KPK

Der Karlsruher Physikkurs

für die Sekundarstufe II

Mechanik

Der Karlsruher Physikkurs

Ein Lehrbuch für den Unterricht in der Sekundarstufe II

- Elektrodynamik
- Thermodynamik
- Schwingungen, Wellen, Daten
- **Mechanik**
- Atomphysik, Kernphysik, Teilchenphysik

Herrmann

Der Karlsruher Physikkurs

Auflage 2016

Bearbeitet von Prof. Dr. *Friedrich Herrmann und StD Michael Pohlig*

Abbildungen: *F. Herrmann*

1

Werkzeuge

1.1 Physikalische Größen

Man braucht eine physikalische Größe, um eine Eigenschaft quantitativ, d.h. mit einem Zahlenwert zu beschreiben. Wir betrachten die Angabe

$$m = 5 \text{ kg}$$

Hier ist

m: physikalische Größe
5: Zahlenwert
kg: Maßeinheit

Mathematisch gesehen ist „5 kg“ zu betrachten als das Produkt aus „5“ und „kg“. Beachte, wenn du selbst einen wissenschaftlichen Text schreibst, dass das Symbol einer physikalischen Größe kursiv geschrieben wird, die Maßeinheit dagegen in Normalschrift: Also „*m*“ bedeutet Masse und „m“ bedeutet Meter.

1.2 Worauf sich der Wert einer Größe bezieht

Wir versuchen, physikalische Größen zu klassifizieren, und zwar danach, auf was für geometrische Gebilde sie sich beziehen: auf einen Punkt, eine Fläche oder einen Raumbereich.

Wert bezieht sich auf einen Punkt:

Geschwindigkeit, Temperatur, Druck, elektrisches Potenzial, Dichte,…

Wert bezieht sich auf eine Fläche:

alle Ströme: Kraft (Impulsstrom), elektrischer Strom, Entropiestrom, Energiestrom,…

Wert bezieht sich auf einen Raumbereich:

Masse, Impuls, elektrische Ladung, Entropie, Energie,…

Wenn sich eine Größe auf einen Punkt bezieht, kann sich ihr Wert von Punkt zu Punkt ändern. Das ist offensichtlich bei der Temperatur und beim Druck. Dass auch die Geschwindigkeit in diese Kategorie gehört, sieht man vielleicht nicht sofort. Schließlich haben doch alle Punkte eines sich bewegenden Körpers dieselbe Geschwindigkeit, oder doch nicht? Es genügt, dass du einen sich drehenden Körper betrachtest, um dich vom Gegenteil zu überzeugen. Bei dem hat jeder Punkt eine andere Geschwindigkeit. Auch die Geschwindigkeit des Wassers in einem Fluss ändert sich von Ort zu Ort.

Größen, die sich auf einen Raumbereich beziehen, nennen wir mengenartige Größen.

Nicht alle Größen passen in dieses Schema, z.B. die Zeit, aber auch die Federkonstante, der elektrische Widerstand und die Kapazität.

Der Wert einer Stromstärke bezieht sich auf eine Fläche.
Der Wert einer mengenartigen Größe bezieht sich auf einen Raumbereich.

1.3 Verteilungen

Du interessierst dich für die Temperatur an dem Ort, an dem du dich gerade befindest. Du misst die Temperatur und findest 25 °C. Es ist also

ϑ = 25 °C.

Manchmal interessierst du dich für die Temperaturwerte entlang einer Linie: Wie nimmt die Temperatur über der Stelle, an der du stehst, mit der Höhe z ab? Dann fragst du nach einer eindimensionalen Temperaturverteilung, d.h. nach der Funktion $\vartheta(z)$.

Es kommt vor, dass man sich für die Werte einer punktbezogenen Größe in einer ganzen Ebene interessiert, z.B. für die Temperatur oder den Luftdruck an der Erdoberfläche. Die entsprechende Verteilung ist dann eine Funktion von zwei Ortskoordinaten: $\vartheta(x,y)$ und $p(x,y)$, also eine Verteilung in zwei Dimensionen.

Um jemanden über die Temperaturen in einem echten, dreidimensionalen Raumbereich zu informieren, muss man ihm eine Funktion $\vartheta(x,y,z)$ der drei Ortskoordinaten x, y und z mitteilen, also eine dreidimensionale *Temperaturverteilung*.

Je mehr Dimensionen man berücksichtigt, desto schwieriger wird die grafische Darstellung der Verteilung. Abb. 1.1 zeigt die Temperatur als Funktion der Höhe.

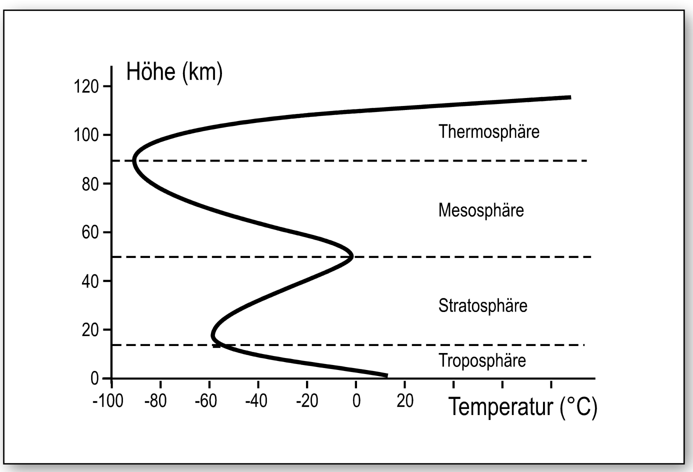


Abb. 1.1
Temperatur als Funktion der Höhe

Eine zweidimensionale Verteilung kann man mit Hilfe eines 3D-Plots graphisch darstellen. Abb. 1.2 zeigt die Funktion $z(x,y) = x^2 + \sin y$. Versuche dir klar zu machen, warum die Grafik so aussieht.

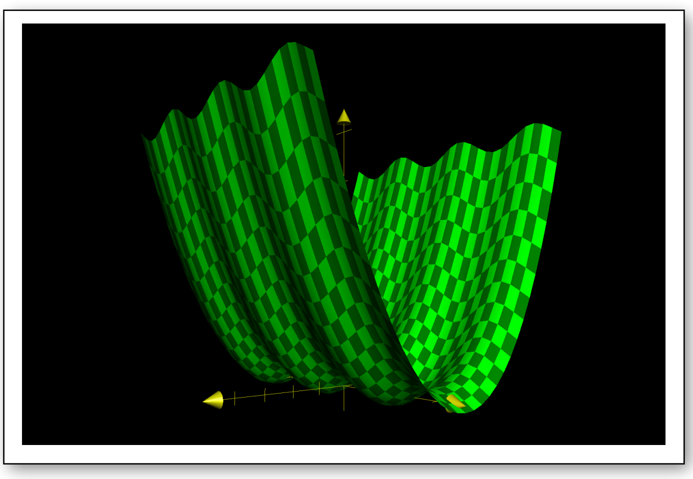


Abb. 1.2
3D-Plot der Funktion
$z(x, y) = x^2 + \sin y$

Zweidimensionale Verteilungen kann man auch mit Hilfe von Grautönungen oder Farben darstellen. Abb. 1.3 zeigt die Bevölkerungsdichte als Funktion des Ortes in Baden-Württemberg.

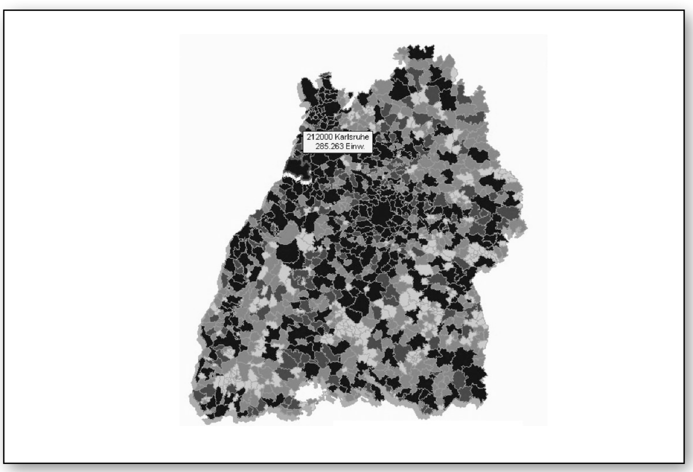


Abb. 1.3
Verteilung der Bevölkerungsdichte in Baden-Württemberg

Um eine dreidimensionale Verteilung anschaulich darzustellen, muss man zu noch raffinierteren Tricks greifen. Abb. 1.4 zeigt die Dichteverteilung in einem Wasserstoffatom.

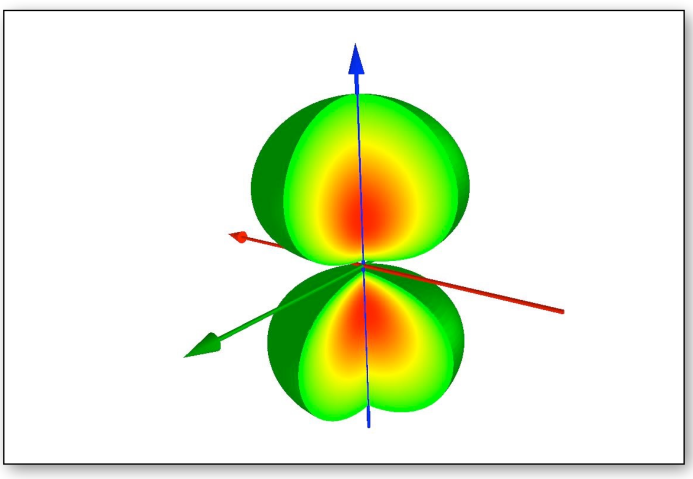


Abb. 1.4
Verteilung der Massendichte der Elektronenhülle eines angeregten Wasserstoffatoms

Oft interessiert man sich dafür, wie sich der Wert einer Größe mit der Zeit t ändert. Dann kommt noch t als unabhängige Variable hinzu. Man hat es also zu tun mit Funktionen wie

$\vartheta(x,t)$ oder
$\vartheta(x,y,t)$ oder
$\vartheta(x,y,z,t)$.

Die Funktion $\vartheta(x,t)$ kann man graphisch wie in Abb. 1.2 darstellen. Man setzt dann die Zeit an die Stelle der Ortskoordinate y. Sehr anschaulich werden solche Funktionen, wenn man Videos herstellt, so dass die Zeitvariable auch als Zeit wahrgenommen wird.

Manchmal hat eine punktbezogene Größe an jeder Stelle denselben Wert. So kann die Temperatur eines Körpers ganz ausgeglichen sein: Jeder Punkt des Körpers hat dieselbe Temperatur. Man sagt dann die Temperaturverteilung sei *homogen*.

1.4 Mengenartige Größen

Größen, deren Werte sich auf einen Raumbereich beziehen, nennen wir mengenartige Größen.

Zu ihnen gehören:

- Energie
- Impuls
- Entropie
- elektrische Ladung
- Stoffmenge

Wenn man einen Gegenstand in Gedanken verdoppelt, also eine Kopie von ihm herstellt und neben den alten stellt, so hat das Gebilde, das aus beiden besteht, die doppelte Menge an Energie, den doppelten Impuls usw. (aber nicht die doppelte Temperatur oder die doppelte Geschwindigkeit).

Jede mengenartige Größe kann man sich vorstellen als ein Maß für etwas, das in dem entsprechenden Gegenstand enthalten ist, so wie Wasser in einem Behälter. Zwei Behälter enthalten doppelt so viel Wasser wie einer, und drei enthalten dreimal so viel.

Der Impuls ist ein Maß für den Schwung oder die Wucht, die ein Körper hat. Der ursprüngliche Name der Größe trifft die Bedeutung der Größe besser, als der Name „Impuls“: Man nannte ihn *Quantitas motus*, auf deutsch Bewegungsmenge. Zwei gleichartige Autos, die mit derselben Geschwindigkeit fahren, haben zusammen doppelt so viel Impuls (Schwung) wie ein einziges.

Die Entropie ist ein Maß für die in einem Körper enthaltene Wärme. Zwei gleichartige Körper derselben Temperatur haben zusammen doppelt so viel Entropie (Wärme) wie ein einziger.

Die elektrische Ladung ist ein Maß für etwas, wofür wir keinen umgangssprachlichen Ausdruck haben. Aber spüren können wir sie trotzdem. Auf zwei gleichartigen Körpern, die man auf dasselbe elektrische Potenzial gebracht hat, sitzt doppelt so viel Ladung wie auf einem.

Was die Stoffmenge betrifft, so ist die entsprechende Aussage eine Selbstverständlichkeit: Für zwei gleichartige Körper ist die Stoffmenge –und damit die Anzahl der Moleküle, aus denen er besteht– doppelt so groß wie für einen einzigen.

Noch eine Besonderheit der mengenartigen Größen: Man kann von jeder von ihnen sagen, ob sie erhalten ist oder nicht, d.h. ob man sie erzeugen kann, ob man sie vernichten kann, oder ob keines von beidem zutrifft. So gilt:

> Energie kann man nicht erzeugen und nicht vernichten.
> Impuls kann man nicht erzeugen und nicht vernichten.
> Elektrische Ladung kann man nicht erzeugen und nicht vernichten.

Aber:

> Entropie kann man erzeugen, aber nicht vernichten.

Und schließlich:

> Stoffmenge kann man erzeugen und vernichten.

Es hat keinen Sinn, von der Erhaltung oder Nichterhaltung von punktbezogenen Größen zu sprechen.

> Von jeder mengenartigen Größe kann man sagen, ob sie erhalten ist oder nicht.

1.5 Skalare und Vektoren

Hoffentlich bist du nicht der Meinung, das Einteilen der Größen sei verwickelt – denn es wird jetzt noch komplizierter. Wir betrachten noch einmal die verschiedensten Größen, diesmal aber unter einem anderen Gesichtspunkt.

Wir vergleichen zunächst zwei Angaben: eine Temperaturangabe und eine Geschwindigkeitsangabe. Du kannst dir vorstellen, es handele sich um die Lufttemperatur und die Windgeschwindigkeit an einer bestimmten Stelle zu einem bestimmten Zeitpunkt. Die Angaben lauten

ϑ = 19 °C
v = 5 m/s.

Fällt dir auf, dass die eine der beiden Angaben unvollständig ist? Wir wissen zwar, wie schnell sich die Luft bewegt, nämlich mit 5 m/s, aber wir wissen noch nicht in welche Richtung. Bei der Temperatur ist die Sache eindeutig, die Temperatur hat keine Richtung. Größen wie die Temperatur, die durch eine einzige Zahlenangabe festgelegt sind, nennt man *Skalare*. Größen, bei denen außerdem noch eine Richtung angegeben werden muss, heißen *Vektoren*. Hier einige Beispiele:

Skalare:
Energie, Masse, elektrische Ladung, elektrische Stromstärke, Temperatur, Entropie

Vektoren:
Geschwindigkeit, Impuls, Impulsstrom

Du wirst später noch weitere vektorielle Größen kennen lernen.

Wie geht man nun vor, wenn man jemandem einen Geschwindigkeitswert mitteilen will? Es gibt mehrere Möglichkeiten.

Am einfachsten geht es grafisch, also mit einer Skizze. Man stellt die Geschwindigkeit durch einen Pfeil dar. Die Länge gibt den Betrag der Geschwindigkeit an, in unserem Fall 5 m/s, und die Richtung des Pfeils entspricht der Bewegungsrichtung, Abb. 1.5.

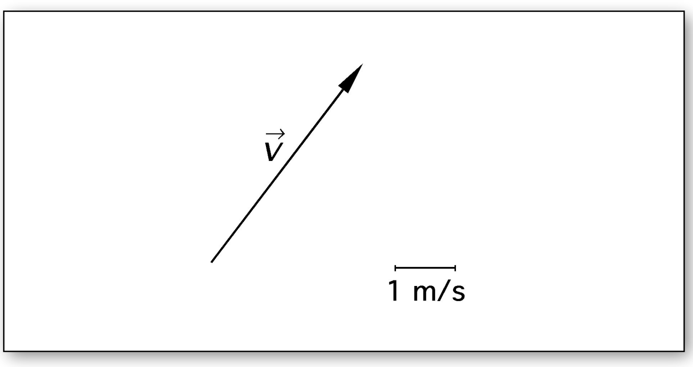


Abb. 1.5
Ein Vektor wird grafisch durch einen Pfeil dargestellt. Die Länge des Pfeils entspricht dem Betrag des Vektors.

So könnte man in eine Landkarte an den verschiedensten Stellen die Windgeschwindigkeit einzeichnen. Das Verfahren setzt natürlich voraus, dass man festlegt, welche Länge in der Skizze der Geschwindigkeitseinheit entspricht. In Abb. 1.5. haben wir die Geschwindigkeitseinheit 1 m/s als Strecke eingetragen.

Damit man einer Größe ansieht, dass sie ein Vektor ist, zeichnet man über das Größensymbol einen kleinen Pfeil. Man schreibt also

Geschwindigkeit: $\vec{v}$
Impuls: $\vec{p}$
Impulsstromstärke: $\vec{F}$.

Oft möchte man eine Vektorgröße, z.B. die Windgeschwindigkeit nicht durch eine Skizze, sondern durch reine Zahlenangaben beschreiben. Wie das geht, zeigt Abb. 1.6.

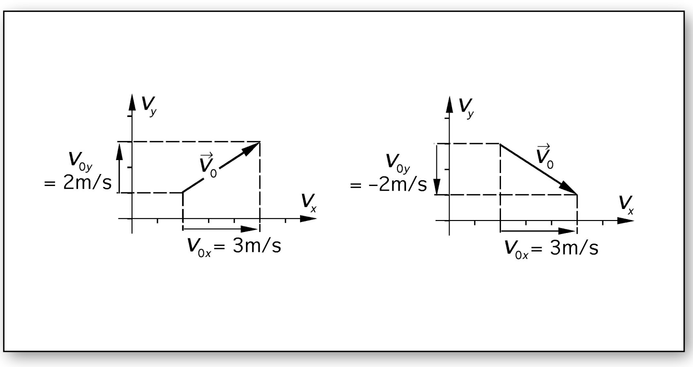


Abb. 1.6
Zerlegung eines Vektors in seine Komponenten

Wir wählen ein Koordinatensystem, dessen Achsen wir mit v_x und v_y bezeichnen. Wir zeichnen nun den Vektorpfeil der Geschwindigkeit an eine beliebige Stelle des Koordinatensystems. Vom Anfang und von der Spitze des Pfeils aus zeichnen wir zu jeder Koordinatenachse hin orthogonale Geraden. Man „projiziert" also den Vektorpfeil auf die beiden Koordinatenachsen. Man erhält so die x-Komponente v_{0x} der Geschwindigkeit und die y-Komponente v_{0y}. Im Dreidimensionalen kommt noch eine z-Komponente hinzu.

Diese drei Komponenten charakterisieren den Geschwindigkeitsvektor eindeutig. Im linken Teilbild ist:

v_{0x} = 3 m/s
v_{0y} = 2 m/s,

und im rechten:

v_{0x} = 3 m/s
v_{0y} = –2 m/s,

Die Komponenten haben eine einfache Bedeutung: Man kann sagen, dass sich die Luft gleichzeitig mit 3 m/s in die x-Richtung und mit 2 m/s (bzw. –2 m/s) in die y-Richtung bewegt.

Um den Geschwindigkeitsvektor zu charakterisieren, haben wir zwei Zahlenangaben gebraucht. Genau genommen waren es sogar drei, denn schließlich gehört auch noch die z-Komponente dazu, die in unserem Fall allerdings null ist:

v_{0z} = 0 m/s.

Was hier für die Geschwindigkeit erklärt wurde, gilt auch für andere Vektorgrößen. Auch der Impuls und der Impulsstrom sind durch je eine x-, y- und z-Komponente bestimmt. Früher war davon noch nicht die Rede, weil wir uns auf Bewegungen in einer einzigen Richtung beschränkt hatten. Wir hatten es also nur mit einer der drei Komponenten zu tun.

Der Wert einer skalaren Größe ist durch eine Zahlenangabe festgelegt. Der Wert einer vektoriellen Größe ist durch drei Zahlenangaben, die Werte der x-, der y- und der z-Komponente, festgelegt.

1.6 Stromlinien

Die Geschwindigkeit ist erstens eine punktbezogene Größe und zweitens ein Vektor. Das heißt:

1. Sie kann von Ort zu Ort einen anderen Wert haben, sie bildet eine Verteilung. Beispiel: Die Geschwindigkeitsverteilung der Luftbewegung (des Windes).

2. Sie hat an jedem Ort (in jedem Punkt) eine bestimmte Richtung.

Wir wollen die Geschwindigkeitsverteilung des Wassers in einem Fluss (genauer: an der Oberfläche des Flusses) grafisch darstellen. Es liegt auf der Hand, das so zu machen, wie es Abbildung 1.7 zeigt. Man zeichnet an möglichst vielen Stellen kleine Vektorpfeile ein. Der Vektor bezieht sich auf die Stelle, wo sein Anfangspunkt (nicht die Spitze) liegt.

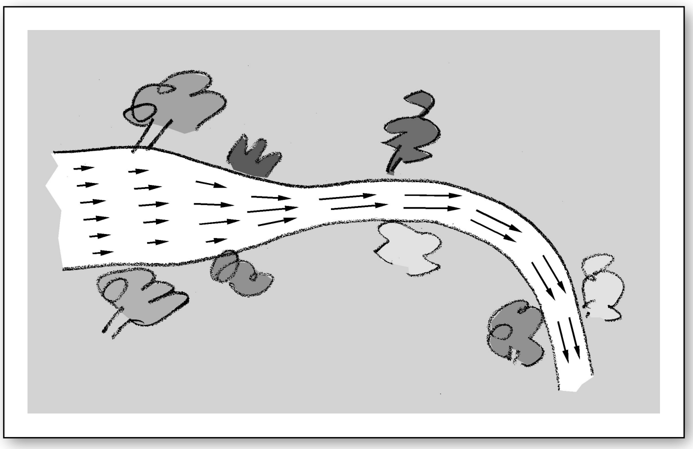


Abb. 1.7
Geschwindigkeitsverteilung des Wassers in einem Fluss, dargestellt mit Vektorpfeilen

Für manche Zwecke ist eine solche Darstellung zu unübersichtlich. Man zeichnet deshalb ein *Stromlinienbild*, Abb. 1.8. Eine Stromlinie ist eine Linie, die an jeder Stelle dieselbe Richtung hat, wie der Geschwindigkeitsvektor der Strömung. Man sieht dem Stromlinienbild also die Richtung der Strömung an jeder Stelle an. Man erfährt aber auch etwas über die Strömungsgeschwindigkeit: Dort wo die Linien dicht gedrängt liegen, ist sie hoch, wo die Linien weit voneinander entfernt sind, ist sie niedrig.

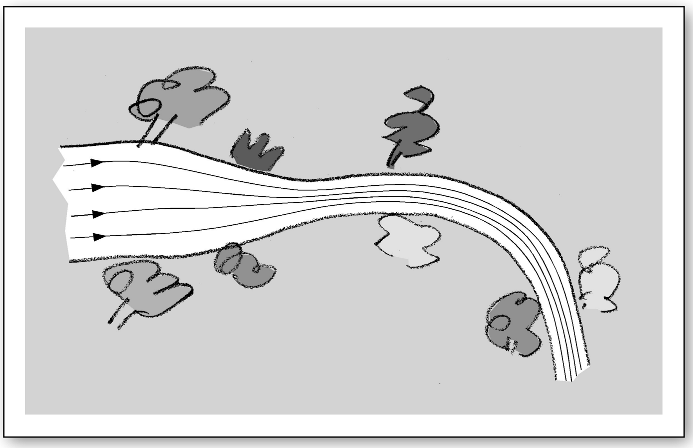


Abb. 1.8
Geschwindigkeitsverteilung des Wassers in einem Fluss, dargestellt mit Stromlinien

Aufgaben

1. Sieh im Internet beim Deutschen Wetterdienst nach, wie die verschiedenen Größenverteilungen grafisch dargestellt werden, mit denen eine Wetterlage beschrieben wird. Erkläre.

