 5.8 eine Erklärung dafür, warum der Vollzylinder vor dem Hohlzylinder unten ankommt.

Lösungen

5.1 ...

5.2 $J = 0.050\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$

5.3 Beobachtung

Die Winkelgeschwindigkeit ist bei gebeugten Armen grösser als bei gestreckten Armen.

Erklärung

Da zwischen der Umgebung (Boden, Luft) und dem Gesamtkörper (Drehstuhl, Mensch, Gewichtsstücke) kein Drehimpuls fliesst, bleibt der im Gesamtkörper gespeicherte Drehimpuls konstant (Drehimpulsbilanz).

Das Strecken (bzw. Beugen) der Arme vergrössert (bzw. verkleinert) das Trägheitsmoment J des Gesamtkörpers. Aus $L = J\cdot\omega$ folgt, dass sich bei konstantem Drehimpuls L die Winkelgeschwindigkeit ω verkleinern (bzw. vergrössern) muss.

5.4 ...

Hinweis zur Lösung der Aufgabe 2 (c) im Abschnitt 3.5 (Aufgabenstellung Seite 37, Lösung Seite 113):
- Die Winkelgeschwindigkeit ω beträgt $8\cdot 2\pi\ \text{s}^{-1}$. Daher sollte beim Zahlenterm hinter der Formel $L = J\cdot\omega$ ein Faktor 8 stehen, nicht 3. Das Schlussresultat $L = 100.5$ E ist jedoch korrekt.

5.5 Aktionsprinzip der Rotations-Mechanik (1-dim.)

$M_1 - M_2 = J\cdot\dot{\omega}$ (Bem.: M_1 und M_2 sind die Beträge der Drehmomente $\vec{M}_1$ und $\vec{M}_2$.)

$M_1 = r_1\cdot F_1$ (Bem.: r_1 ist der Betrag von $\vec{r}_1$. F_1 ist der Betrag der Kraft $\vec{F}_1$.)
$M_2 = r_2\cdot F_2$ (Bem.: r_2 ist der Betrag von $\vec{r}_2$. F_2 ist der Betrag der Kraft $\vec{F}_2$.)
$\Delta\omega = \dot{\omega}\cdot\Delta t$
$\omega = \Delta\omega$

$\Rightarrow\ J = (r_1\cdot F_1 - r_2\cdot F_2)\,\frac{\Delta t}{\omega}$

5.6 ...

5.7 a) Energiebilanz

$W_{rot,Davos} + W_{G,Davos} = W_{rot,Flüelapass} + W_{G,Flüelapass} + W_{diss}$ (wobei $W_{G,Davos} = W_{rot,Flüelapass} = 0$ J)

$W_{rot,Davos} = \frac{1}{2}J\omega^2$
$W_{G,Flüelapass} = mgh$
$x = \frac{W_{diss}}{W_{rot,Davos}}$
$\omega = 2\pi f$

$\Rightarrow\ J = \frac{mgh}{2\pi^2 f^2(1 - x)} = \frac{1.5\cdot 10^3\text{kg}\cdot 9.81\ \text{N/m}\cdot 825\ \text{m}}{2\pi^2\cdot(20\ 1/\text{s})^2\cdot(1 - 75\%)} = 6.2\cdot 10^3\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$

b) $J = \frac{1}{2}mr^2$

z.B. $r := 1.0\ \text{m}\ \Rightarrow\ m = 12\ \text{t}$
$r := 2.0\ \text{m}\ \Rightarrow\ m = 3.1\ \text{t}$

Ein solch grosses und schweres Schwungrad könnte man nicht in ein Auto einbauen.

5.8

	W_{transl}	W_{rot}	W_{kin}	W_{transl} / W_{kin}	W_{rot} / W_{kin}
Vollzylinder	$\frac{1}{2}mv^2$	$\frac{1}{4}mv^2$	$\frac{3}{4}mv^2$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
Hohlzylinder	$\frac{1}{2}mv^2$	$\frac{1}{2}mv^2$	mv^2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

5.9 ...