2. Manchmal kann man sich eine Stromlinie vorstellen als die Bahnkurve einer kleinen Wasserportion, aber nicht immer. Welche Voraussetzung muss erfüllt sein?

3. Beschreibe Verfahren für die Darstellung von Luftströmungen (Geschwindigkeitsverteilungen), die im Text nicht erwähnt wurden.

1.7 Die Addition von Vektoren

Oft muss man die Werte physikalischer Größen addieren.

Eine Batterie enthält eine Energiemenge von 10 kJ, eine andere enthält 12 kJ. Beide zusammen haben

10 kJ + 12 kJ = 22 kJ.

Die Temperatur in Stuttgart beträgt 22 °C, in Karlsruhe 26 °C. Der Mittelwert der Temperaturen ist

$$\frac{22\,°\mathrm{C} + 26\,°\mathrm{C}}{2} = 24\,°\mathrm{C}.$$

Eine 4,5-Volt-Batterie und eine 9-Volt-Batterie werden hintereinander geschaltet. Die neu entstandene Energiequelle hat eine Spannung von

4,5 V + 9 V = 13,5 V.

Die Beispiele zeigen, dass es die verschiedensten Gründe dafür gibt, Werte zu addieren: die Berechnung einer Gesamtmenge, die Berechnung eines Mittelwertes, die Hintereinanderschaltung von zwei Geräten.

Alle Größen dieser Beispiele waren Skalare. Es kommt aber auch vor, dass man solche Operationen mit Vektorgrößen ausführen möchte, und das heißt, man muss Vektoren addieren. Wie geht das?

Wir betrachten ein Beispiel, in dem Geschwindigkeiten addiert werden müssen.

Du gehst in einem Zug nach vorne. Die Geschwindigkeit des Zuges ist 75 km/h, deine Geschwindigkeit „relativ zum Zug" beträgt 4 km/h. In Bezug auf die Erde („im Bezugssystem der Erde") hast du eine Geschwindigkeit von 75 km/h + 4 km/h = 79 km/h.

Hier hatten die zu addierenden Geschwindigkeiten dieselbe Richtung – die Längsrichtung des Zuges –, und es war noch keinerlei Schwierigkeit zu erkennen. Wie sieht die Sache aber aus, wenn die zu addierenden Geschwindigkeiten unterschiedliche Richtungen haben? Wir nehmen an, du gehst mit 4 km/h auf einem Schiff (da ist mehr Platz als im Zug) quer zur Richtung des Schiffes. Das Schiff soll eine Geschwindigkeit von 20 km/h haben. Abb. 1.9 (a) zeigt dieentsprechenden Vektorpfeile $\vec{v}_P$ und $\vec{v}_S$ (P wie Person und S wie Schiff).

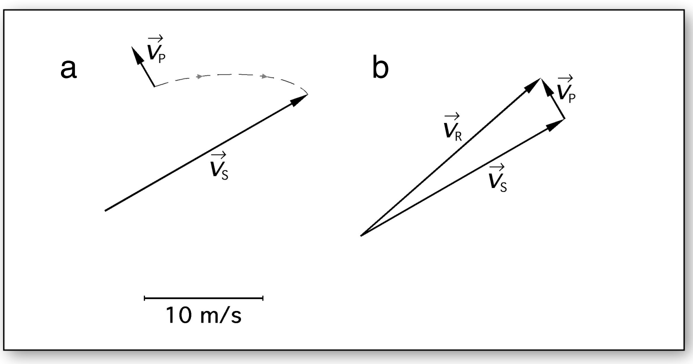


Abb. 1.9
(a) Geschwindigkeitsvektoren von Schiff (S) und Person (P).
(b) Grafische Addition der Vektoren

Von der Erde aus gesehen geschieht die „resultierende" Bewegung nicht mehr in der Längsrichtung des Schiffs, und auch nicht quer dazu, sondern schräg. Die Richtung des resultierenden Geschwindigkeitsvektors $\vec{v}_R$ liegt zwischen der Richtung von $\vec{v}_P$ und der von $\vec{v}_S$. Wie man den resultierenden Geschwindigkeitsvektor bekommt, zeigt Abb. 1.9. Man hängt die beiden Vektorpfeile einfach aneinander: den Anfang des einen ans Ende des anderen. Man zeichnet dann einen Pfeil vom Anfang des ersten zur Spitze des zweiten. Es ist egal, in welcher Reihenfolge man die Pfeile aneinander hängt, d.h. auch die Vektoraddition ist kommutativ.

> Addition von Vektoren: Die Pfeile der zu addierenden Vektoren werden aneinander gehängt.

In Abb. 1.10 ist die Addition von zwei Vektoren

$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_3$$

dargestellt. An den beiden Achsen des Koordinatensystems sind auch die Komponenten der drei beteiligten Vektoren eingezeichnet.

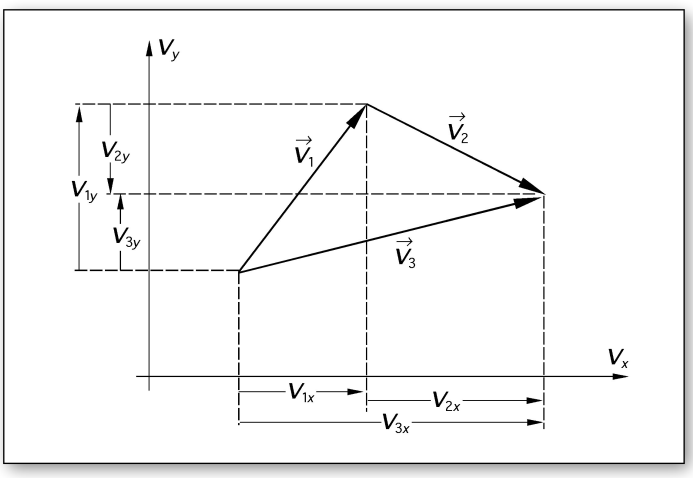


Abb. 1.10
Addition von Vektoren. Die Komponenten werden einzeln addiert.

Man sieht, dass für die Komponenten gilt:

$$v_{x1} + v_{x2} = v_{x3}$$

$$v_{y1} + v_{y2} = v_{y3}\,.$$

> Addition von Vektoren: Die Komponenten werden einzeln addiert.

2

Impuls und Impulsströme

2.1 Der Impuls

Impuls ist was in einem schnellen, schweren Körper enthalten ist. Umgangssprachlich kann man ihn durch die Wörter „Schwung“ oder „Wucht“ charakterisieren.

Der Zusammenhang zwischen Impuls (Schwung), Geschwindigkeit (wie schnell bewegt sich der Körper) und Masse *m* (wie schwer ist der Körper), lautet:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$$

Diese „Vektorgleichung“ steht abkürzend für die drei Gleichungen der Komponenten:

$$p_x = m \cdot v_x$$
$$p_y = m \cdot v_y$$
$$p_z = m \cdot v_z$$

Als Maßeinheit benutzen wir das Huygens (Hy), das zum SI-System passt: Wenn man die Masse in kg angibt und die Geschwindigkeit in m/s, so liefert die Gleichung den Impuls in Hy. Es ist also

Hy = kg · m/s.

Der Impuls wurde als physikalische Größe eingeführt durch den Philosophen, Mathematiker und Naturwissenschaftler René Descartes (1596 - 1650), Abb. 2.1. Descartes nannte die Größe *Quantitas motus*, zu deutsch: Bewegungsmenge. (Die Gelehrten verständigten sich damals auf Latein, so wie sie es heute auf Englisch tun.) Allerdings konnte die von Descartes eingeführte Größe nur positive Werte annehmen; und ein Vektor war sie schon gar nicht. Sie war also das, was wir heute als den Betrag des Impulsvektors bezeichnen. Darum war sie auch noch nicht sehr nützlich.

Abb. 2.1
René Descartes (links) und Christiaan Huygens (rechts)

Erst Christiaan Huygens (1629 - 1695) führte für den Impuls ein Vorzeichen ein. Dass der Impuls eine immer erhaltene Größe ist, war aber auch ihm noch nicht klar.

2.2 Impulsströme

Eindimensionale Bewegungen

Impuls kann von einem auf einen anderen Körper übergehen, oder strömen, oder fließen.

Wir betrachten zunächst Vorgänge, bei denen nur Impuls einer einzigen Richtung auftritt. Dabei können wir mit dem Impuls so umgehen, wie mit einem Skalar. Um zu vermeiden, dass Impuls in die Erde abfließt, machen wir die Experimente mit gut gelagerten Fahrzeugen oder der Luftkissenbahn.

Ein Körper A bewegt sich nach rechts und stößt gegen B, Abb. 2.2. Über den Federpuffer fließt Impuls von A nach B. Wenn A und B die gleiche Masse haben, geht der Impuls von A vollständig auf B über. Wenn A am Anfang 2 Hy hatte (und B 0 Hy), so hat B nach dem Stoß 2 Hy (und A 0 Hy).

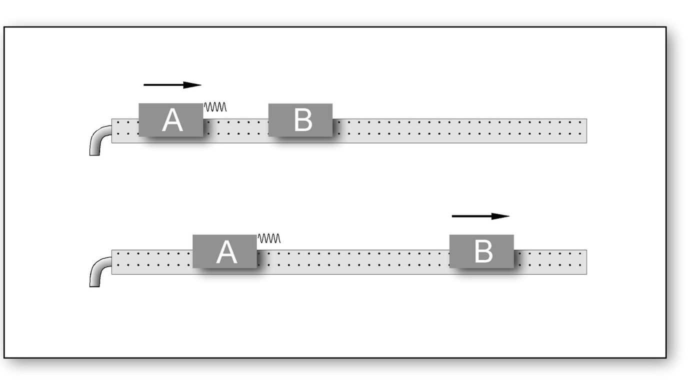


Abb. 2.2
Beim Zusammenstoß übergibt A seinen ganzen Impuls an B.

Ist A schwerer als B, Abb. 2.3, so wird nur ein Teil des Impulses übertragen.

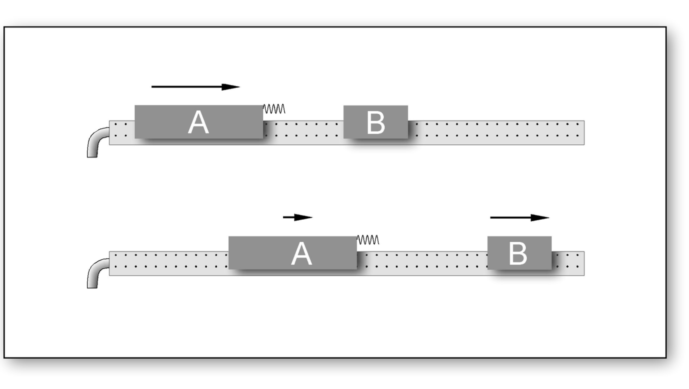


Abb. 2.3
Wenn Körper A schwerer ist als B, wird beim Stoß nur ein Teil seines Impulses auf B übertragen.

Und ist A leichter als B, Abb. 2.4, so gibt Körper A an B mehr Impuls ab als er hat. Dazu muss sich A „verschulden": Nach dem Zusammenstoß ist sein Impuls negativ.

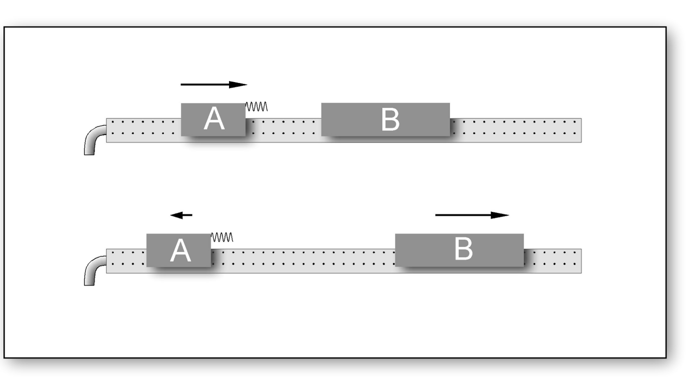


Abb. 2.4
Körper A ist leichter als B, und er gibt mehr Impuls ab als er hat: Sein Impuls wird negativ.

In allen drei Fällen ist das Impulserhaltungsgesetz erfüllt. Das kann man nachprüfen, indem man die Geschwindigkeiten vor und nach dem Stoß misst und die Impulswerte berechnet.

Wir können die Impulsübertragung auch dadurch beeinflussen, dass wir den Übertragungsvorgang ändern: Statt einer elastischen Feder verwenden wir einen „Puffer" aus einem unelastischen Material, z.B. aus Knetmasse. Dann hängen die beiden Gleiter nach dem Zusammenstoß aneinander, sie haben dieselbe Geschwindigkeit – egal wie die Massen von A und B sind, Abb. 2.5.

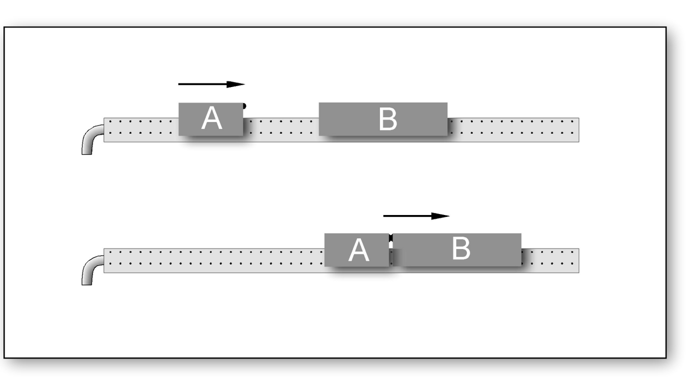


Abb. 2.5
Wenn der Puffer ganz unelastisch ist, bewegen sich die Fahrzeuge nach dem Stoß mit gleicher Geschwindigkeit.

Schließlich ersetzen wir den Stoßpartner B durch die Erde, Abb. 2.6 und 2.7. Wenn der Impuls mit einer Feder übertragen wird, bewegt sich der Körper A nach dem Stoß mit derselben Geschwindigkeit nach links, mit der er vorher nach rechts gelaufen ist. Die Erde bekommt also zweimal so viel Impuls, wie A am Anfang hatte.

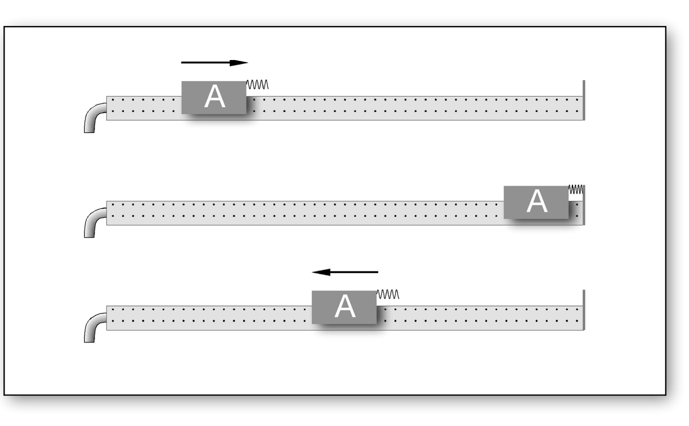


Abb. 2.6
Körper A „stößt gegen die Erde". Er gibt dabei doppelt so viel Impuls ab, wie er hat. Er hat darum nach dem Stoß negativen Impuls.

Nimmt man wieder einen unelastischen Puffer, so gibt Körper A seinen Impuls einfach an die Luftkissenbahn ab (von wo er weiter in die Erde fließt) und bleibt stehen.

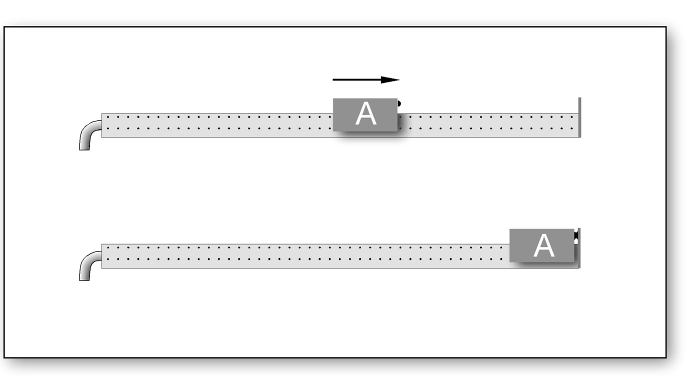


Abb. 2.7
Unelastischer Puffer. Stoßpartner Erde. Beide Körper (Körper A und die Erde) haben nach dem Stoß dieselbe Geschwindigkeit, nämlich 0 m/s.

Eine weitere Versuchsvariante zeigt Abb. 2.8. Die Feder zwischen A und B ist gespannt. Ein Faden zwischen den beiden Körpern verhindert, dass sie sich entspannt. Dann wird der Faden durchgetrennt. (Damit dabei kein Impuls von außen auf die ganze Anordnung gelangt, brennt man ihn mit einer Streichholzflamme durch.) Sobald der Faden reißt, setzen sich die beiden Körper in entgegengesetzte Richtungen in Bewegung: der eine hat positiven, der andere den gleichen Betrag negativen Impuls. Zusammen haben also beide vorher wie nachher 0 Hy.

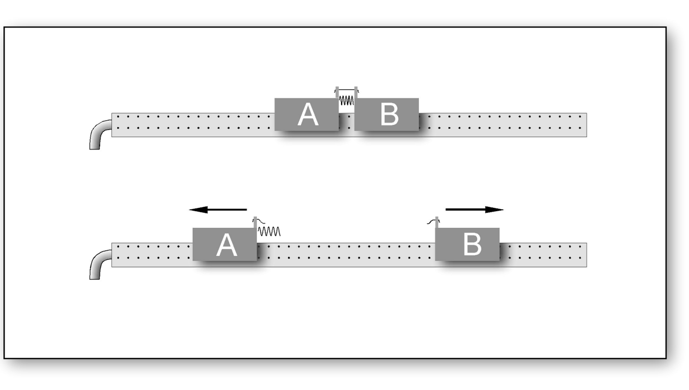


Abb. 2.8
Vor und nach dem Durchtrennen des Fadens ist der Gesamtimpuls 0 Hy.

Mehrdimensionale Bewegungen

Bei mehrdimensionalen Bewegungen macht sich der Vektorcharakter des Impulses bemerkbar. Wir untersuchen im Folgenden Bewegungen, die sich auf zwei Dimensionen beschränken. Die Ergebnisse, die wir finden werden, gelten aber auch für dreidimensionale Vorgänge.

Für die Experimente eignet sich zum Beispiel ein Airhockey-Tisch. Falls du nicht weißt was das ist: Ein Spielgerät ähnlich wie Tischfußball. Eine ebene waagrechte Tischfläche hat viele kleine Löcher, aus denen Luft ausströmt. Die Luft bildet ein Polster, auf dem die runden „Pucks" praktisch ohne Reibung gleiten können. Zur Not kann man die Versuche aber auch mit Münzen machen, die man auf einer möglichst glatten Fläche gegeneinander schießt. Die Münzen kommen zwar immer wieder schnell zum Stillstand – sie verlieren ihren Impuls an die Unterlage –, aber man sieht trotzdem recht gut, wie die Bewegung unmittelbar nach dem Stoß ist.

Wir schießen also einen Körper (Puck oder Münze) gegen einen anderen, und zwar auf verschiedene Arten, und beobachten. Der stoßende Körper A soll sich am Anfang immer in y-Richtung bewegen, Abb. 2.9 - 2.11. Die Gerade, auf der sich der Mittelpunkt von A bewegt, nennen wir g.

Wenn du eine Weile mit den Pucks oder Münzen herumspielst, bekommst du ein Gefühl dafür, wie sich die Körper beim Stoß verhalten.

Wenn der Mittelpunkt von B auf g liegt, läuft der ganze Bewegungsvorgang in einer Dimension ab, Abb. 2.9. Sowohl A als auch B haben nach dem Stoß nur y-Impuls (oder gar keinen). Solche Vorgänge haben wir schon untersucht.

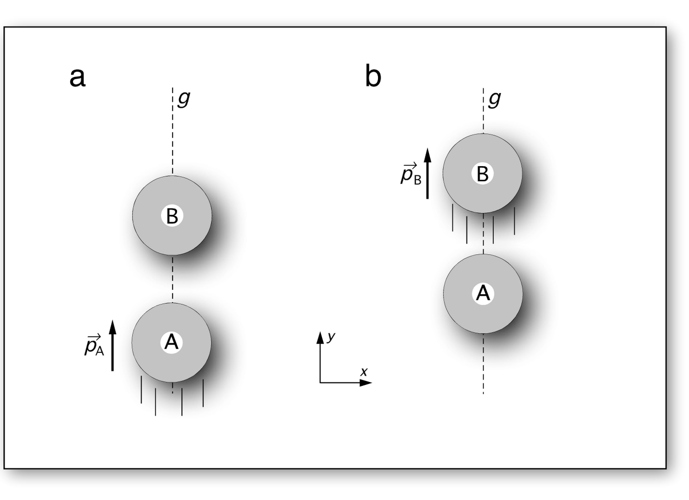


Abb. 2.9
Nichts Neues, der Impulserhaltungssatz wird befolgt.
(a) Vor dem Stoß, (b) nach dem Stoß

Liegt aber der Mittelpunkt von B etwas abseits von g, so haben die Impulsvektoren nach dem Stoß auch eine x-Komponente.

Du wirst feststellen, dass sich die beiden Körper nach dem Stoß in die verschiedensten Richtungen bewegen können; und es scheint zunächst aussichtslos, eine einfache Regel auszumachen, nach der sie sich richten.

Wenn du aber einmal darauf achtest, wie sich die Körper ganz bestimmt nicht bewegen, kommst du einem Gesetz auf die Spur, das der Bewegung zu Grunde liegt.

Versuche einmal, das in Abbildung 2.10 gezeigte Verhalten zu realisieren. Um konkret zu sein, nehmen wir an, Körper A habe am Anfang 0,1 Hy. Da er sich in y-Richtung bewegt, ist das reiner y-Impuls. Nach dem Stoß soll er still stehen, und B soll 0,1 Hy x-Impuls haben. Einen solchen Vorgang gibt es aber nicht.

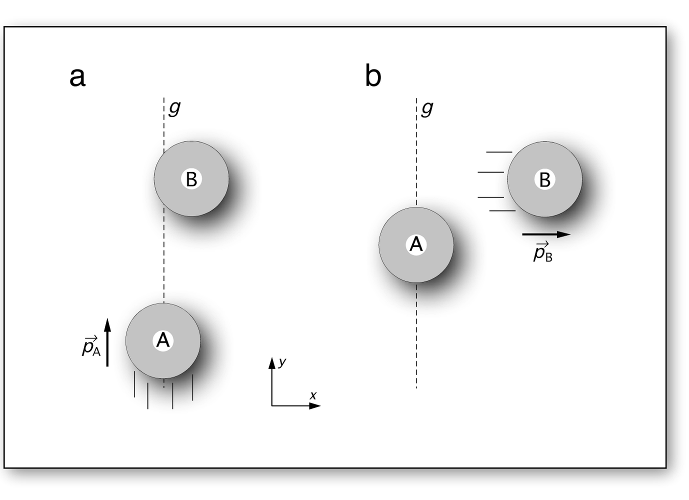


Abb. 2.10
Vor dem Stoß (a) hat A reinen *y*-Impuls, B hat gar keinen Impuls; nach dem Stoß (b) hätte B reinen *x*-Impuls, und A gar keinen. Einen solchen Vorgang gibt es nicht!

Oder der Stoßvorgang von Abb. 2.11: Wieder hat A am Anfang 0,1 Hy y-Impuls. Nach dem Stoß haben A und B je 0,05 Hy y-Impuls (zusammen also 0,1 Hy). Außerdem hat aber B noch 0,05 Hy x-Impuls. Auch diesen Vorgang gibt es nicht.

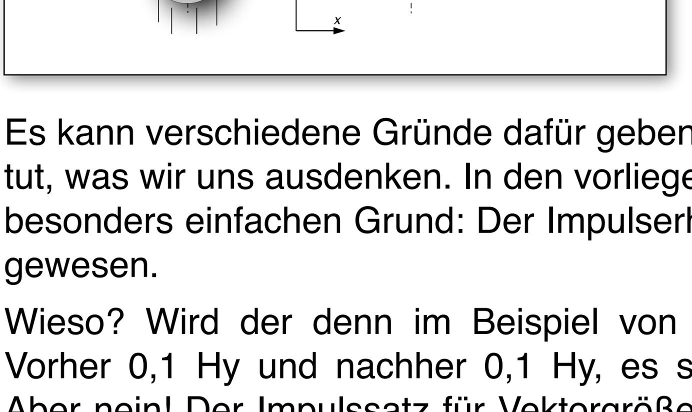


Abb. 2.11
A hat vor dem Stoß 0,1 Hy reinen *y*-Impuls; dieser soll sich beim Stoß gleichmäßig auf A und B verteilen. Außerdem soll B nach dem Stoß noch 0,05 Hy *x*-Impuls haben. Einen solchen Vorgang gibt es nicht!

Es kann verschiedene Gründe dafür geben, dass die Natur nicht das tut, was wir uns ausdenken. In den vorliegenden Fällen gibt es einen besonders einfachen Grund: Der Impulserhaltungssatz wäre verletzt gewesen.

Wieso? Wird der denn im Beispiel von Abb. 2.10 nicht befolgt? Vorher 0,1 Hy und nachher 0,1 Hy, es scheint doch zu stimmen. Aber nein! Der Impulssatz für Vektorgrößen wurde falsch angewendet. Es genügt nicht, dass der Betrag des Impulses vor und nach dem Stoß denselben Wert hat; der Impulserhaltungssatz muss für jede Komponente einzeln befolgt werden. Oder in anderen Worten: Auch die Richtung des Gesamtimpulses darf sich beim Stoß nicht ändern.

Der Impulserhaltungssatz gilt für jede Impulskomponente einzeln.

Nach den unmöglichen Vorgängen wollen wir nun aber auch die möglichen Vorgänge betrachten. Dabei machen wir es gleich ein bisschen komplizierter: Keiner der beiden Stoßpartner A und B befindet sich am Anfang in Ruhe. Sie haben vor dem Zusammenstoß die Impulse $\vec{p}_{A,v}$ bzw. $\vec{p}_{B,v}$ („v" wie vorher).
Die Summe der Impulsvektoren vor dem Stoß ist der Gesamtimpulsvektor $\vec{p}_g$, Abb. 2.12:

$$\vec{p}_{A,v} + \vec{p}_{B,v} = \vec{p}_g$$

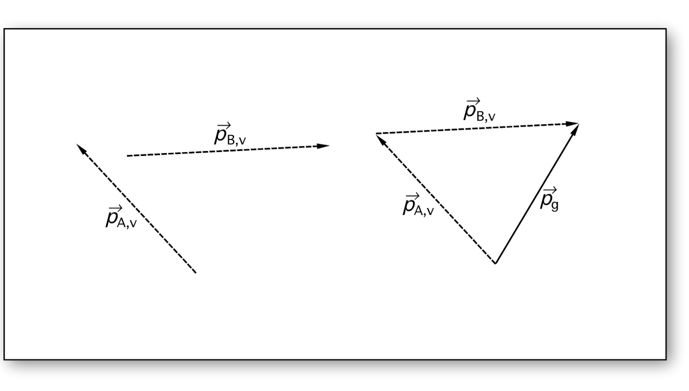


Abb. 2.12
Die beiden Impulsvektoren vor dem Stoß (Index v) werden zum Gesamtimpuls (Index g) vektoriell addiert.

Auch die Summe der Impulsvektoren danach $\vec{p}_{A,n}$ und $\vec{p}_{B,n}$ („n" wie nachher) muss gleich $\vec{p}_g$ sein, Abb. 2.13a. Oder: Die Impulssumme vor dem Stoß ist gleich der danach, Abb. 2.13b:

$$\vec{p}_{A,v} + \vec{p}_{B,v} = \vec{p}_{A,n} + \vec{p}_{B,n}$$

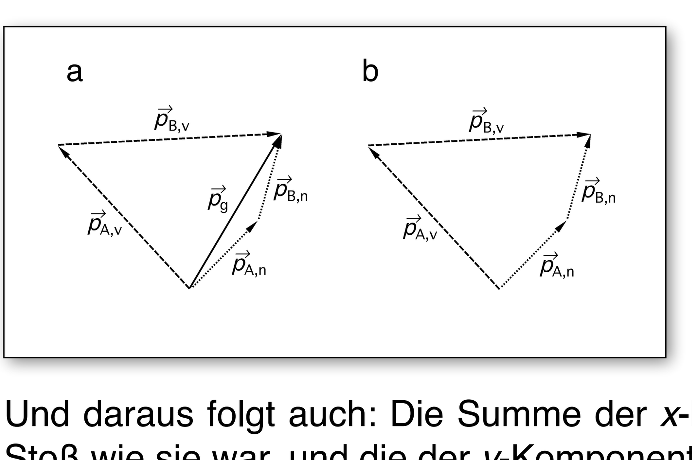


Abb. 2.13
(a) Die Vektorsumme der Impulse nach dem Stoß (Index n) ist gleich dem Gesamtimpuls.
(b) Die Impulsvektorsumme vor dem Stoß ist gleich der nach dem Stoß.

Und daraus folgt auch: Die Summe der *x*-Komponenten bleibt beim Stoß wie sie war, und die der *y*-Komponenten auch.

Abb. 2.14 zeigt die Impulsvektoren für Stöße, die (was die Impulserhaltung betrifft) erlaubt sind.

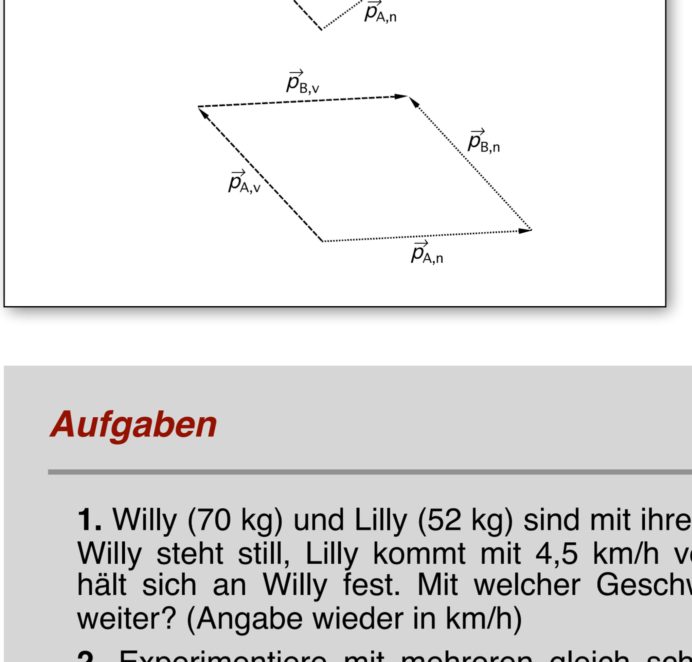


Abb. 2.14
Impulsbilanz für verschiedene Stoßvorgänge

Aufgaben

1. Willy (70 kg) und Lilly (52 kg) sind mit ihren Inline-Skates unterwegs. Willy steht still, Lilly kommt mit 4,5 km/h von hinten angefahren und hält sich an Willy fest. Mit welcher Geschwindigkeit rollen sie beide weiter? (Angabe wieder in km/h)

2. Experimentiere mit mehreren gleich schweren Münzen. Versuche eine Regel über das Verhalten der Münzen zu finden.

3. Experimentiere mit einer leichten und einer schweren Münze. Versuche eine Regel über das Verhalten der Münzen zu finden.

4. Der Impuls eines Eishockey-Pucks beträgt: p_x = 3 Hy, p_y = 0 Hy. Durch einen Schlag bekommt der Puck hinzu: Δp_x = –2 Hy, Δp_y = 2 Hy. Welchen Impuls hat er nachher. Berechne die Komponenten und bestimme das Ergebnis grafisch.

5. Ein Auto, das 1200 kg wiegt, rollt mit 30 km/h um eine 90°-Kurve. Die Reibung kann vernachlässigt werden. Wähle ein Koordinatensystem. Welchen Impuls hat das Auto vor der Kurve, welchen hat es danach? Um welchen Impuls unterscheiden sich Anfangs- und Endimpuls? Woher kommt dieser Impuls?

2.3 Impulsfluss bei Reibungsvorgängen

Ein Klotz A schlittert über ein Brett B, Abb. 2.15. Dabei wird A langsamer und B setzt sich in Bewegung.

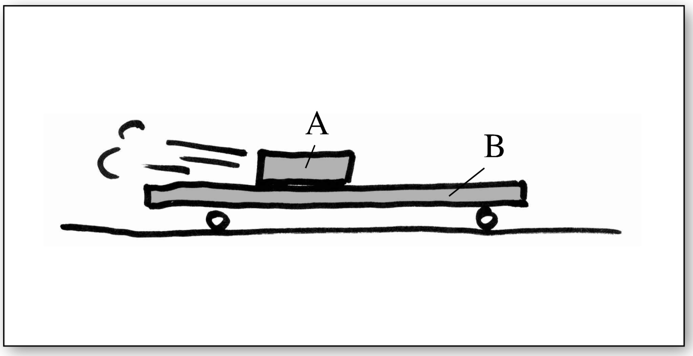


Abb. 2.15
Impuls fließt von A (höhere Geschwindigkeit) nach B (niedrigere Geschwindigkeit).

Es geht Impuls von A nach B. Der Vorgang kommt aber rasch zu einem Ende: Sobald die Geschwindigkeiten von A und B gleich geworden sind, geht kein weiterer Impuls vom einen zum anderen Körper.

Es gilt die Regel

Bei einem Reibungsvorgang fließt Impuls vom Körper mit der höheren zu dem mit der niedrigeren Geschwindigkeit.

Die Regel kommt dir wahrscheinlich bekannt vor. Sie ist von derselben Art wie die folgenden Aussagen:

Die elektrische Ladung fließt von selbst von Stellen höheren zu Stellen niedrigeren Potenzials.

Die Entropie fließt von selbst von Stellen höherer zu Stellen niedrigerer Temperatur.

Eine chemische Reaktion läuft von selbst von Stoffen höheren zu Stoffen niedrigeren chemischen Potenzials.

Wir setzen ein Fahrzeug nach rechts (in die positive x-Richtung) in Bewegung und überlassen es dann sich selbst. Wegen der unvermeidlichen Reibung kommt es bald zum Stillstand. Wir sagen „es rollt aus“. Dieses Verhalten entspricht unserer Regel: Der Impuls fließt vom Fahrzeug (Geschwindigkeit größer als null) in die Erde (Geschwindigkeit null).

Aufgaben

1. Man könnte denken, dass unsere Regel verletzt ist, wenn der Klotz in Abb. 2.15 nach links über das Brett rutscht. Zeige, dass sie auch hier gilt.

2. Ist die Regel anwendbar auf die Vorgänge von Abb. 2.2 und 2.3?

2.4 Impulspumpen

Wir waren der Frage nachgegangen, an wen ein Körper, dessen Geschwindigkeit abnimmt, seinen Impuls verliert. Wir hatten gefunden, dass der Impuls in die Erde fließt. Wir stellen nun die umgekehrte Frage: Woher bekommt denn ein Fahrzeug seinen Impuls, wenn es beschleunigt wird?

Willy zieht mit Hilfe eines Seils an einem Wagen, Abb. 2.16. Während er zieht, wird der Wagen schneller: Der Impuls des Wagens nimmt zu. Woher kommt dieser Impuls? Von Willy? Ja und nein. Er kommt zwar von Willy, aber dessen Impuls nimmt nicht ab. Sein Impuls war und bleibt 0 Hy. Willy muss ihn also selbst irgendwo anders her bekommen.

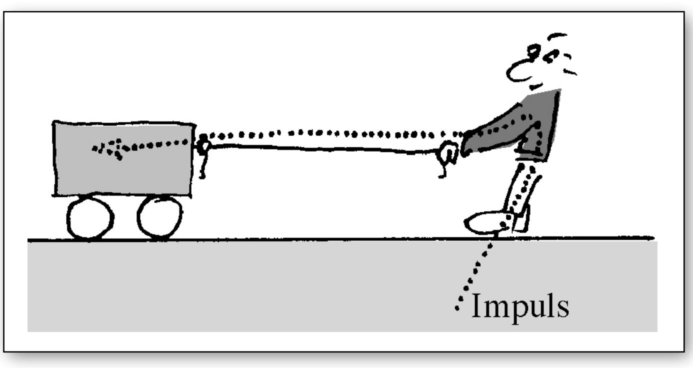


Abb. 2.16
Willy pumpt Impuls aus der Erde in den Wagen.

Wir ändern das Experiment etwas ab, Abb. 2.17. Lilly zieht am Seil, der Impuls des linken Wagens nimmt zu. Der rechte Wagen, einschließlich Lilly, setzt sich auch in Bewegung, aber nach links. Der rechte Wagen (+ Lilly) bekommt also negativen Impuls, oder in anderen Worten: Er gibt positiven Impuls ab. Während des Ziehens geht Impuls vom rechten Wagen (+ Lilly) durch das Seil in den linken. Dafür, dass der Impuls von rechts nach links geflossen ist, hat Lilly mit ihren Muskeln gesorgt. Sie hat sich als „Impulspumpe" betätigt.

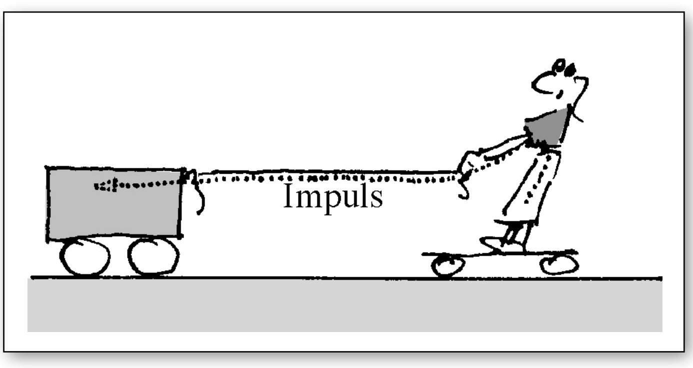


Abb. 2.17
Lilly pumpt Impuls aus sich selbst in den Wagen.

Wir sehen nun auch, was im Fall der Abbildung 2.16 passiert sein muss: Hier hat Willy Impuls aus der Erde durch das Seil in den Wagen gepumpt. Dass der Impuls der Erde dabei negativ wird, kann man genauso wenig sehen, wie die Zunahme des Erdimpulses, wenn ein Fahrzeug ausrollt (und dabei Impuls an die Erde abgibt).

Wir betrachten noch einige andere Beispiele dafür, dass Impuls von einem Körper in einen anderen gepumpt wird.

In Abb. 2.18 zieht Willy die beiden Wagen A und B zu sich heran, so dass die Wagen schneller werden. Der Impuls von A nimmt dabei zu, der von B nimmt immer größere negative Werte an. Willys Impuls ist und bleibt 0 Hy. Er befördert also Impuls vom rechten in den linken Wagen. Er steht auf einem Skateboard, damit sichergestellt ist, dass kein Impuls von der Erde kommt oder in die Erde geht.

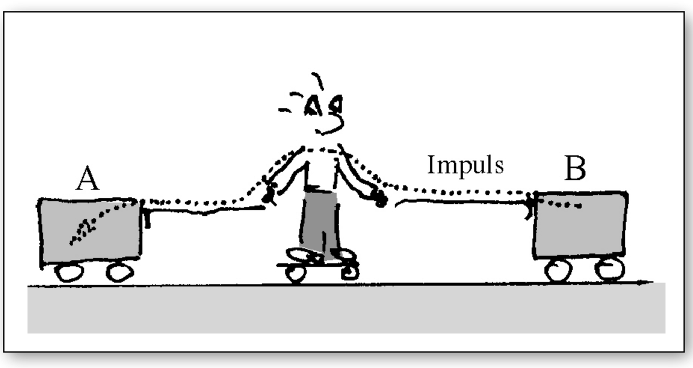


Abb. 2.18
Willy pumpt Impuls aus dem rechten Wagen in den linken.

Ein Auto fährt mit zunehmender Geschwindigkeit, d.h. sein Impuls nimmt zu. Hier arbeitet der Motor als Impulspumpe. Er befördert Impuls aus der Erde über die Antriebsräder (bei Personenwagen meist die Vorderräder) ins Auto, Abb. 2.19.

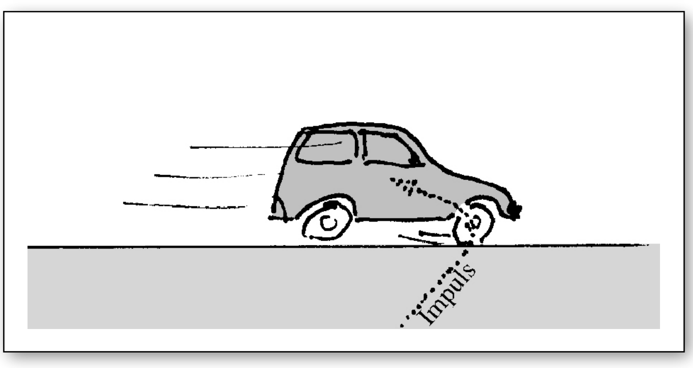


Abb. 2.19
Der Motor des Autos pumpt Impuls aus der Erde ins Auto.

Ein Spielzeugauto mit Fernsteuerung steht auf einem Stück Pappe, unter dem sich Rollen befinden, Trinkhalme oder Bleistifte zum Beispiel, Abb. 2.20. Man startet das Auto, und zwar so, dass es nach rechts fährt. Sein Impuls nimmt während des Anfahrvorgangs zu. Gleichzeitig rollt aber die Pappunterlage nach links weg, d.h. ihr Impuls wird negativ. Der Motor des Autos hat also Impuls aus der Unterlage in den Wagen gepumpt.

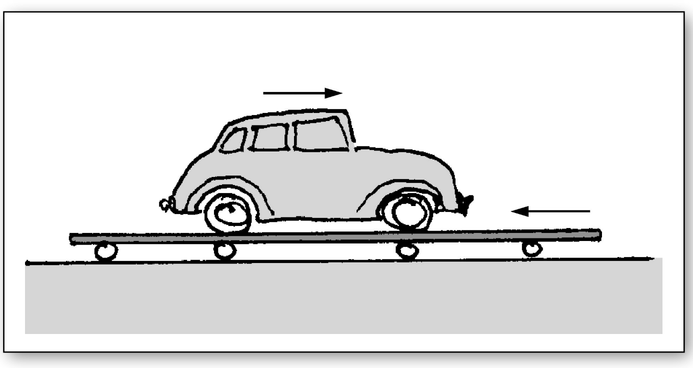


Abb. 2.20
Der Motor des Spielzeugautos „pumpt" Impuls aus der Pappunterlage ins Auto.

Blättere noch einmal zurück und sieh dir Abb. 2.8 an. Nach dem Durchtrennen des Fadens, setzen sich die beiden Wagen in Bewegung, der rechte nach rechts und der linke nach links. Der rechte Wagen hat also (positiven) Impuls bekommen, der linke hat (positiven) Impuls verloren. Hier wirkt die Feder als Impulspumpe. Während sie sich entspannt, befördert sie Impuls vom linken in den rechten Wagen.

Wie jede andere Pumpe, so brauchen auch unsere Impulspumpen Energie. Die Impulspumpe Automotor bekommt sie mit dem Benzin, die Muskeln mit der Nahrung. Wo diese Energie schließlich hingeht, werden wir später untersuchen. Im Augenblick wollen wir uns nur merken:

> Eine „Impulspumpe" (z.B. ein Motor) befördert Impuls von einem Körper niedrigerer Geschwindigkeit zu einem Körper höherer Geschwindigkeit. Die Impulspumpe braucht Energie.

2.5 Impulsleiter und -nichtleiter

Eine notwendige Voraussetzung dafür, dass Impuls von A nach B fließen kann, ist, dass zwischen A und B eine Verbindung besteht. Dabei genügt nicht irgendeine beliebige Verbindung. Die Verbindung muss so beschaffen sein, dass sie für den Impuls durchlässig ist. Es muss eine „impulsleitende" Verbindung sein. Wie sehen solche impulsleitenden Verbindungen aus? Was für Gegenstände leiten den Impuls? Was für Gegenstände leiten ihn nicht?

In Abbildung 2.21a drückt Willy über eine Stange gegen einen Wagen. Der Wagen wird schneller, sein Impuls nimmt zu. Willy pumpt also Impuls aus der Erde in den Wagen. In der Stange fließt der Impuls von links nach rechts. In Abbildung 2.21b wird auch ein Wagen mit Impuls geladen – diesmal dadurch, dass Lilly an dem Wagen zieht, und zwar wieder mit Hilfe der Stange. Hier fließt der Impuls in der Stange von rechts nach links.

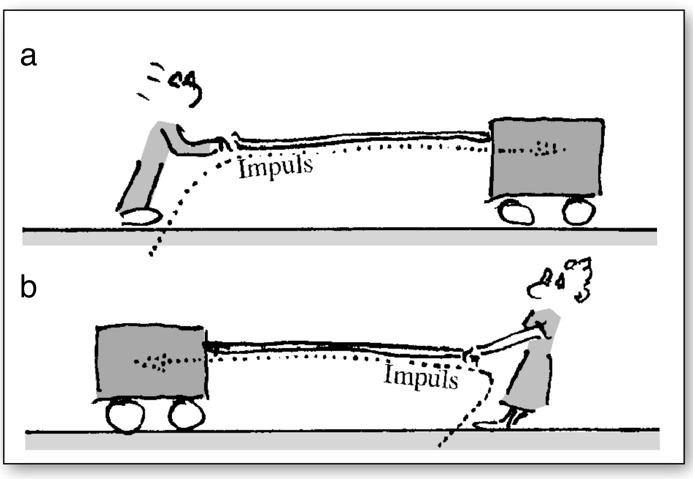


Abb. 2.21
Impuls wird aus der Erde in den Wagen gepumpt.
(a) Der Impuls fließt in der Stange nach rechts.
(b) Der Impuls fließt in der Stange nach links.

An diesen beiden Vorgängen erkennt man, dass die Stange ein Impulsleiter ist. Es ist klar, dass es auf die genaue Form der Stange nicht ankommt. Ebenso wenig kommt es auf das Material an, aus dem die Stange besteht, vorausgesetzt, es ist ein festes Material. Wir schließen:

> Feste Materialien leiten den Impuls.

Abb. 2.22 zeigt Lilly, wie sie versucht, den Wagen in Bewegung zu setzen, und zwar dadurch, dass sie gegen die Luft drückt – um herauszufinden, ob die Luft den Impuls bis zum Wagen weiterleitet, woran sie allerdings nicht ernsthaft glaubt. Sie findet:

> Luft leitet den Impuls nicht.

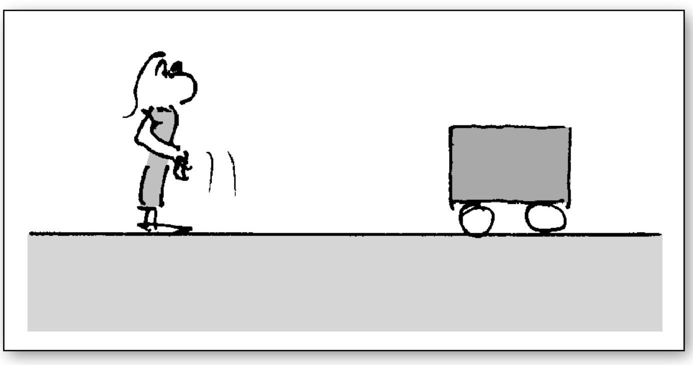


Abb. 2.22
Luft leitet den Impuls nicht.

Das wird bei der Luftkissenbahn ausgenutzt: Die Luft zwischen Schiene und Gleiter verhindert, dass der Impuls des Gleiters in die Schiene abfließt.

Allerdings gilt dieser Satz nur mit Einschränkungen. Wir werden später sehen, wie man ihn austricksen kann.

In Abb. 2.23 lädt Willy einen Wagen mit Impuls, indem er eine Stange über den Wagen schiebt. Dabei rutscht die Stange über die Oberseite des Wagens; sie ist also nicht am Wagen befestigt. Auf diese Art bekommt Willy tatsächlich Impuls in den Wagen, allerdings nicht sehr wirkungsvoll.

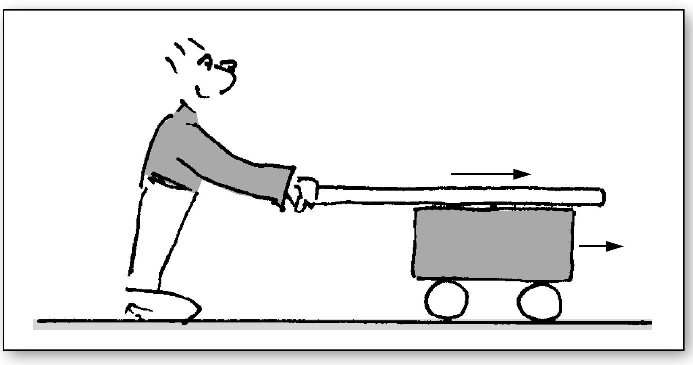


Abb. 2.23
Impulsübertragung bei einem Reibungsvorgang

Man sieht, dass die Impulsübertragung um so besser geht, je größer die *Reibung* zwischen Stange und Wagen ist. Gleitet die Stange leicht über den Wagen, so ist der Impulsstrom von der Stange zum Wagen gering. Wenn die Reibung groß ist, wenn also zum Beispiel Stange und Wagen eine raue Oberfläche haben, so ist die Impulsübertragung gut. Wir schließen:

> Reiben zwei Gegenstände aneinander, so fließt Impuls vom einen zum anderen: je größer die Reibung, desto mehr.

Im Grunde haben wir die Gültigkeit dieser Regel schon immer vorausgesetzt: Damit der Impuls eines Gegenstandes nicht in die Erde abfließt, muss man dafür sorgen, dass zwischen Gegenstand und Erde keine impulsleitende Verbindung besteht; man muss dafür sorgen, dass die Reibung gering ist.

Die wichtigste Vorrichtung, die man benutzt, um die Reibung zwischen einem Körper und der Erde zu vermindern, ist das Rad.

> Räder dienen der Impulsisolation.

2.6 Fließgleichgewichte

Ein Auto beschleunigt: Der Motor pumpt Impuls aus der Erde ins Auto hinein. Je schneller das Auto fährt, desto größer wird aber die Luftreibung, desto mehr Impuls verliert es. Bei einer bestimmten Geschwindigkeit wird schließlich gerade genauso viel Impuls ins Auto hineingepumpt wie durch die Reibung wieder abfließt. Netto bleibt also nichts übrig, der Impuls des Autos nimmt nicht weiter zu, Abb. 2.24.

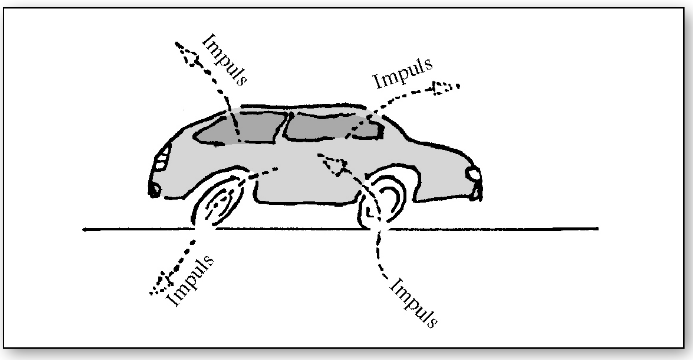


Abb. 2.24
Auto, das mit konstanter Geschwindigkeit fährt. Der ganze Impuls, den der Motor ins Auto pumpt, fließt wegen der Reibung wieder in die Umgebung ab.

Diese Situation liegt immer vor, wenn ein Auto auf ebener Strecke mit konstanter Geschwindigkeit fährt. Der Zustrom von Impuls ist gleich dem Wegstrom.

Die Situation lässt sich mit einer anderen vergleichen, bei der Wasser die Rolle des Impulses übernimmt, Abb. 2.25: Der Eimer mit dem Loch entspricht dem Auto. Der Eimer hat ein Leck für das Wasser, so wie das Auto ein Impulsleck hat. In den Eimer fließt ständig neues Wasser nach, aber genauso viel Wasser fließt durch das Loch wieder heraus, so dass sich die Wassermenge im Eimer nicht ändert.

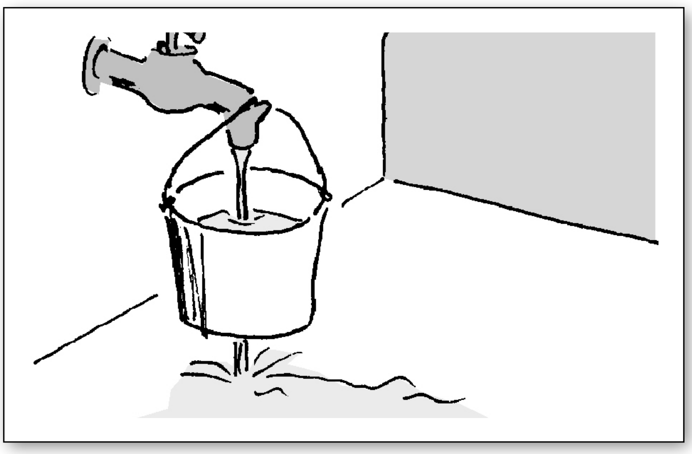


Abb. 2.25
Durch das Loch fließt genauso viel Wasser ab, wie aus dem Wasserhahn zufließt. Die Wassermenge im Eimer bleibt konstant.

Einen solchen Vorgang, bei dem sich der wegfließende Strom gerade so einstellt, dass er genauso groß ist wie der zufließende, nennt man *Fließgleichgewicht*.

Fließgleichgewicht: Der Wegstrom stellt sich so ein, dass er gleich dem Zustrom ist.

Ein Fließgleichgewicht liegt häufig vor, wenn sich etwas mit konstanter Geschwindigkeit bewegt.

So pumpt ein Radfahrer durch das Treten Impuls ins Fahrrad (+ Person). Ein gleich großer Strom fließt wegen der Reibung über Luft und Räder ab. Entsprechendes gilt für Flugzeuge und Schiffe.

Aufgaben

1. Beschreibe die folgenden Fahrzustände eines Autos, indem du angibst, was mit dem Impuls geschieht.

(a) Das Auto fährt an.
(b) Das Auto rollt langsam im Leerlauf.
(c) Das Auto wird gebremst.
(d) Das Auto fährt mit hoher, konstanter Geschwindigkeit.

2. Manchmal bewegt sich ein Körper mit konstanter Geschwindigkeit, obwohl kein Fließgleichgewicht vorliegt. Warum bleibt dann der Impuls konstant?

2.7 Druck-, Zug- und Biegespannung

In Abb. 2.26a setzt Willy einen Wagen in Bewegung. Durch die Stange fließt *x*-Impuls (die kurzen Pfeile) von links nach rechts, d.h. in die positive *x*-Richtung. In Abb. 2.26b zieht er an der Stange, und es fließt *x*-Impuls von rechts nach links, in die negative *x*-Richtung. In Abb. 2.26c schließlich drückt er den Wagen von der Seite aus nach vorne. Der *x*-Impuls fließt jetzt quer zur *x*-Richtung.

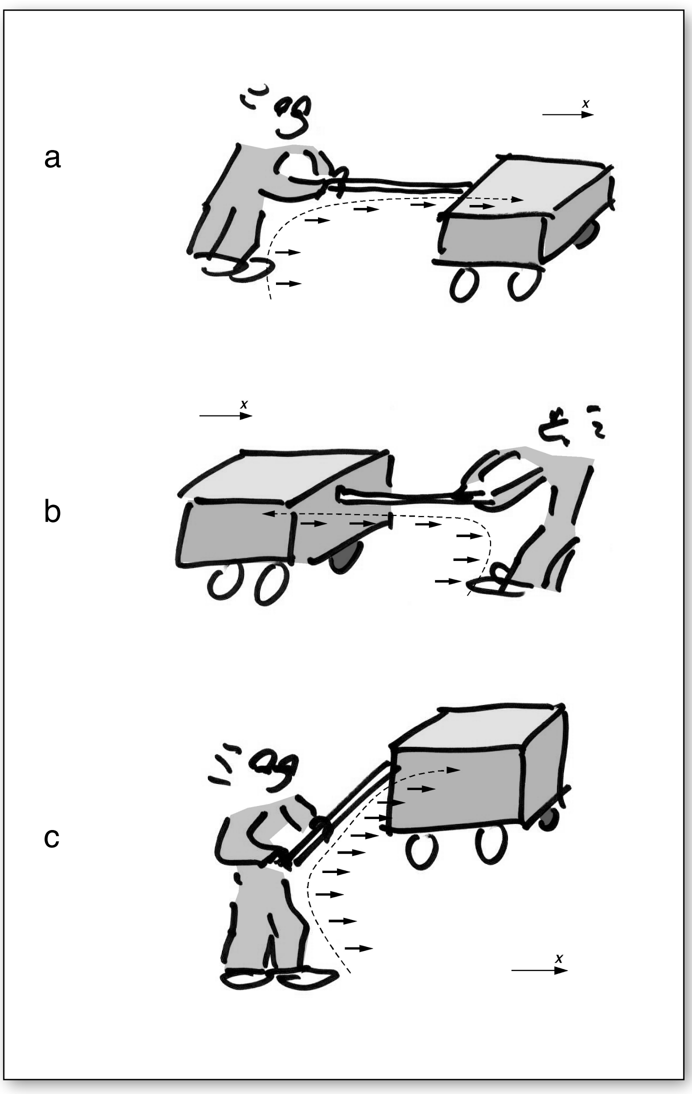


Abb. 2.26
(a) In der Stange fließt x-Impuls nach rechts (in die positive x-Richtung).
(b) In der Stange fließt x-Impuls nach links (in die negative x-Richtung).
(c) In der Stange fließt x-Impuls nach hinten (quer zur x-Richtung).

Versetze dich nun in die Lage der Stange. Würdest du in den drei Fällen einen Unterschied spüren? Natürlich. Im ersten Fall würdest du eine Druckspannung spüren, im zweiten eine Zugspannung und im dritten eine „Biegespannung".

Wir haben daher die folgende Regel:

x-Impuls fließt in die positive *x*-Richtung:	*Druckspannung*
x-Impuls fließt in die negative *x*-Richtung:	*Zugspannung*
x-Impuls fließt quer zur *x*-Richtung:	*Biegespannung*

Die entsprechenden Regeln gelten für *y*- und *z*-Impuls.

Abb. 2.27a zeigt einen Lastzug, der gerade anfährt. Der Motor pumpt Impuls aus der Erde in den Lastwagen und über die Anhängerkupplung nach links in den Anhänger. Wir wissen, dass die Kupplungsstange unter Zugspannung steht – in Übereinstimmung mit unserer Regel.

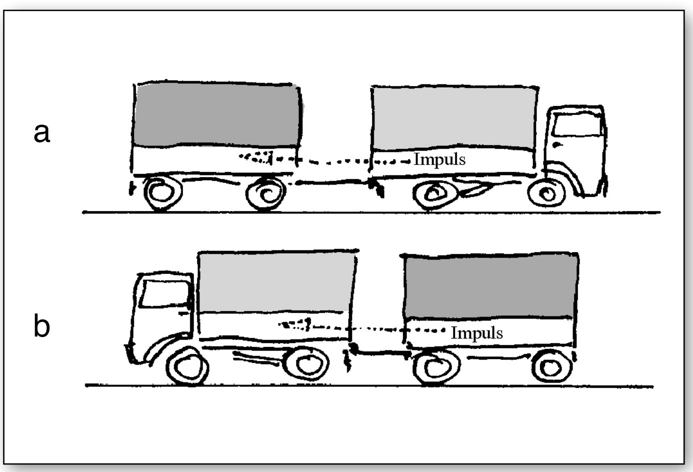


Abb. 2.27
Ein Lastzug fährt einmal nach rechts (a) und einmal nach links (b) an. Beide Male steht die Kupplungsstange unter Zugspannung, und beide Male fließt *x*-Impuls in die negative *x*-Richtung.

Wir betrachten nun einen Lastzug, der nach links anfährt, Abb. 2.27b. Hier pumpt der Motor negativen Impuls in den Lastzug hinein, d.h. positiven Impuls aus ihm heraus. Daher fließt (positiver) Impuls durch die Kupplungsstange nach links. Die Kupplungsstange steht natürlich wieder unter Zugspannung. Du siehst: Auch hier gilt unsere Regel.

Einer Stange sieht man es nicht an, unter was für einer Spannung sie steht, d.h. man sieht ihr auch nicht an, ob und in welche Richtung ein Impulsstrom in ihr fließt. Es gibt aber Gegenstände, denen man ihren Spannungszustand ansieht: alle elastisch verformbaren Gegenstände. Sie verlängern sich unter Zugspannung, verkürzen sich unter Druckspannung und verbiegen sich unter Biegespannung. Man sieht ihnen also auch an, ob und in welche Richtung ein Impulsstrom durch sie hindurchfließt:

Verkürzung:	*Druckspannung*
Verlängerung:	*Zugspannung*
Verbiegung:	*Biegespannung*

Aufgaben

1. Ein Lastzug fährt mit konstanter, hoher Geschwindigkeit nach rechts. Unter was für einer Spannung (Druck oder Zug) steht die Anhängerkupplung? Skizziere den Weg des Impulses.

2. Lilly beschleunigt einen Wagen nach links, und zwar indem sie schiebt. Dabei herrscht in ihren Armen eine Druckspannung. In welche Richtung fließt der Impulsstrom in den Armen?

3. Der ICE 1 hat vorne und hinten je einen „Triebkopf" (= Lokomotive). Der eine zieht, der andere schiebt. Zeichne in eine Skizze des Zuges die Impulsströme ein.

2.8 Impulsstromkreise

Es kann sein, dass irgendwo ein Impulsstrom fließt und sich trotzdem nirgends eine Impulsmenge ändert. Abb. 2.28 zeigt ein Beispiel: Lilly zieht eine Kiste mit gleich bleibender Geschwindigkeit über den Boden.

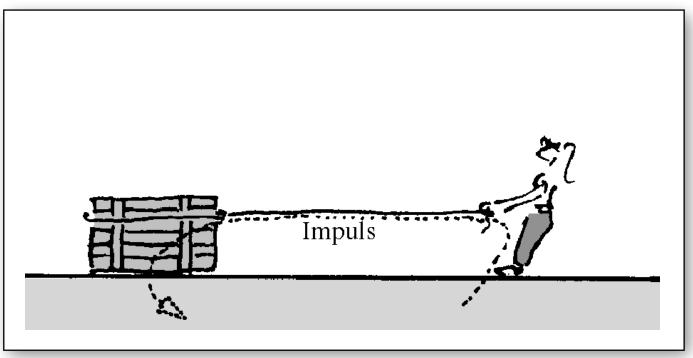


Abb. 2.28
Obwohl ein Impulsstrom fließt, häuft sich nirgends Impuls an.

Wir stellen wieder unsere alte Frage: Welchen Weg nimmt der Impuls? Die Antwort fällt dir hoffentlich nicht schwer. Lilly pumpt Impuls aus der Erde über das Seil in die Kiste. Aus der Kiste fließt er, wegen der Reibung zwischen Kistenunterseite und Erdboden, in die Erde zurück. Wir können hier also sagen, der Impuls fließt „im Kreis herum", auch wenn wir den genauen Rückweg durch die Erde nicht kennen.

Abb. 2.29 zeigt eine veränderte Version des Experiments von Abb. 2.28: Die Kiste wird hier nicht über den Erdboden, sondern über ein auf Rollen gelagertes Brett gezogen.

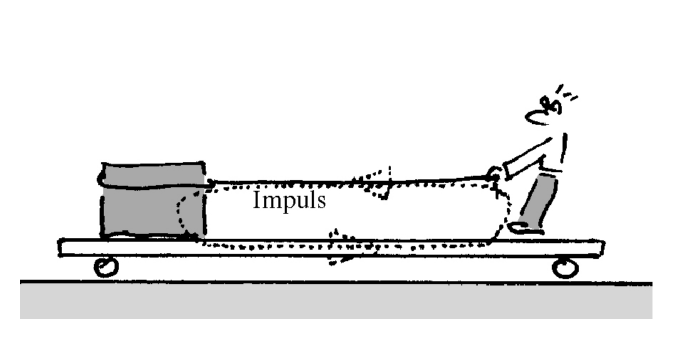


Abb. 2.29
Geschlossener Impulsstromkreis

Der Weg des Impulses ist in diesem Fall noch einfacher. Da das Brett auf Rollen liegt, kann der Impuls nicht in die Erde abfließen, und Willy kann keinen Impuls aus der Erde herauspumpen. Er pumpt also Impuls aus dem Brett heraus, der Impuls fließt weiter durch das Seil in die Kiste, und aus der Kiste fließt er zurück ins Brett. Der Impuls geht hier also wieder in einem geschlossenen „Kreis" herum. Und diesmal ist der Weg überall klar erkennbar. Wir können sagen, der Impulsstrom bilde einen *Stromkreis*.

Dass der Impuls im Seil wirklich nach links und im Brett nach rechts fließt, erkennt man auch an den Spannungen: Das Seil steht unter Zugspannung, also fließt der Impuls nach links. Das Brett steht unter Druckspannung, also fließt der Impuls nach rechts.

> Impuls kann in einem geschlossenen Stromkreis fließen. Der Impuls nimmt dann an keiner Stelle zu oder ab. Ein Teil jedes Impulsstromkreises steht unter Druckspannung, ein anderer unter Zugspannung.

Noch einfacher ist die Situation von Abb. 2.30. Hier fließt der Impulsstrom im Kreis, obwohl sich nichts mehr bewegt, ja sogar, obwohl wir gar keine „Impulspumpe" mehr haben.

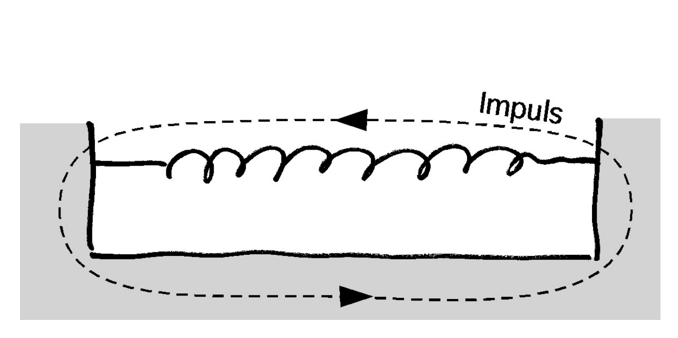


Abb. 2.30
Impulsstrom ohne Antrieb

Dass etwas ohne Antrieb strömt, wird dich vielleicht überraschen. Schließlich hatten wir früher festgestellt, dass man einen Antrieb braucht, wenn man einen Strom fließen lassen möchte. Wir sehen nun, dass diese Regel nicht immer gilt. Es gibt Ströme ohne Antrieb. Dass man keinen Antrieb braucht, bedeutet nichts anderes, als dass dem Strom kein Widerstand entgegensteht.

Es gibt auch elektrische Leiter, die keinen Widerstand haben, die *Supraleiter*. In einem elektrischen Stromkreis aus supraleitendem Material kann ein elektrischer Strom ohne Antrieb fließen.

Widerstandslose elektrische Stromkreise sind selten, widerstandslose Impulsstromkreise dagegen häufig. Abbildung 2.31 zeigt ein weiteres Beispiel.

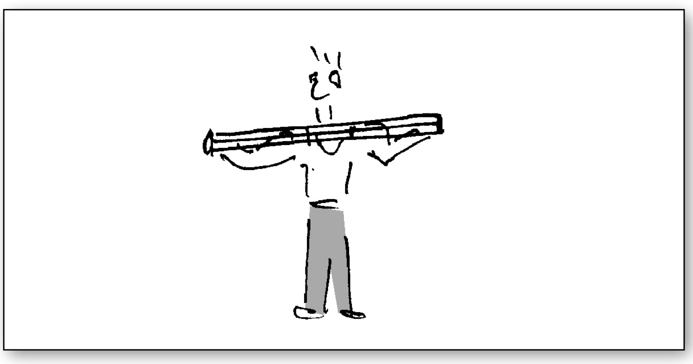


Abb. 2.31
Geschlossener Impulsstromkreis

2.9 Die Impulsstromstärke

Ein Impulsstrom kann größer oder kleiner sein. Ein Maß für dieses „größer" oder „kleiner" ist die *Impulsstromstärke*. Sie gibt an, wie viel Impuls in der Zeiteinheit durch eine Fläche hindurchfließt (wie viele Huygens durch die Fläche pro Sekunde hindurchgehen). Das Symbol für die Impulsstromstärke ist F, die Maßeinheit Hy/s, abgekürzt Newton (N).

Fließen durch ein Seil pro Sekunde 12 Huygens, so ist

$$F = 12 \text{ Hy/s}.$$

Für die Maßeinheit Hy/s benutzt man die Abkürzung *Newton* (N):

$$\text{N} = \frac{\text{Hy}}{\text{s}}.$$

Es ist also in unserem Fall:

$$F = 12 \text{ N}$$

Die Maßeinheit wurde nach Isaac Newton (1643 – 1727) benannt.

Impulsstromstärken lassen sich leicht messen, und zwar mit einem so genannten Kraftmesser. Ein besonders einfaches Modell zeigt Abb. 2.32.

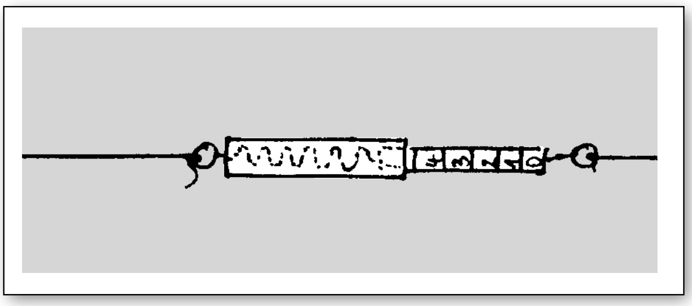


Abb. 2.32
Kraftmesser

Man kann mit ihm allerdings nur „Zugimpulsströme" messen. Wie man mit einem Kraftmesser umgeht, zeigt Abb. 2.33. Die Stärke des Impulsstroms, der durch das Seil in Abb. 2.33a fließt, soll gemessen werden. Man trennt das Seil an einer beliebigen Stelle durch und verbindet die beiden neu entstandenen Enden mit den beiden Haken des Kraftmessers, Abb. 2.33b.

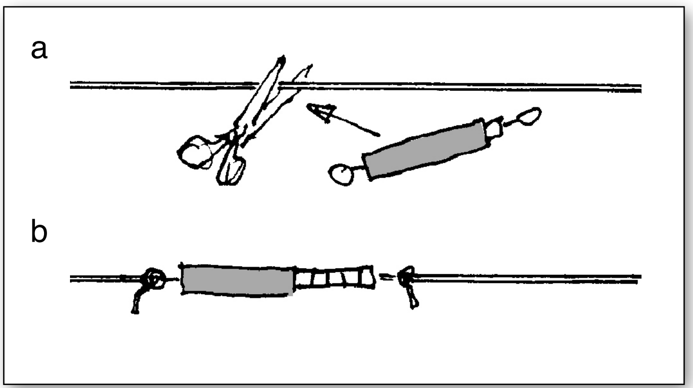


Abb. 2.33
(a) Die Stärke des Impulsstroms in einem Seil soll gemessen werden.
(b) Man trennt das Seil durch und hängt den Kraftmesser an die neu entstandenen Enden.

Aufgaben

1. In einen gut gelagerten Wagen fließt ein Impulsstrom konstanter Stärke hinein. In 10 Sekunden hat sich eine Impulsmenge von 200 Huygens angesammelt. Wie groß war die Stromstärke?

2. Beim Anfahren eines Lastzuges fließt durch die Anhängerkupplung ein Impulsstrom von 6000 N. Welchen Impuls hat der Anhänger nach 5 s? (Die Reibungsverluste des Anhängers seien vernachlässigbar.)

3. In ein Fahrzeug, dessen Reibung vernachlässigbar ist, fließt ein konstanter Impulsstrom von 40 N hinein. Stelle den Impuls als Funktion der Zeit graphisch dar.

2.10 Das Newtonsche Gesetz

Noch einmal Lilly, die einen Wagen mit Impuls lädt, Abb. 2.34.

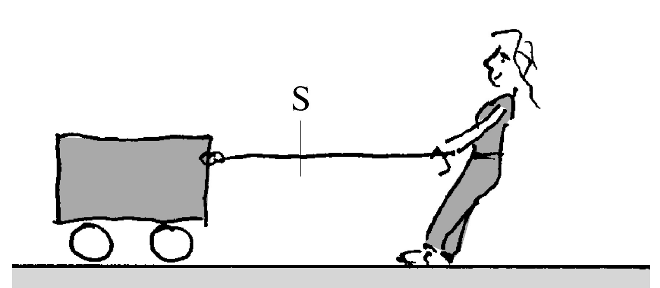


Abb. 2.34
Durch die Fläche S fließt ein Impulsstrom. Darum nimmt der Impuls des Wagens zu.

In einem bestimmten Zeitintervall fließt durch die Querschnittsfläche S des Seils eine bestimmte Menge Impuls. Weil der Impuls in den Wagen fließt, nimmt dessen Impuls mit der Zeit zu. Den Quotienten aus der Zunahme Δp des Impulses des Wagens und der zugehörigen Zeitdauer Δt nennt man *Änderungsrate* des Impulses.

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = \text{Änderungsrate des Impulses}$$

Wenn durch das Seil ein Impulsstrom von

F = 5 Hy/s = 5 N

fließt, so ist auch die Änderungsrate des Impulses des Wagens 5 Hy/s:

Änderungsrate = Impulsstromstärke

Es gilt also:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} \qquad (1)$$

Das *Δ* (Delta) bringt zum Ausdruck, dass es sich um eine *Impulsportion* handelt, und nicht um den Gesamtimpuls eines Körpers, bzw. dass es sich um ein *Zeitintervall* handelt, und nicht etwa um die Uhrzeit.

Gleichung (1) ist das berühmte Newtonsche Gesetz. (Eigentlich gibt es drei „Newtonsche Gesetze“, aber die beiden anderen sind nur Spezialfälle von Gleichung (1)).

Es ist heute schwer zu verstehen, warum es so schwierig war, dieses Gesetz zu entdecken. Newton, Abb. 2.35, brauchte das Gesetz vor allem für die Beschreibung der Bewegung der Himmelskörper: der Planeten und des Mondes. So ändert sich der Impuls des Mondes ständig, und zwar auf Kosten des Impulses der Erde. Heute wissen wir, dass zwischen Erde und Mond Impuls hin- und herfließt, und zwar durch das Schwerefeld, das sich um jeden Körper herum befindet. Zu Newtons Zeit wusste man aber noch nichts von Feldern. Man stellte sich vor, der Impuls werde durch eine so genannte Fernwirkung zwischen Erde und Mond übertragen. Es gab also noch nicht die Vorstellung von Impulsströmen. Für Newton hatte die Größe *F* deshalb eine recht abstrakte Bedeutung, und er nannte sie „Kraft“ (im lateinischen Original „vis“).

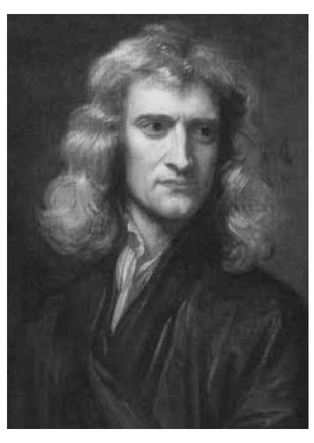


Abb. 2.35
Isaac Newton

Gleichung (1) ist noch nicht vollständig. Sie berücksichtigt nicht den Vektorcharakter des Impulses. Wir können sie verwenden, wenn wir uns nur für eine einzige Impulssorte interessieren – zum Beispiel wenn wir es von vornherein nur mit *x*-Impuls zu tun haben.

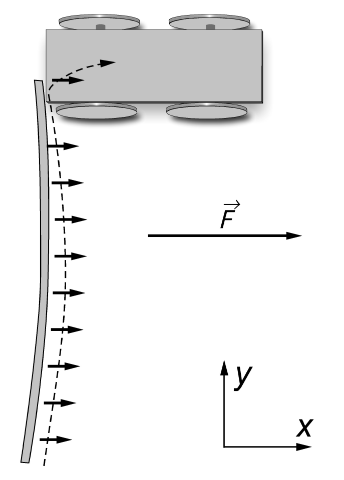


Abb. 2.36
Durch den Stab fließt *x*-Impuls in den Wagen hinein.

Der Wagen in Abb. 2.36 wird mit *x*-Impuls geladen, der in Abbildung 2.37 mit *y*-Impuls. Beide Male fließen durch einen Querschnitt der Stange zum Wagen hin 10 Hy/s (= 10 N), aber einmal *x*- und einmal *y*-Impuls.

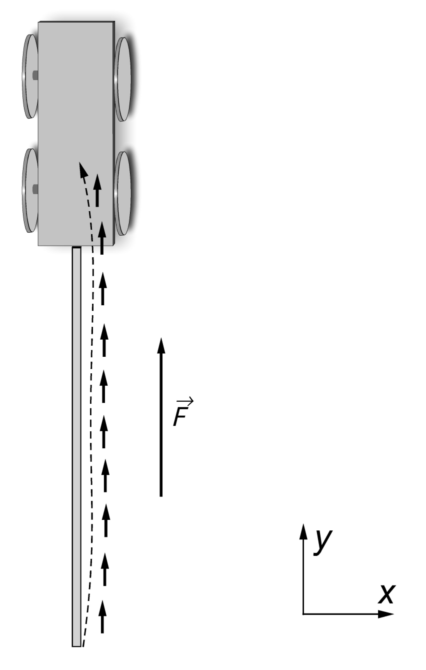


Abb. 2.37
Durch den Stab fließt *y*-Impuls in den Wagen hinein.

Wir sehen, dass der Impulsstrom noch nicht eindeutig festgelegt ist, wenn man sagt, es fließen 10 Hy/s. Man muss zusätzlich sagen, was für Impuls fließt; man muss die Richtung des fließenden Impulses angeben. Die Impulsstromstärke ist also, genau wie der Impuls selbst, eine Vektorgröße. Über das Symbol kommt daher ein Pfeil: $\vec{F}$. In den beiden Abbildungen ist der Vektorpfeil des Impulsstroms eingezeichnet. Die Pfeillänge gibt den Betrag des Impulsstroms an – hier 10 N – und die Pfeilrichtung gibt die Richtung des übertragenen Impulses an. Achtung: Die Richtung des Impulsstromvektorpfeils hat nichts mit der Flussrichtung zu tun. Diese ist ja in beiden Fällen gleich, nämlich durch die Stange von unten nach oben.

Wenn wir den Vektorcharakter des Impulses berücksichtigen, wird aus Gleichung (1):

$$\text{Newtonsches Gesetz:} \quad \vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$$

Aufgaben

1. Jemand beschleunigt einen gut gelagerten Wagen. Ein Kraftmesser zeigt den Impulsstrom an, der dabei in den Wagen fließt. Es wird 5 Sekunden lang gezogen. Wie groß ist die Endgeschwindigkeit? (Der Wagen wiegt 150 kg, der Kraftmesser zeigt 15 N an.)

2. Eine Lokomotive beschleunigt einen Zug. Durch die Kupplung zwischen Lokomotive und Wagen fließt dabei ein Impulsstrom von 200 kN. Wie groß ist der Impuls des Zuges (ohne Lokomotive) nach 30 Sekunden? Der Zug hat jetzt eine Geschwindigkeit von 54 km/h. Wie viel wiegt der Zug?

3. Ein 42 kg schwerer Wagen, der zunächst steht, wird beschleunigt, wobei ein Impulsstrom von 20 N durch die Zugstange fließt. Wie viel Impuls ist in 3 Sekunden in den Wagen geflossen? Seine Geschwindigkeit beträgt zu diesem Zeitpunkt 1,2 m/s. Wie groß ist sein Impuls? Wo ist der fehlende Impuls geblieben?

4. In einem 2 km langen, geraden Rohr von 10 cm Durchmesser fließt Wasser mit einer Geschwindigkeit von 0,5 m/s. Mit einem Ventil, das sich am Ende des Rohrs befindet, wird das Wasser abgesperrt. Berechne den Impuls, den das Wasser dabei abgibt. Wo bleibt dieser Impuls? Das Absperren dauert 2 s. Wie groß ist die Kraft des Wassers auf das Absperrventil (die Impulsstromstärke)? Hinweis: Berechne zuerst das Wasservolumen in Litern. 1 l Wasser hat eine Masse von 1 kg.

2.11 Konvektive Impulstransporte

Bei den Impulstransporten, die wir bisher betrachtet hatten, floss der Impuls immer durch ein Material hindurch. Das Material hat sich dabei nicht oder nur wenig bewegt. Impuls wird aber noch auf eine andere Art übertragen: indem sich ein Körper oder ein Stoff bewegt und dabei seinen eigenen Impuls einfach mitnimmt.

Wir betrachten eine kleine Portion des Wassers in einem Wasserstrahl, Abb. 2.38. Diese Wasserportion hat Impuls. Zuerst befindet sie sich samt ihrem Impuls weiter links, später weiter rechts. Wir haben also einen Impulstransport von links nach rechts. Man nennt einen solchen Impulstransport einen *konvektiven Impulsstrom* (convectio = mitführen).

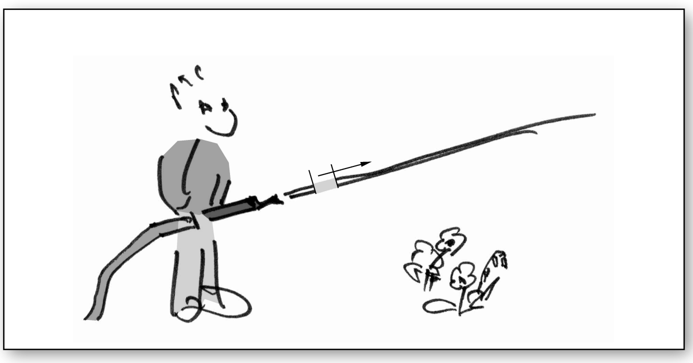


Abb. 2.38
Der Impuls einer Wasserportion bewegt sich mit der Wasserportion: konvektiver Impulsstrom.

(Zur Erinnerung: Bei der Zentralheizung wird die Entropie auf ähnliche Art transportiert. Das Wasser bewegt sich zusammen mit der Entropie, die in ihm steckt, durch die Rohre. Man spricht hier von einem konvektiven Entropiestrom.)

Wenn der Wind weht, transportiert die Luft Impuls. Auch hier haben wir einen konvektiven Impulsstrom. Man spürt den Impuls, der mit dem Wind kommt. Man nutzt ihn aus zum Antrieb von Segelschiffen, und man fürchtet die Schäden, die ein Sturm anrichtet.

Raketen machen ihr Geschäft mit einem konvektiven Impulsstrom, Abb. 2.39. Die Rakete stößt nach unten (oder hinten) Gase mit hoher negativer Geschwindigkeit und viel negativem Impuls aus. Die Rakete selbst bekommt dabei den gleichen Betrag an positivem Impuls.

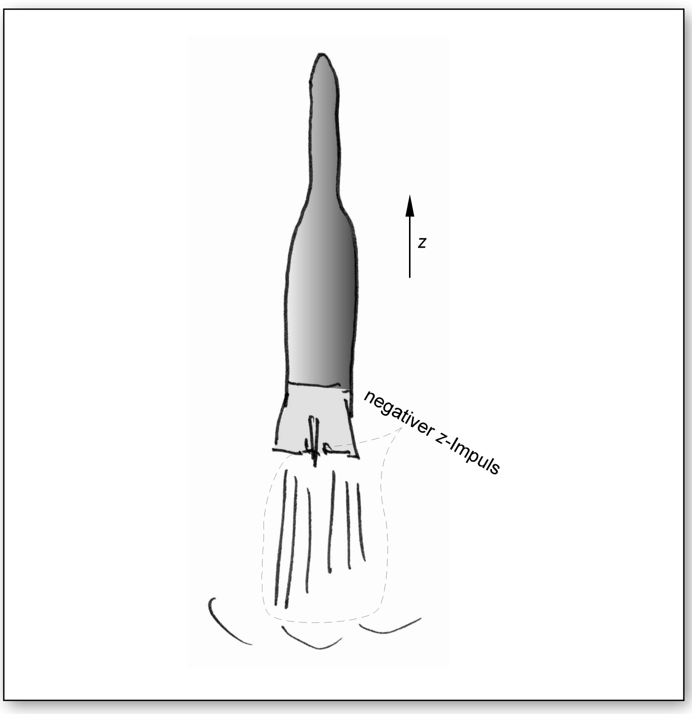


Abb. 2.39
Die Rakete stößt nach unten (in die negative *z*-Richtung) Verbrennungsgase aus. Diese haben negativen Impuls. Den entsprechenden positiven bekommt die Rakete.

Ähnlich funktioniert auch der Antrieb von Flugzeugen. Wir nehmen an, ein Flugzeug fliege in die positive *x*-Richtung. Mit dem Propeller oder dem Strahltriebwerk wird Luft, die das Flugzeug vorne „aufsammelt“, mit negativem Impuls geladen und nach hinten herausgestoßen. Das Flugzeug bekommt dabei den entsprechenden positiven Impuls, Abb. 2.40.

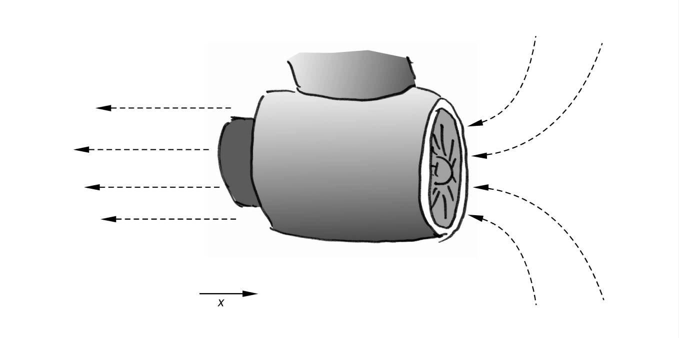


Abb. 2.40
Das Triebwerk belädt die Luft, die es von vorne ansaugt mit negativem *x*-Impuls. Den entsprechenden positiven Impuls bekommt das Flugzeug.

Wir sehen hier noch einmal, dass der Satz „Luft leitet den Impuls nicht“ nicht bedeutet, dass man mit Hilfe der Luft keinen Impuls transportieren kann.

Konvektiver Impulsstrom: Der Impuls wird zusammen mit bewegter Materie transportiert.

Aufgaben

1. Aus eine Wasserspritze kommen 0,5 Liter Wasser pro Sekunde heraus, mit einer Geschwindigkeit von 3 m/s. Wie viel Impuls hat ein 1 m langer Ausschnitt aus dem Strahl? Wie groß ist der Impulsstrom des Strahls?

2. Es weht ein kräftiger Wind, Windgeschwindigkeit 5 m/s. Wie viel Impuls transportiert die Luft pro Sekunde durch eine 10 m^2 große Fläche?

2.12 Noch einmal Impulsleiter

Bisher hatten wir es uns mit der Entscheidung, ob etwas den Impuls leitet oder nicht, etwas leicht gemacht. Es gab für uns einfach gute und schlechte Leiter. Da der Impuls eine Vektorgröße ist, ist die Sache aber meist komplizierter. Es folgen einige Beispiele:

Luft

Ja, noch einmal die Luft. Wir hatten festgestellt, dass sie auf die normale Art den Impuls nicht leitet, dass man ihn aber konvektiv mit der Luft transportieren kann. Tatsächlich gibt es aber noch andere Möglichkeiten. Wenn Lilly, Abb. 2.22, Impuls auf den Wagen übertragen will, müsste sie dafür sorgen, dass sich der Luftdruck an der einen Seite des Wagens erhöht. Durch einfaches Drücken gegen die Luft direkt vor ihr, erreicht sie aber keine Druckerhöhung vor dem Wagen. Die Luft weicht zur Seite hin aus. Wenn man sie aber daran hindert auszuweichen, so ist ein Impulstransport möglich, Abb. 2.41. Vor dem Klotz, nämlich im Innern des Zylinders A, kann man den Druck erhöhen, indem man gegen den Kolben des Zylinders B drückt. Das wird bei pneumatischen Baumaschinen ausgenutzt, z.B. beim Presslufthammer.

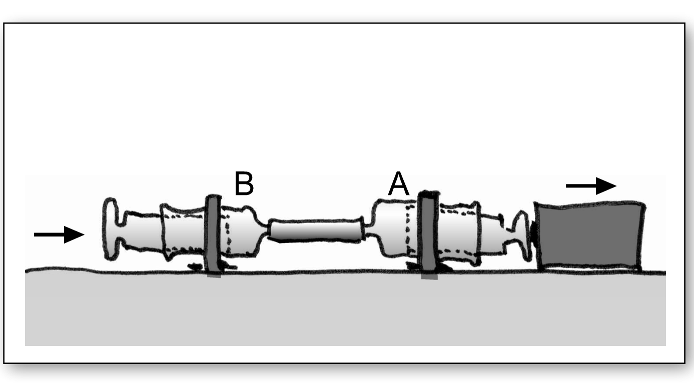


Abb. 2.41
Durch die Luft in Zylinder A fließt Impuls in den Kolben und weiter in den Klotz.

Eine andere Möglichkeit, Impuls mit der Luft zu übertragen besteht darin, dass man eine sehr schnelle Druckerhöhung macht. Diese läuft dann als Schallwelle weiter. Lilly schlägt auf das Tamburin, Abb. 2.42, und gleich darauf springt das Kügelchen von Willys Tamburin weg.

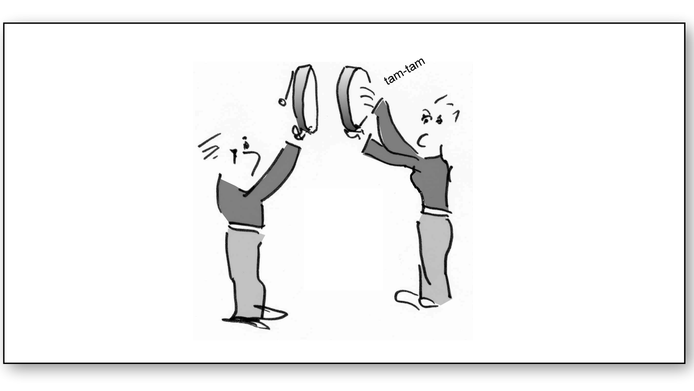


Abb. 2.42
Lilly schlägt auf das Tamburin. Das Kügelchen an Willys Tamburin springt weg. Der Impuls ist durch die Luft gelaufen.

Nach demselben Prinzip wird der Impuls bei einer Explosion übertragen, der die Fensterscheiben zerstört.

Räder

Die wichtigste technische Einrichtung, die dazu dient, den Impulsfluss von einem Körper in die Erde zu verhindern, ist das Rad. Räder dienen der Impulsisolation. Das gilt allerdings nur für solchen Impuls, der dieselbe Richtung wie das Fahrzeug hat. Damit wir uns nicht auf eine Koordinatenachse festlegen müssen, nennen wir ihn *Längsimpuls*. Impuls, dessen Vektorpfeil quer zum Fahrzeug liegt, nennen wir *Querimpuls*.

In Abb. 2.43a versucht Willy mit Hilfe eines Spielzeug-Wägelchens, das Brett mit Impuls zu laden. Es geht aber nicht, wenigstens nicht so, wie Willy es macht. In 2.43b zeigt er, wie es geht.

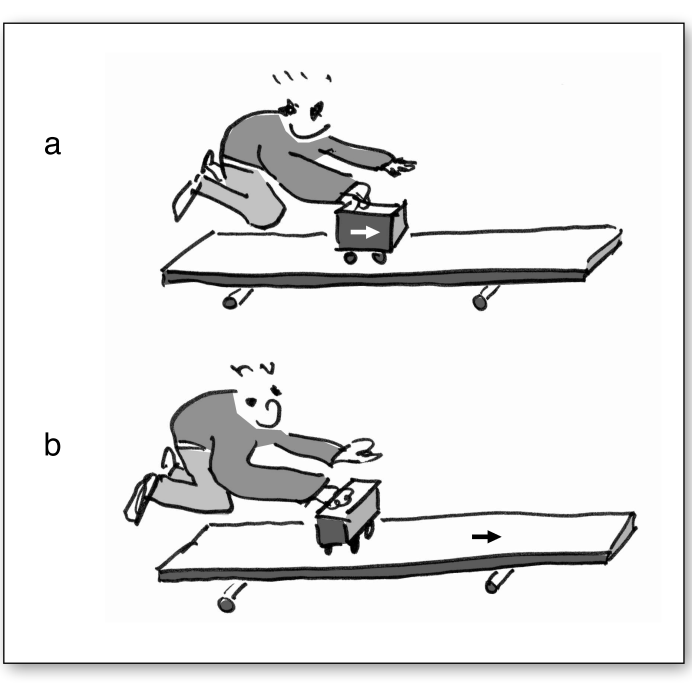


Abb. 2.43
(a) Die Räder lassen keinen Längsimpuls durch. Es geht kein Impuls ins Brett.
(b) Die Räder lassen Querimpuls durch. Der Impuls geht ins Brett hinein.

> Räder leiten keinen Längsimpuls, sie leiten aber Querimpuls.

Es ist wichtig, dass sie den Querimpuls leiten. Täten sie es nicht, so könnten Autos nicht um die Kurve fahren. Manchmal ist das sogar der Fall.

> Bei Glatteis leiten die Räder auch keinen Querimpuls in die Erde ab.

Da sind Schienenfahrzeuge sicherer. Querimpuls wird hier von den Rädern immer sehr gut an die Schienen abgeleitet.

Seile

In Abb. 2.44a setzt Lilly den Wagen mit Hilfe des Seils nach rechts, also in die positive *x*-Richtung in Bewegung. Sie „pumpt" *x*-Impuls in den Wagen. Im Seil fließt der Impuls von rechts nach links, d.h. in die negative *x*-Richtung. In der Abbildung darunter versucht sie es von links, und das geht natürlich nicht. Wir sehen: *x*-Impuls kann durch das Seil nur in die negative *x*-Richtung fließen.

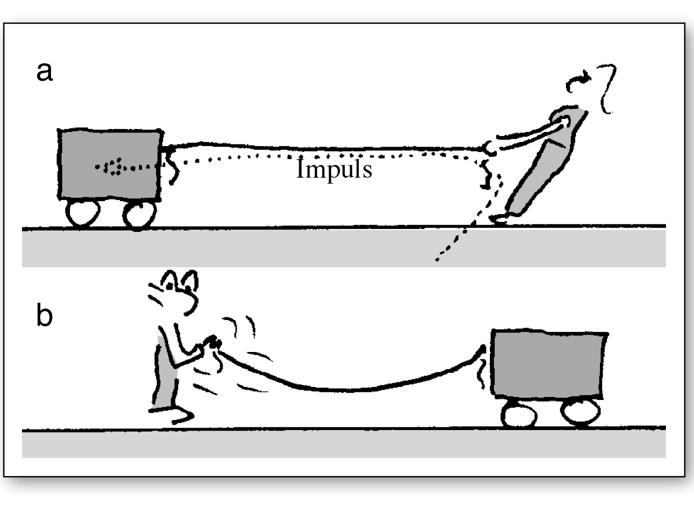


Abb. 2.44
(a) Durch das Seil fließt x-Impuls nach links – in die negative *x*-Richtung.
(b) In die positive *x*-Richtung kann er in einem Seil nicht fließen.

In Abb. 2.45 versucht es Willy auf eine andere Art: Er versucht, Impuls, dessen Richtung quer zum Seil liegt, durch das Seil zu bringen – wieder ohne Erfolg.

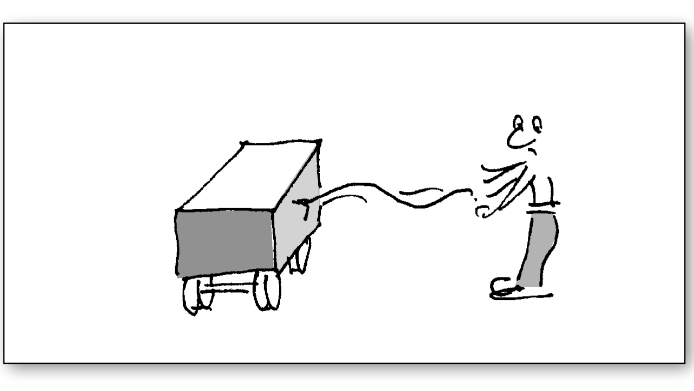


Abb. 2.45
Durch ein Seil kann kein Impuls fließen, dessen Vektorpfeil quer zum Seil liegt.

Wir schließen:

> In einem Seil fließt nur Impuls, dessen Vektorpfeil parallel zum Seil liegt; der Impuls fließt nur in die dem Vektorpfeil entgegengesetzte Richtung.

Wir wollen die Regel anwenden. Abb. 2.46 zeigt, von oben gesehen, einen Wagen, an dem mit Hilfe eines Seils gezogen wird. Es wird aber nicht nach vorne gezogen, sondern etwas nach der Seite. Im Seil fließe ein Impulsstrom von 40 N. Um wie viel Hy ändert sich der Impuls des Wagens pro Sekunde? Wie viel Impuls fließt in die Erde ab?

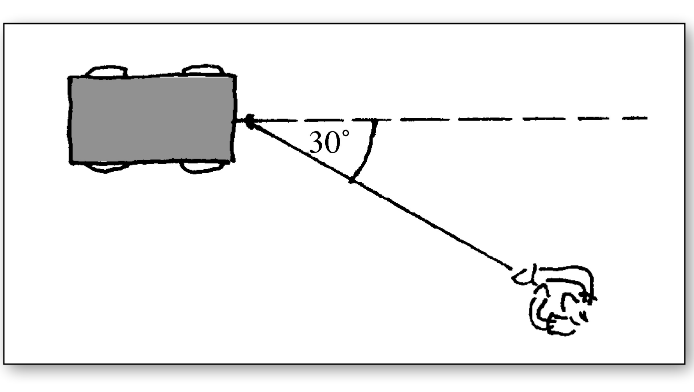


Abb. 2.46
Am Seil wird gezogen. Der *x*-Impuls des Wagens nimmt zu.

Der im Seil fließende Impuls muss dieselbe Richtung wie das Seil haben. Den entsprechenden Stromstärkevektor nennen wir $\vec{F}$. Wir zerlegen diesen Strom in zwei Anteile, Abb. 2.47:

- einen Anteil $\vec{F}_{quer}$, der quer zur Wagenrichtung liegt, und der über die Räder abfließt;
- einen Anteil $\vec{F}_{längs}$, der in Wagenrichtung liegt, und der die Impulszunahme des Wagens bewirkt.

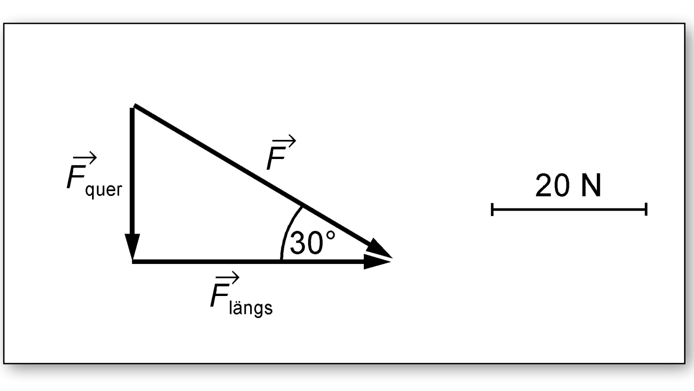


Abb. 2.47
Zerlegung des Impulsstroms im Seil in eine Längs- und eine Querkomponente

Es ist

$F_{quer} = F \cdot \sin 30° = 20$ N,

$F_{längs} = F \cdot \cos 30° = 35$ N.

Also: Pro Sekunde fließen 20 Hy Querimpuls in die Erde ab, und der Impuls des Wagens nimmt um 35 Hy zu.

Felder

Auf einem kleinen Fahrzeug wird ein Magnet A befestigt, Abb. 2.48. Man nähert diesem einen zweiten Magneten B, und zwar so, dass sich „gleichnamige" Pole gegenüberstehen: Nordpol bei Nordpol und Südpol bei Südpol. Kommt man mit Magnet B genügend nah an Magnet A heran, so setzt sich der Wagen in Bewegung, sein Impuls nimmt zu.

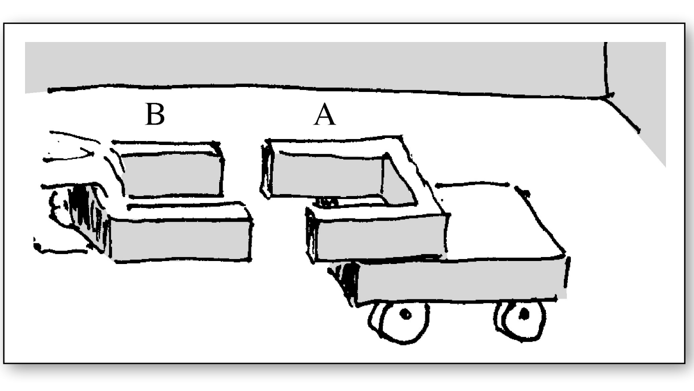


Abb. 2.48
Der Impuls geht durch das Magnetfeld in den Wagen.

Der Impulsleiter zwischen A und B ist das *magnetische Feld*, das an den Polen der Magneten hängt.

> Magnetische Felder leiten den Impuls.

Du wirst später noch andere Felder kennenlernen: elektrische Felder und Gravitationsfelder. Wie das magnetische Feld, sind auch diese Felder unsichtbar, und wie das magnetische Feld, leiten sie den Impuls. Ein *elektrisches Feld* hängt an jedem Körper, der elektrische Ladung trägt, und ein *Gravitationsfeld* (oder Schwerefeld) hängt an jedem Körper, der eine Masse hat. Da Körper immer eine Masse haben, hängt also an jedem Körper ein Gravitationsfeld.

Aufgaben

1. Ein zylinderförmiger Griff Z kann ohne Reibung auf einer Stange S hin- und hergleiten, Abb. 2.49a. Für welchen Impuls ist die Verbindung zwischen Griff und Stange durchlässig, für welchen ist sie undurchlässig?

2. Der Zylinder Z_1 kann auf der Stange S und die Zylinder Z_2 und Z_3 können auf dem Rahmen R hin- und hergleiten, Abb. 2.49b. Für welchen Impuls ist die Verbindung zwischen Z_1 und dem Rahmen durchlässig, für welchen nicht?

3. Ein Auto schleppt ein anderes ab. Die Autos fahren in derselben Richtung, sind aber um 1 m seitlich gegeneinander versetzt, Abb. 2.50. Das Abschleppseil ist 3 m lang. Durch das Seil fließt ein Impulsstrom von 500 N. Welcher Impulsstrom trägt zur Bewegung des abgeschleppten Autos bei?

4. Seile leiten *x*-Impuls nur in die negative *x*-Richtung. Erfinde eine Vorrichtung, die *x*-Impuls nur in die positive *x*-Richtung leitet.

5. Seile lassen den Impuls nur in einer Richtung durch. Es gibt Vorrichtungen, die Luft nur in einer Richtung durchlassen, es gibt Vorrichtungen, die Menschen nur in einer Richtung durchlassen, es gibt Vorrichtungen, die die Elektrizität nur in einer Richtung durchlassen. Was ist gemeint?

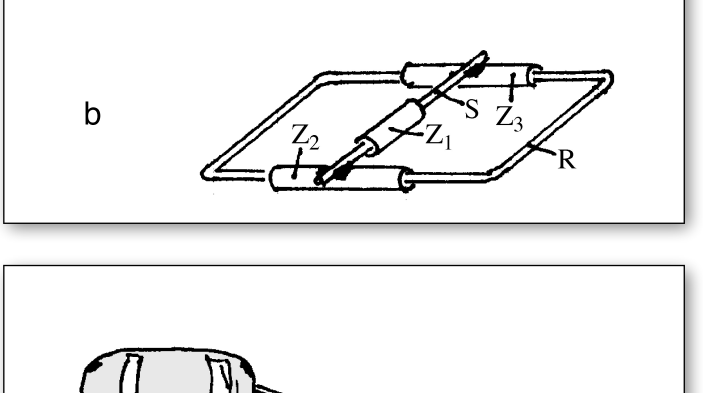


Abb. 2.49
Zu den Aufgaben **1** und **2**

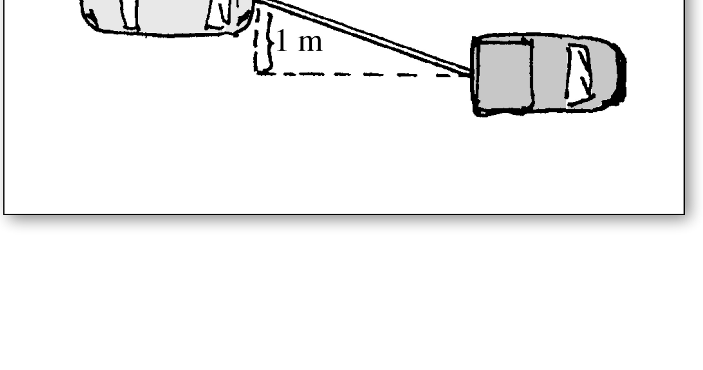


Abb. 2.50
Zu Aufgabe **3**

2.13 Das Hookesche Gesetz

Wir wollen ein Impulsstrommessgerät selbst bauen. Wir tun so, als wäre das Gerät noch nicht erfunden, und als sei die Maßeinheit der Impulsstromstärke noch nicht festgelegt worden.

Wir brauchen eine größere Zahl gleichartiger Gummiringe. Wir beginnen damit, unsere eigene Maßeinheit festzulegen. Wir halten einen Gummiring so vor ein Lineal, dass er zwar lang gestreckt, aber noch nicht über seine Normallänge hinaus gedehnt ist, Abb. 2.51, und messen seine Länge. Nehmen wir an, wir finden 10 cm = 0,1 m. Da der Gummiring entspannt ist, fließt noch kein Impulsstrom durch ihn hindurch. Wir ziehen ihn nun in die Länge, und zwar bis er 0,15 m lang ist. Jetzt fließt ein Impulsstrom. Die Stärke dieses Impulsstroms erklären wir zu unserer Stromstärkeeinheit. (Da der Ring aus zwei nebeneinander liegenden Gummifäden besteht, fließt in jedem dieser Fäden eine halbe Stromstärkeeinheit.)

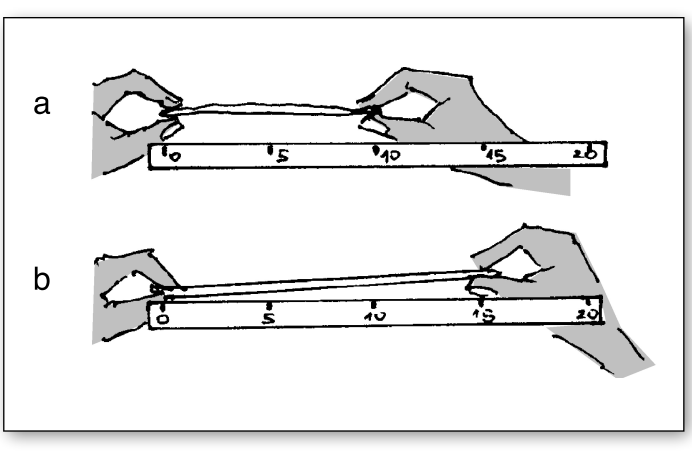


Abb. 2.51
Festlegung einer Impulsstromstärkeeinheit.
(a) Der Gummiring ist gestreckt, aber entspannt.
(b) Der Gummiring wurde um 5 cm verlängert.

Wir können uns nun mit anderen Gummiringen so viele Stromstärkeeinheiten erzeugen wie wir wollen. Wir können also Vielfache unserer Stromstärkeeinheit herstellen. Hängen wir zum Beispiel drei auf 15 cm gespannte Gummiringe nebeneinander, so fließen durch alle drei zusammen drei Stromstärkeeinheiten.

Mit Hilfe unseres Vorrats an Gummiringen können wir nun auch einen anderen elastisch dehnbaren Gegenstand *eichen*, z.B. ein Expandergummiseil, Abb. 2.52. Wir lassen dazu durch das Expanderseil eine, zwei, drei usw. Stromstärkeeinheiten fließen und messen jeweils die Veränderung seiner Länge im Vergleich zur Länge im entspannten Zustand.

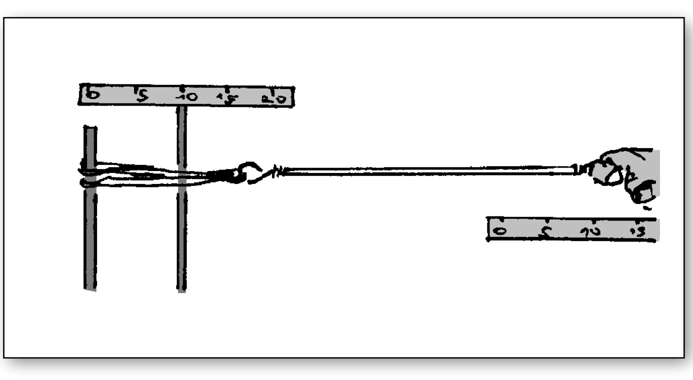


Abb. 2.52
Ein Expanderseil wird mit Gummiringeinheiten geeicht.

In Abb. 2.53 ist die Impulsstromstärke F über der Verlängerung s aufgetragen. Diese Kurve stellt die *Eichkurve* des Expandergummis dar. Wenn wir jetzt eine Impulsstromstärke messen wollen, brauchen wir nicht mehr unser etwas umständliches Verfahren mit den Einheitsgummiringen anzuwenden. Wir können das Expanderseil benutzen.

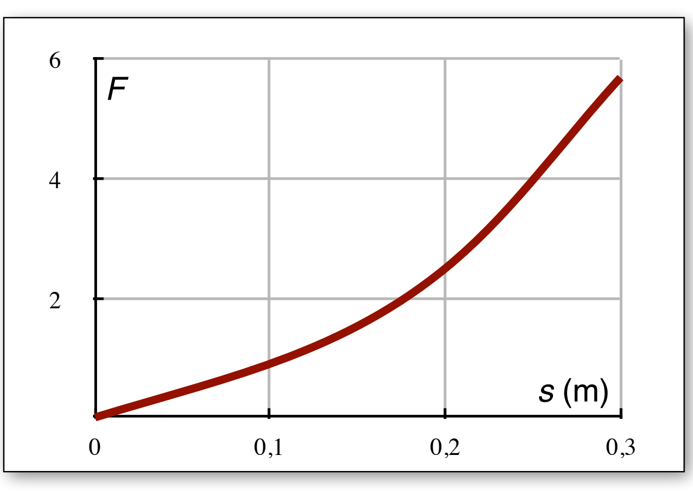


Abb. 2.53
Eichkurve des Expanderseils: Die Impulsstromstärke F ist über der Verlängerung s des Seils aufgetragen.

Es soll z.B. die Stärke des Stroms gemessen werden, der in einen Wagen hineinfließt, an dem wir ziehen. Wir ziehen dazu an dem Wagen einfach über das Expanderseil und messen, um wie viel sich dieses verlängert. Beträgt die Verlängerung zum Beispiel 0,25 m, so entnehmen wir der Eichkurve, dass der Impulsstrom eine Stärke von 4 Einheiten hat.

Wir wollen nun den Zusammenhang zwischen Verlängerung und Impulsstromstärke noch für einen anderen Gegenstand aufnehmen: für eine Stahlfeder. Das Ergebnis zeigt Abb. 2.54.

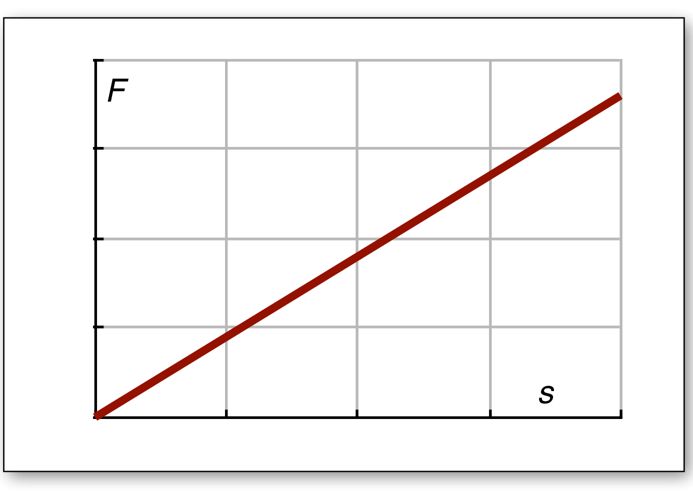


Abb. 2.54
Bei einer Stahlfeder ist der Zusammenhang zwischen Impulsstromstärke und Verlängerung linear.

Der Zusammenhang ist einfacher als beim Expanderseil: Er ist linear. Verlängerung s und Impulsstromstärke F sind bei der Feder proportional zueinander. Man sagt auch, die Feder befolge das *Hookesche Gesetz*. Als Formel lässt sich das Gesetz so formulieren:

Hookesches Gesetz: $\vec{F} = D \cdot \vec{s}$

D ist für eine gegebene Feder eine Konstante, die *Federkonstante*. Ihre Maßeinheit ist N/m. Für verschiedene Federn hat die Federkonstante im Allgemeinen verschiedene Werte. Abb. 2.55 zeigt den Zusammenhang zwischen F und s für zwei verschiedene Federn. Für Feder A hat D einen größeren Wert als für Feder B. Wenn man Feder A und Feder B um denselben Betrag dehnt, so ist der Impulsstrom in Feder A größer als in Feder B. Stärkerer Impulsstrom heißt aber größere Zugspannung. Die Feder mit der größeren Federkonstante ist daher die härtere Feder.

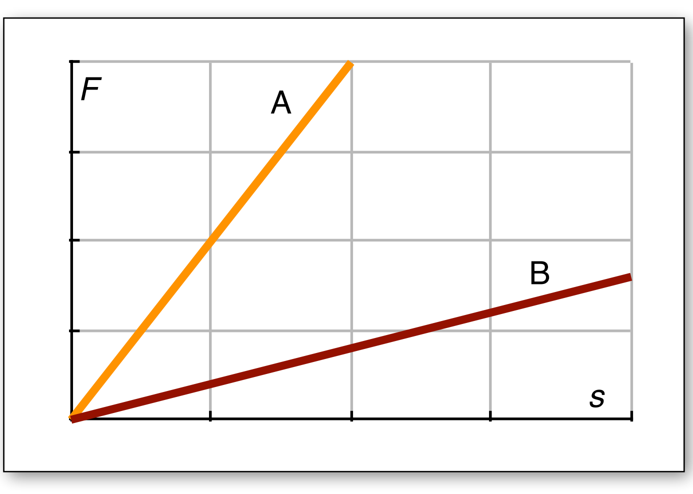


Abb. 2.55
Die Federkonstante von Feder A ist größer als die von Feder B. Feder A ist härter.

Viele Federn lassen sich nicht nur auf Zug, sondern auch auf Druck beanspruchen. Für solche Federn gilt das Hookesche Gesetz, d.h. der lineare Zusammenhang zwischen Längenänderung und Stromstärke, sowohl für Verlängerung (positive Werte von s) als auch für Verkürzung (negative Werte von s).

Aufgaben

1. Eine Feder habe eine Federkonstante von $D = 150$ N/m. Um wie viel verlängert sie sich, wenn ein Impulsstrom von
(a) 12 N, (b) 24 N durch sie hindurchfließt.

2. Für ein bestimmtes Seil wurde der in Abbildung 2.56 dargestellte F-s-Zusammenhang gemessen.

a) Um wie viel verlängert sich das Seil, wenn ein Impulsstrom von 15 N hindurchfließt? Um wie viel verlängert es sich bei einer Stromstärke von 30 N?
b) Wie stark ist der Impulsstrom, wenn sich das Seil um 20 cm verlängert hat?
c) Was spürt man, wenn man das Seil mit den Händen auseinander zieht? Vergleiche mit einer Stahlfeder.

3. Wie könnte man eine Anordnung bauen, deren F-s-Zusammenhang wie der in Abbildung 2.57 aussieht?

4. Zwei Federn werden aneinander gehängt und in ein Seil eingebaut, durch das ein Impulsstrom fließt. Die eine Feder verlängert sich viermal so stark wie die andere. Wie verhalten sich die Federkonstanten zueinander?

5. (a) Zwei gleichartige Federn werden parallel eingehängt, Abb. 2.58a. Jede hat die Federkonstante D. Welche Federkonstante hat das Gesamtsystem (grauer Kasten)? (b) Das entsprechende für zwei Federn „in Reihe“, Abb. 2.58b.

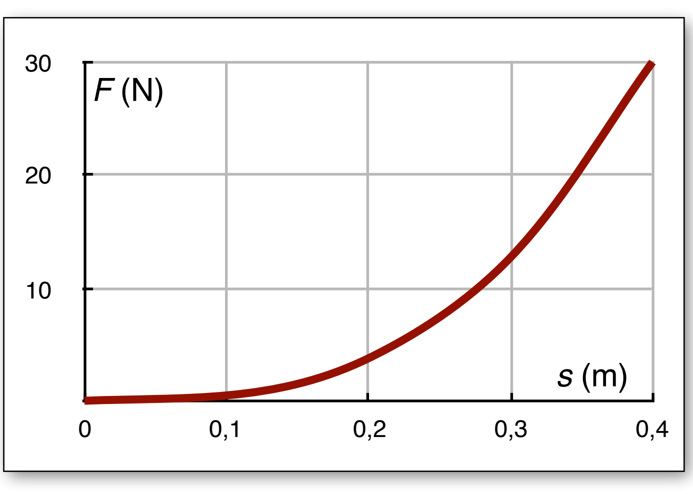


Abb. 2.56
Zu Aufgabe **2**

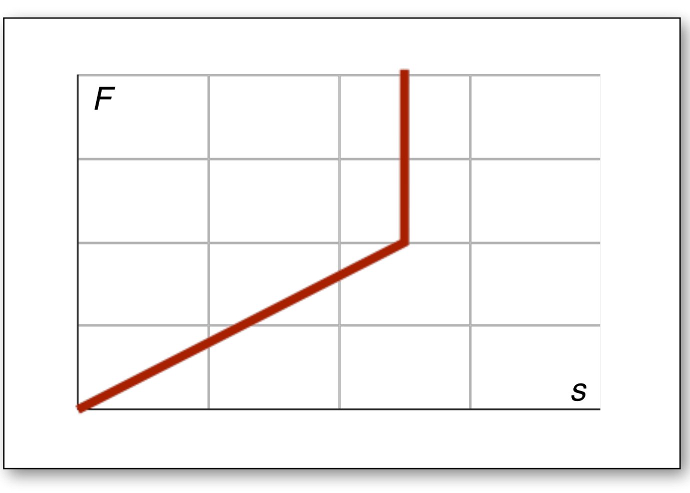


Abb. 2.57
Zu Aufgabe **3**

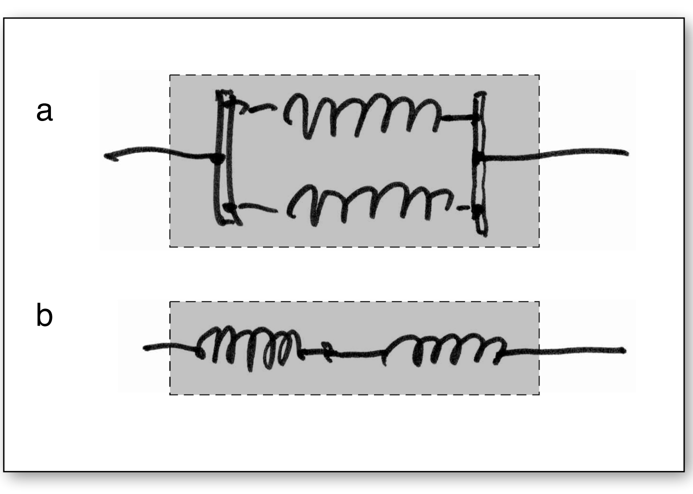


Abb. 2.58
Zu Aufgabe **5**

2.14 Geschwindigkeit, Beschleunigung, Winkelgeschwindigkeit

Geschwindigkeit

Ein Auto (oder ein anderer Körper) bewege sich mit konstanter Geschwindigkeit *v*. Man kann *v* berechnen aus durchlaufener Wegstrecke *Δs* und der dazu benötigten Zeit *Δt*:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Wir verwenden wieder die Deltas. Während wir mit *s* den Ort bezeichnen (in einem vorher festgelegten Koordinatensystem), bedeutet *Δs* die Differenz von zwei Orten, also eine Strecke. Entsprechend bedeutet *Δt* wieder nicht die Uhrzeit, sondern eine Zeitspanne: das Zeitintervall, in dem der Körper die Strecke *Δs* zurücklegt. Wenn ein Auto in 10 Sekunden 200 m zurücklegt, so beträgt seine Geschwindigkeit

$$v = \frac{200\ \text{m}}{10\ \text{s}} = 20\ \text{m/s}.$$

Beschleunigung

Ein Zug fährt an (in die positive *x*-Richtung). Wir nehmen an, dass seine Geschwindigkeit dabei gleichmäßig zunimmt: jede 10 Sekunden um 5 km/h. Oder in einer Minute um 30 km/h. Oder in 5 Minuten um 150 km/h. Man sagt auch, der Zug werde *gleichmäßig beschleunigt*. Den Quotienten aus Geschwindigkeitsänderung *Δv* und Zeitspanne Δ*t* nennt man *Beschleunigung a*:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

Im Fall unseres Zuges erhalten wir:

$$a = \frac{5\ \text{km/h}}{1\ \text{min}} = \frac{5000\ \text{m}}{3600\ \text{s} \cdot 60\ \text{s}} = 0{,}023\ \text{m/s}^2$$

Die SI-Maßeinheit der Beschleunigung ist also m/s².

Im Allgemeinen ist die Beschleunigung eines Fahrzeugs natürlich nicht konstant, wie wir es hier angenommen haben. Wenn die Geschwindigkeit konstant ist, so ist *Δv* = 0 und damit auch *a* = 0.

Wird ein Fahrzeug (das sich in die positive *x*-Richtung bewegt) langsamer, so wird *Δv*, und damit auch die Beschleunigung negativ.

Winkelgeschwindigkeit

Ein Rad (oder ein anderer Körper) soll gleichmäßig rotieren. Man sagt auch, es rotiert mit konstanter *Winkelgeschwindigkeit ω*. Wir zeichnen auf dem Rad einen Radius ein und betrachten dessen Bewegung, Abb. 2.59. Die Linie dreht sich gleichmäßig um den Mittelpunkt, sie überstreicht in jeder Sekunde denselben Winkel. Sie überstreicht im Zeitintervall *Δt* das Winkelintervall *Δα*. Man berechnet die Winkelgeschwindigkeit aus überstrichenem Winkel *Δα* und der dazu benötigten Zeit *Δt*:

$$\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}$$

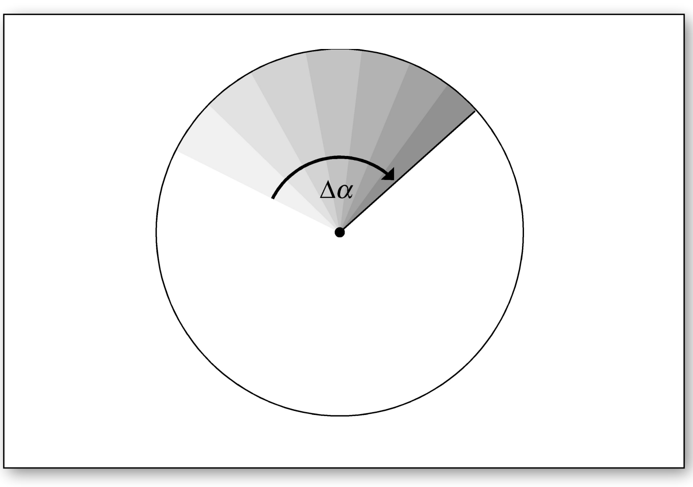


Abb. 2.59
Der Radius überstreicht in der Zeitspanne *Δt* das Winkelintervall *Δα*.

Die Winkelgeschwindigkeit tritt in mehreren anderen physikalischen Gleichungen auf. Damit dort die Ergebnisse in den richtigen Maßeinheiten, nämlich den SI-Einheiten herauskommen, muss man den Winkel *α* im Bogenmaß einsetzen. Da man für das Bogenmaß kein Einheiten-Symbol verwendet, ergibt sich für die Maßeinheit der Winkelgeschwindigkeit die reziproke Sekunde, also 1/s oder s⁻¹.

Die Winkelgeschwindigkeit begegnet uns noch unter dem Namen Drehzahl. Wenn man diese Bezeichnung verwendet, benutzt man allerdings eine andere Maßeinheit: Umdrehungen pro Minute.

Die Welle eines Elektromotors rotiere mit 2000 Umdrehungen pro Minute. Die Winkelgeschwindigkeit ergibt sich dann zu

$$\omega = \frac{2000 \cdot 2\pi}{60\ \text{s}} = \frac{12566}{60\ \text{s}} = 209\ \text{s}^{-1}.$$

Wir betrachten den Punkt P eines rotierenden Rades, Abb. 2.60. P bewegt sich auf einer Kreisbahn. Zwischen dem Betrag *v* der Geschwindigkeit des Punktes und der Winkelgeschwindigkeit *ω* des Rades besteht ein Zusammenhang.

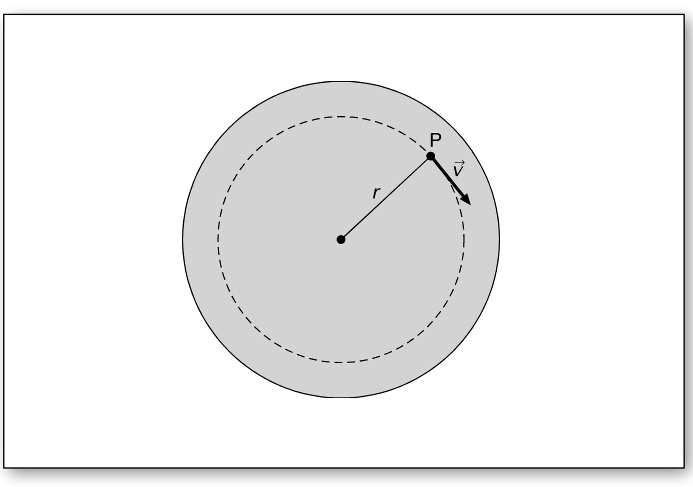


Abb. 2.60
Der Punkt P des rotierenden Körpers bewegt sich auf einer Kreisbahn.

Die Berechnung dieses Zusammenhanges ist am bequemsten, wenn wir uns auf einen vollen Umlauf beziehen. Wir bezeichnen die Umlaufzeit mit *T*. Der volle Winkel von 360° ist im Bogenmaß gleich 2*π*. Die Winkelgeschwindigkeit ist daher:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Der in der Zeit *T* durchlaufene Weg ist 2*πr*. Damit wird die normale Geschwindigkeit:

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

Wir schreiben die letzte Gleichung etwas anders:

$$v = \frac{2\pi}{T} \cdot r$$

Der Quotient auf der rechten Seite der Gleichung ist gerade gleich der Winkelgeschwindigkeit. Wir setzen ein und erhalten:

$$v = \omega \cdot r.$$

Rotierender Körper:
$v = \omega \cdot r$

- *v* = Geschwindigkeit eines Punktes P
- *ω* = Winkelgeschwindigkeit des Körpers
- *r* = Abstand zwischen P und Drehpunkt

Aufgaben

1. Das Schwungrad eines Automotors hat einen Durchmesser von 30 cm. Der Motor läuft mit 3500 Umdrehungen pro Minute. Wie groß ist seine Winkelgeschwindigkeit (in 1/s)? Wie ist der Betrag der Geschwindigkeit seines äußeren Randes?

2. Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit der Eigendrehung der Erde? Wie groß ist der Betrag der Geschwindigkeit eines Punktes am Äquator?

3. Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit für die Bewegung der Erde um die Sonne? Bei dieser Bewegung hat die Erde eine Geschwindigkeit von 30 km/s. Berechne daraus den Abstand Erde - Sonne.

2.15 Impulsänderungen bei Kreisbewegungen

Willy lässt ein elektrisches Spielzeugauto mit Fernsteuerung herumfahren, Abb. 2.61. Willy: „Jetzt lasse ich es mal mit konstanter Geschwindigkeit im Kreis herum fahren.“ Lilly: „Hoppla, das kannst Du gar nicht, entweder Kreis oder konstante Geschwindigkeit!“ Willy: „Ach so, stimmt. Ich meinte....“

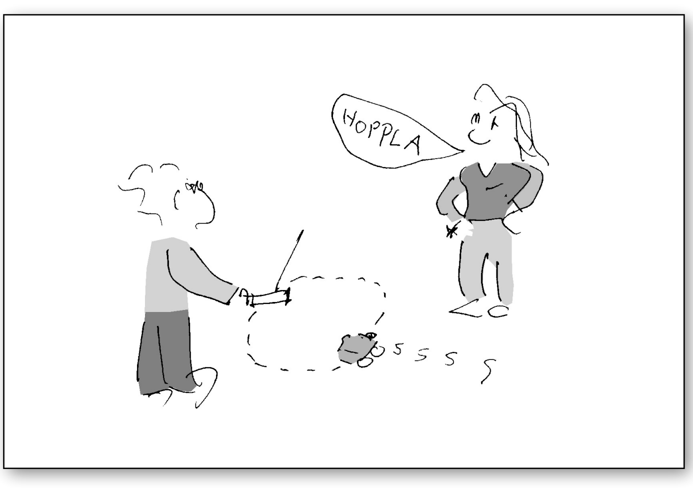


Abb. 2.61
Das Auto fährt im Kreis herum, wobei der Betrag seiner Geschwindigkeit konstant ist.

Was meinte Willy? Dass der Betrag der Geschwindigkeit konstant ist. Da das Auto eine Kreisbewegung macht, ändert sich die Richtung der Geschwindigkeit (des Geschwindigkeitsvektors) ständig. Damit ändert sich auch der Impuls des Autos. Das Auto bekommt dauernd Impuls aus der Erde.

Abb. 2.62 zeigt die Sache schematisch. Links sind an der Kreisbahn die Impulsvektoren zu verschiedenen Zeitpunkten eingezeichnet. So wie sich die Richtung des Autos dreht, dreht sich auch der Impulsvektorpfeil. Rechts sind dieselben Impulsvektorpfeile noch einmal so dargestellt, dass ihre Anfangspunkte zusammenfallen. Man sieht hier deutlich, dass sich der Impulsvektor dreht.

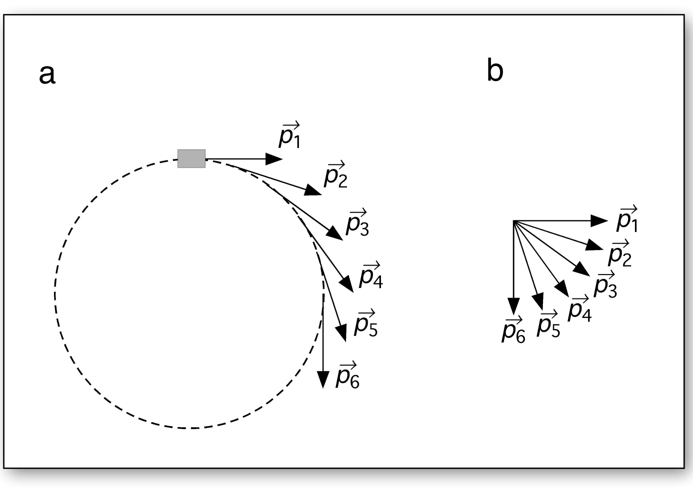


Abb. 2.62
(a) Der Impulsvektor zu verschiedenen Zeitpunkten.
(b) Während das Auto im Kreis herum fährt, dreht sich der Impulsvektor.

Abb. 2.63 zeigt zwei Impulsvektoren $\vec{p}_0$ und $\vec{p}_1$ zu zwei dicht benachbarten Zeitpunkten t_0 und t_1. Im Zeitintervall

$$\Delta t = t_1 - t_0$$

ändert sich der Impuls um

$$\Delta\vec{p} = \vec{p}_1 - \vec{p}_0.$$

Der hinzugekommene Impuls $\Delta\vec{p}$ steht im rechten Winkel zur Bewegungsrichtung („Querimpuls“).

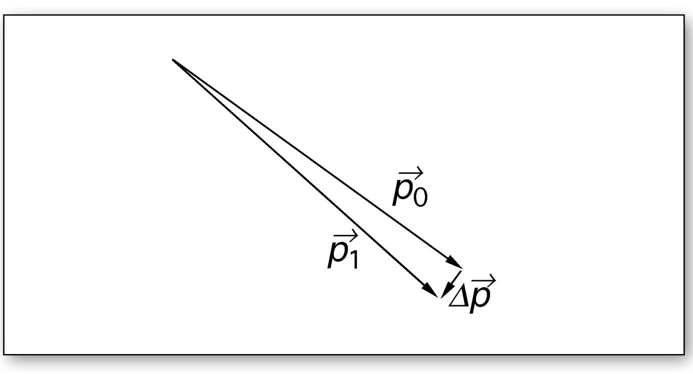


Abb. 2.63
Der Vektor „Impulsänderung“ liegt im rechten Winkel zum Impulsvektor.

Der Betrag der Änderungsrate berechnet sich nach der Formel:

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

Hier ist m die Masse des Körpers, v seine Geschwindigkeit und r der Radius der Kreisbahn.

Der Beweis dieser Formel ist etwas verwickelt. Wir wollen ihn übergehen und uns nur davon überzeugen, dass die Formel plausibel ist, d.h. Ergebnisse liefert, die unseren Erwartungen entsprechen.

Die Abhängigkeit von m: Das Auto fahre gerade in x-Richtung, hat also reinen x-Impuls. Nachdem es eine Vierteldrehung gefahren ist, muss es seinen ganzen x-Impuls abgegeben haben. Je größer seine Masse ist, desto mehr x-Impuls hat es am Anfang, und desto mehr muss es pro Zeiteinheit abgeben bzw. aufnehmen.

Die Abhängigkeit von r: Das Auto fährt einmal einen engen und einmal einen weiten Kreis, wobei der Betrag der Geschwindigkeit beide Male gleich sein soll. Es ist klar, dass die Impulsänderung pro Sekunde beim weiten Kreis kleiner ist. Daher das r im Nenner.

Die Abhängigkeit von v: Je größer die Geschwindigkeit, desto länger ist der Impulsvektorpfeil und desto größer ist die Änderungsrate. Außerdem dreht sich aber der Impulsvektor auch noch schneller und auch aus diesem Grund ist die Änderungsrate größer. Die Geschwindigkeit wirkt sich also auf die Änderungsrate gleich zweimal aus. Daher die Proportionalität zu v^2.

Änderungsrate des Impulses bei einer Kreisbewegung (bei konstantem Geschwindigkeitsbetrag):

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

Der Vektor $\Delta\vec{p}$ der Impulsänderung liegt im rechten Winkel zum Impuls $\vec{p}$.

Mit Hilfe von $v = \omega \cdot r$ können wir die Gleichung umformen in

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = m \cdot \omega^2 \cdot r.$$

Es sieht zunächst so aus, als müsste sich der betrachtete Körper – zum Beispiel ein Auto – auf einer Kreisbahn bewegen, also einen ganzen Kreis durchlaufen. Das braucht er aber gar nicht. Die Formel gilt vielmehr in jedem Augenblick. Sie gilt auch, wenn das Auto nur einen kurzen Bogen (mit konstantem Geschwindigkeitsbetrag) fährt. r ist dann nicht mehr der Radius des durchfahrenen Kreises, sondern der Radius eines gedachten Kreises, zu dem der Bogen gehört. Man bezeichnet r als den *Krümmungsradius* der Bahn in dem betrachteten Augenblick, Abb. 2.64. Immer wenn man die Stellung des Lenkrads eines Autos ändert, ändert man den Krümmungsradius der Bahnkurve des Autos. Solange das Lenkrad festgehalten wird, fährt das Auto auf einer Bahn mit einem konstanten Krümmungsradius.

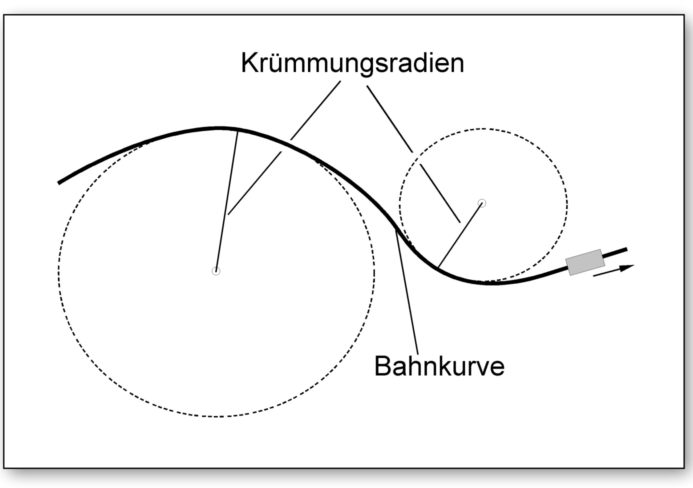


Abb. 2.64
Bahnkurve eines Autos. Der Krümmungsradius der Bahn ändert sich jedes Mal, wenn die Stellung des Lenkrads verändert wird.

Einer bestimmten Stellung des Lenkrads entspricht ein bestimmter Krümmungsradius der Bahn, die das Auto fährt.

Aufgaben

1. Die Straße von Niederoberbach nach Oberniederbach macht eine 90°-Biegung. Geometrisch gesehen besteht die Straße aus zwei Geradenstücken, die durch einen Viertelkreisbogen verbunden sind. Welche Lenkradbewegung müssen die Autofahrer machen, wenn sie die Kurve durchfahren? Wie ist die Änderungsrate des Impulses des Autos als Funktion der Zeit? Die Straße ist offensichtlich schlecht gebaut. Gewöhnlich sind Kurven von Straßen und Autobahnen keine Kreisbögen. Wie sieht eine gut angelegte Kurve aus? Wie ist hier die Änderungsrate des Impulses als Funktion der Zeit?

2. Willy hat eine 500 g schwere Kugel an einer Schnur befestigt und schleudert sie über seinem Kopf im Kreis herum. Eine Umdrehung dauert 0,8 s. Die Schnur ist 1 m lang. Welchen Betrag hat der Impulsstrom, der durch die Schnur fließt.

2.16 Umlenkrollen

Ein Rad mit einer Rille, das man zum Umlenken von Seilen benutzt, nennt man *Umlenkrolle.* Eine Anwendung zeigt Abb. 2.65. Rollen begegnen uns auch beim Kran und beim Flaschenzug.

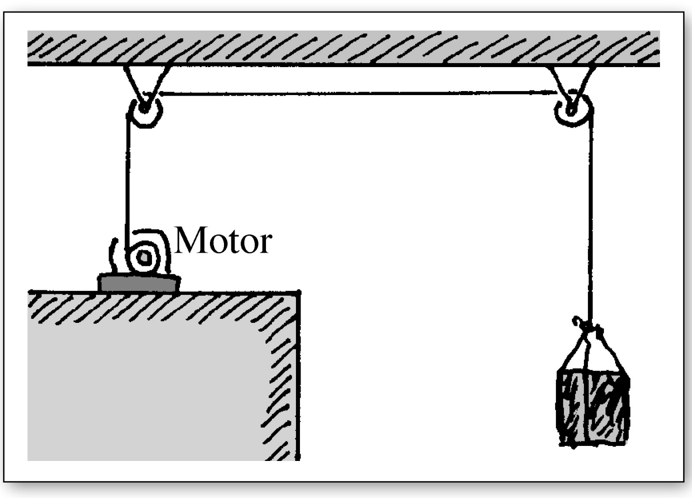


Abb. 2.65
Der Motor zieht eine Last hoch. Das Seil läuft über zwei Umlenkrollen.

Wir wollen das Verhalten von Rollen untersuchen. In die drei Seilstücke A, B und C in Abb. 2.66 ist je ein Impulsstrommesser eingebaut. An der Öse am rechten Ende von Seil A wird so gezogen, dass das entsprechende Messgerät 12 N anzeigt. Was zeigen die Messgeräte in den Seilstücken B und C an?

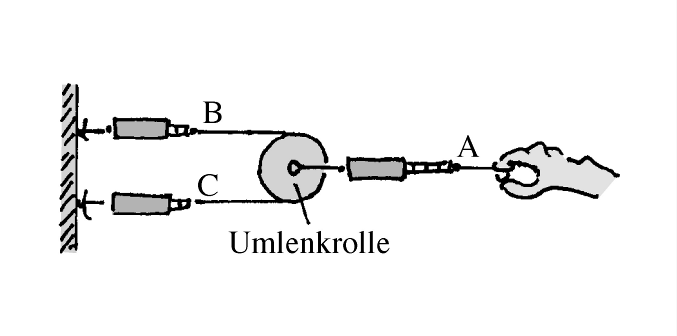


Abb. 2.66
Der Impulsstrom, der durch Seil A fließt, teilt sich in der Rolle in zwei gleich große Teilströme auf.

Wir können das Ergebnis voraussagen. Wir wissen zum einen, dass der Impulsstrom, der durch Seil A geht, in den Seilen B und C weiterfließt. Es muss daher

$F_A = F_B + F_C$

sein.

Weil die ganze Anordnung symmetrisch ist, muss aber außerdem noch gelten:

$F_B = F_C$.

Mit diesen beiden Gleichungen wird

$F_B = F_A/2$

und

$F_C = F_A/2$.

Oder konkreter: Wenn F_A = 12 N ist, wird F_B = 6 N und F_C = 6 N.

Die gestrichelten Linien in Abb. 2.67 zeigen den Weg des Impulses. Es handelt sich um reinen *x*-Impuls (wenn wir die positive *x*-Richtung nach rechts annehmen).

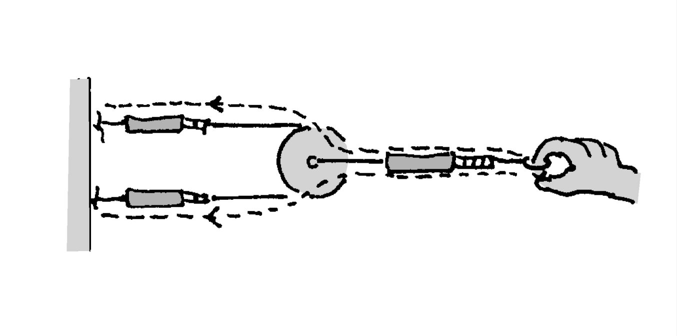


Abb. 2.67
Weg des *x*-Impulses

Wir gehen über zu einem komplizierteren Fall, Abb. 2.68.

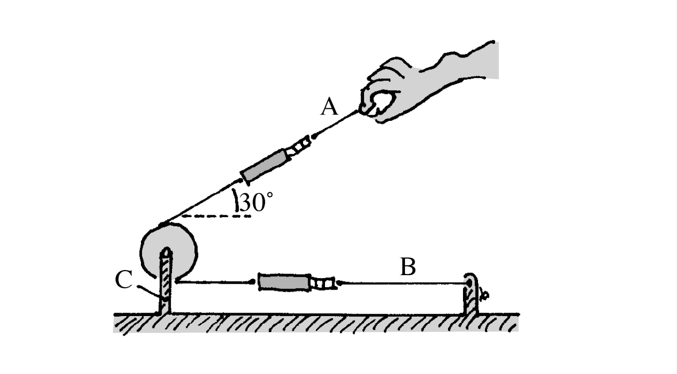


Abb. 2.68
Die Impulsströme in den Seilen A und B haben denselben Betrag aber unterschiedliche Richtungen.

Wir ziehen an Seil A und stellen fest: Egal wie stark wir ziehen – das Messgerät in A zeigt stets dasselbe an wie das in B. Das bedeutet aber nicht, dass die Impulsstromstärken in A und in B gleich sind. Sie sind zwar vom selben Betrag, unterscheiden sich aber in der Richtung. Wir erinnern uns: Der Impuls, der in einem Seil fließt, hat immer dieselbe Richtung wie das Seil. In Seilstück B fließt reiner *x*-Impuls zur Rolle hin, während in Seilstück A *x*- und *y*-Impuls zur Rolle hin fließt.

Durch die Halterung der Rolle fließt die Summe der beiden Impulssorten in die Erde ab. Mit „Summe“ ist natürlich die Vektorsumme gemeint.

Wir fassen zusammen:

Wenn ein Seil über ein frei drehbares Rad (eine Umlenkrolle) läuft, sind die Impulsströme in den beiden Teilen des Seils vom gleichen Betrag.

Aufgaben

1. Der Betrag des Impulsstroms in Seil A in Abb. 2.68 ist 30 N. Zeichne Vektorpfeile für die Impulsströme in den Seilen A und B. Konstruiere den Impulsstromvektor in C durch Vektoraddition.

2. In Seil L in Abb. 2.69, an dem die Last hängt, fließt ein Impulsstrom von 80 N. Konstruiere die Impulsstrom-Vektorpfeile für die beiden schrägen Seilstücke. Konstruiere den Vektorpfeil für den Strom in Seilstück Z, und den in der Halterung der rechten Rolle.

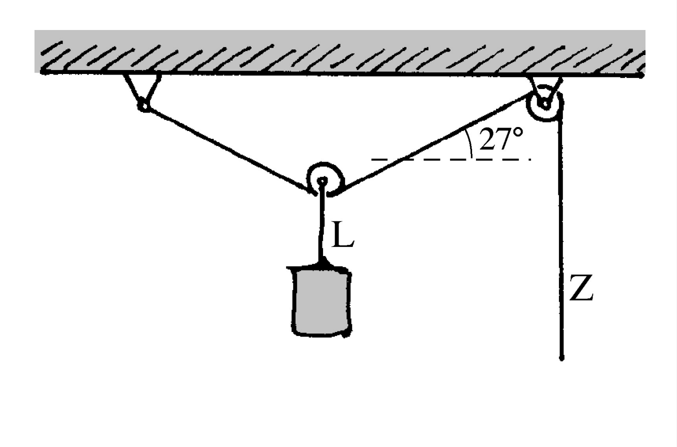


Abb. 2.69
Zu Aufgabe **2**

2.17 Der Zusammenhang zwischen Druck und Impulsstromstärke

Ein Klotz K ist mit einer Feder F zwischen zwei Wänden eingespannt, Abb. 2.70. Durch die Anordnung fließt ein Impulsstrom. Das Fließen eines Impulsstroms ist stets damit verbunden, dass der Leiter des Stroms unter *mechanischer Spannung* steht: unter Druck- oder unter Zugspannung. Du erinnerst dich an unsere Regel: Impulsstrom nach rechts bedeutet Druck, Impulsstrom nach links Zug.

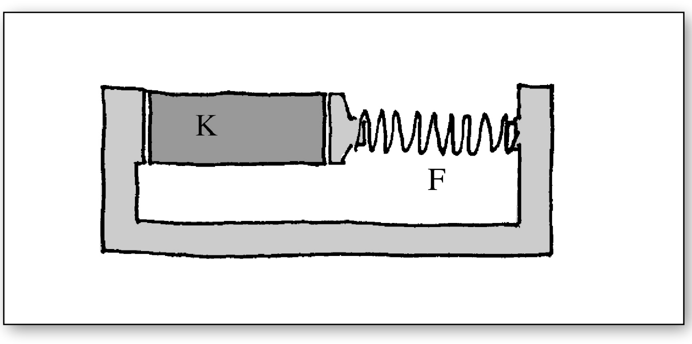


Abb. 2.70
Der Klotz K steht unter Druckspannung.

Wir wollen die Spannung des Klotzes betrachten. Da sich die Impulsströmung über den ganzen Klotz verteilt, steht jeder Teil des Klotzes unter Druckspannung; jeder Teil „spürt“ den Druck, Abb. 2.71.

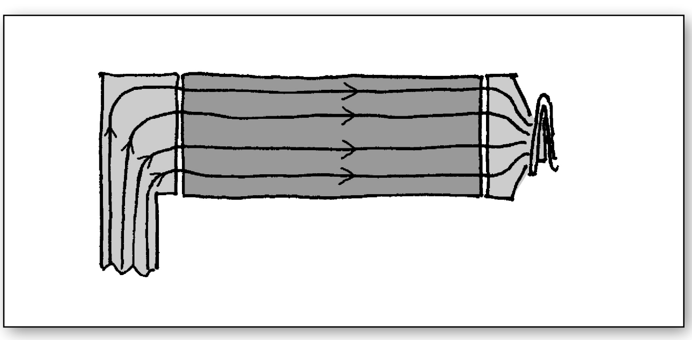


Abb. 2.71
Der Impulsstrom verteilt sich über die ganze Querschnittsfläche des Klotzes.

Wir vergleichen die beiden Klötze K1 und K2 in Abb. 2.72 .

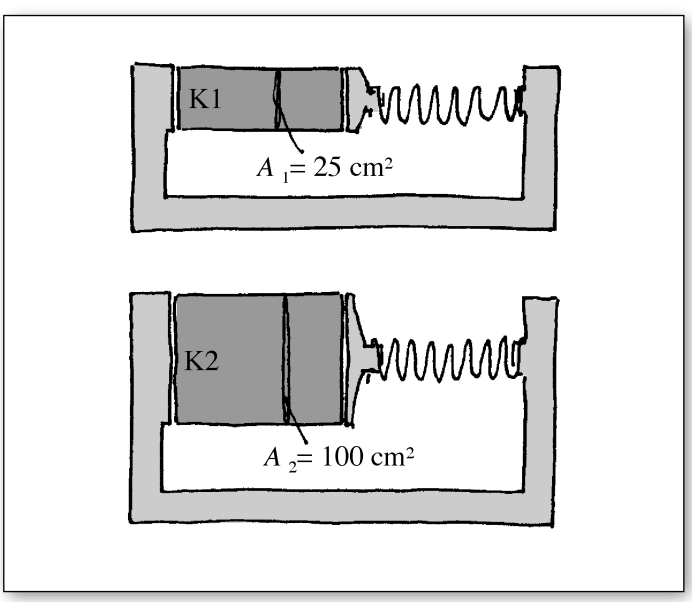


Abb. 2.72
Die Impulsströme in K1 und K2 sind gleich stark. Die Impulsstromstärke pro Fläche, d. h. der Druck, ist in K1 größer als in K2.

Da die beiden Federn völlig gleich sind, fließen in beiden Fällen gleich starke Impulsströme – nehmen wir an 200 Hy/s = 200 N. Klotz K2 hat eine größere Querschnittsfläche als Klotz K1. Daher verteilt sich der Impulsstrom hier auf eine größere Fläche. Die *Impulsstromstärke pro Fläche* ist also kleiner. Durch jeden Quadratzentimeter der Querschnittsfläche von Klotz K1 fließen

$$\frac{200}{25}\ \text{Hy/s} = 8\ \text{N}\ .$$

Durch jeden Quadratzentimeter der Querschnittsfläche von Klotz K2 fließen

$$\frac{200}{100}\ \text{Hy/s} = 2\ \text{N}\ .$$

Ein Stück Materie von K1 „spürt“ daher einen größeren Druck als ein gleich großes Stück Materie von K2.

Wir sehen also: Um die mechanische Spannung an einer bestimmten Stelle irgendwo im Innern eines Körpers zu charakterisieren, kann man die Impulsstromstärke pro Fläche benutzen. Diese Größe, d. h. den Quotienten aus der Impulsstromstärke und der Fläche, durch die der Strom fließt, nennt man Druck. Es ist dieselbe physikalische Größe, die wir früher auf andere Art kennen gelernt hatten.

Da man den Druck mit dem Buchstaben *p* bezeichnet, ist

$$p = \frac{F}{A}$$

Wenn man die Impulsstromstärke in Newton (N) einsetzt und die Fläche in m², so ergibt sich als Maßeinheit für den Druck N/m². Diese Maßeinheit nennt man Pascal, abgekürzt Pa. Es ist also

$$\text{Pa} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

1 Pa ist ein sehr kleiner Druck. Man benutzt deshalb oft die größeren Einheiten

1 kPa = 1000 Pa

und

1 MPa = 1 000 000 Pa,

oder auch das Bar:

1 bar = 100 000 Pa.

Noch einmal zurück zu unseren Klötzen. In Klotz K1 herrscht ein Druck, oder eine *Druckspannung*, wie man auch sagt, von

$$p_1 = \frac{F}{A_1} = \frac{200\ \text{N}}{0{,}0025\ \text{m}^2} = 80\ 000\ \text{Pa} = 80\ \text{kPa}\ .$$

Für Klotz K2 ergibt sich

$$p_2 = \frac{F}{A_2} = \frac{200\ \text{N}}{0{,}01\ \text{m}^2} = 20\ 000\ \text{Pa} = 20\ \text{kPa}$$

(Die Flächeninhalte A_1 und A_2 müssen in m² ausgedrückt werden, damit sich als Druckeinheit Pa ergibt.)

Durch den Körper K in Abb. 2.73 fließt ein Impulsstrom von 200 N in die negative Richtung.

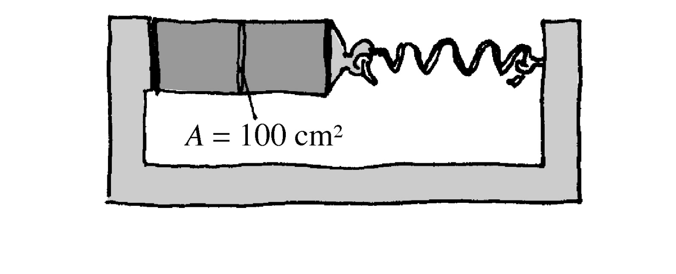


Abb. 2.73
Der Klotz steht unter Zugspannung, der Druck ist negativ.

Bei der Berechnung der Größe *p* berücksichtigt man das, indem man ein Minuszeichen vor den Stromstärkewert setzt. Es ist

$$p = \frac{-200\ \text{N}}{0{,}01\ \text{m}^2} = -20\ 000\ \text{Pa} = -20\ \text{kPa}$$

Ein negativer Wert des Druckes bedeutet also Zugspannung.

Zusammenfassung:

Druck gleich Impulsstromstärke durch Fläche.

Aufgaben

1. Ein Auto wird abgeschleppt. Abb. 2.74 zeigt einen Ausschnitt: den Haken an dem Auto, das gezogen wird, ein Stück Drahtseil und, daran angeknotet, ein Kunststoffseil. In das Auto fließt dabei ein Impulsstrom von 420 N. Berechne die Spannung an den Stellen 1, 2 und 3. Achte auf das Vorzeichen: Druck- oder Zugspannung?

2. Die Seile in Abb. 2.75 haben einen Querschnitt von 1,5 cm². Die Kiste hat eine Masse von 12 kg. Berechne die Zugspannung an den drei Stellen 1, 2 und 3.

3. Du drückst eine Reißzwecke in ein Holzbrett. Schätze den Druck ab, der in der Mitte herrscht, auf halber Höhe des Nägelchens. Welcher Druck herrscht an der Spitze der Reißzwecke?

4. Schätze den Druck ab, der an der Spitze eines Nagels entsteht, wenn man mit einem Hammer auf den Nagel schlägt.

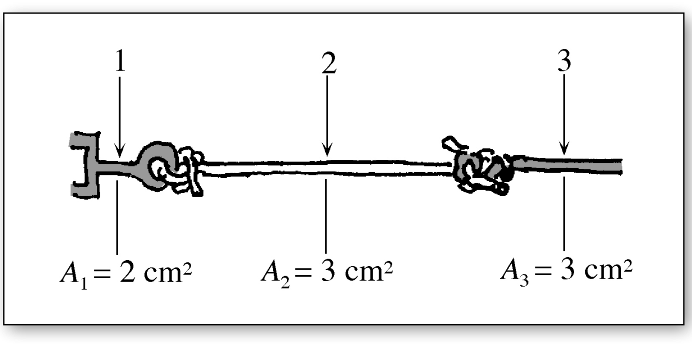


Abb. 2.74
Zu Aufgabe **1**

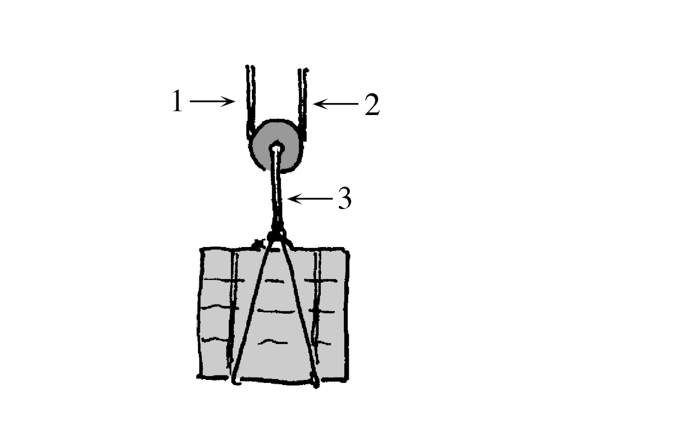


Abb. 2.75
Zu Aufgabe **2**

2.18 Spannungen in drei Richtungen

Wir wollen einen Körper gleichzeitig unter Druck- und unter Zugspannung setzen. „Das geht doch gar nicht", könnte man einwenden, „entweder er steht unter Druck oder unter Zug, das schließt sich doch gegenseitig aus!" Wir kümmern uns nicht um den Einwand und versuchen es einfach – und haben Erfolg.

Wir nehmen den Gegenstand, einen Tafelschwamm zum Beispiel, umfassen ihn mit beiden Händen und drücken die Finger zusammen. Gleichzeitig ziehen wir die Hände auseinander, Abb. 2.76.

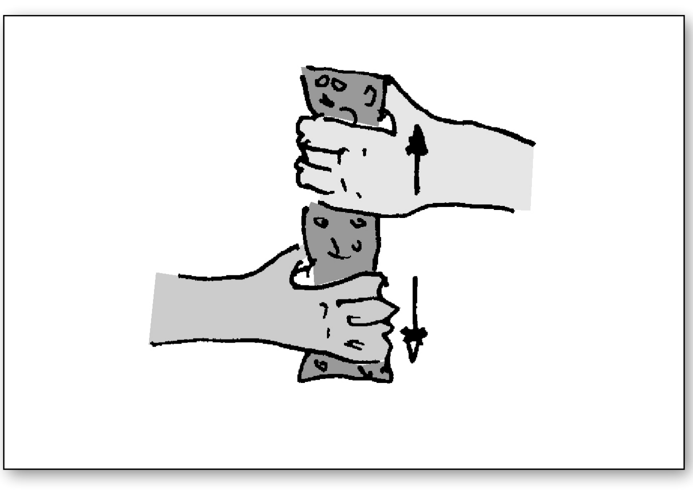


Abb. 2.76
Das Innere des Schwamms steht in senkrechter Richtung unter Zug-, in waagrechter unter Druckspannung.

Das Innere des Schwamms spürt nun tatsächlich gleichzeitig Druck und Zug: Druck in den waagrechten Richtungen und Zug in der senkrechten Richtung. Abb. 2.77 zeigt eine ähnliche Situation: Der Klotz K steht in der waagrechten Richtung unter Zug, in der senkrechten unter Druck. Man kann ihn natürlich auch in beiden Richtungen unter Zug oder in beiden Richtungen unter Druck setzen. Und die Druck- oder Zugspannungen in der waagrechten und senkrechten Richtung können verschiedene Werte haben.

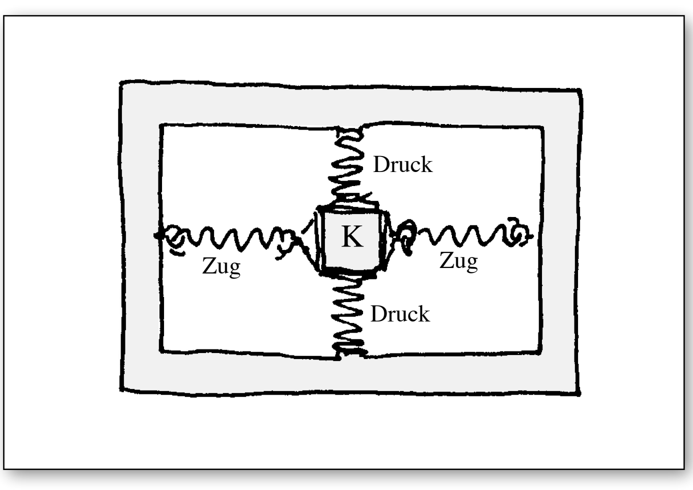


Abb. 2.77
Der Klotz steht in senkrechter Richtung unter Druck, in waagrechter unter Zug.

Im Fall der Abb. 2.78 hat der waagrechte Druck den Wert

$$p_1 = \frac{50\ \text{N}}{0{,}01\ \text{m}^2} = 5000\ \text{Pa} = 5\ \text{kPa}$$

und der senkrechte

$$p_2 = \frac{300\ \text{N}}{0{,}015\ \text{m}^2} = 20\,000\ \text{Pa} = 20\ \text{kPa}$$

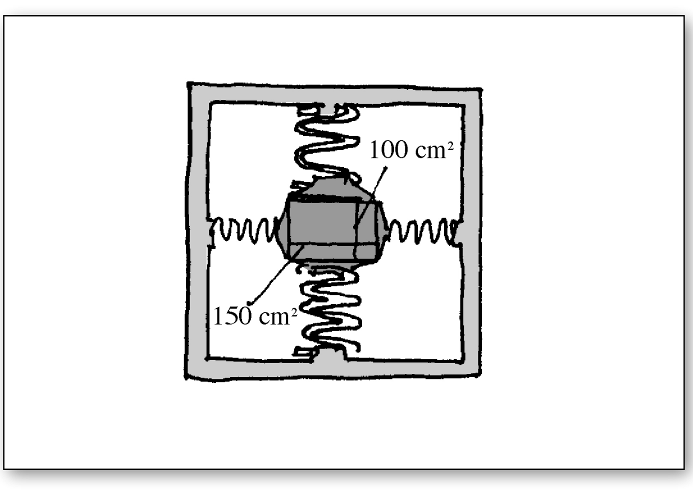


Abb. 2.78
Die Drücke in waagrechter und senkrechter Richtung sind verschieden.

Schließlich kann man den Klotz noch in der dritten Raumrichtung unter eine beliebige Druckspannung oder Zugspannung setzen, Abb. 2.79. Es kann zum Beispiel sein

$p_1 = 5000$ Pa

$p_2 = –2000$ Pa

$p_3 = –40\,000$ Pa

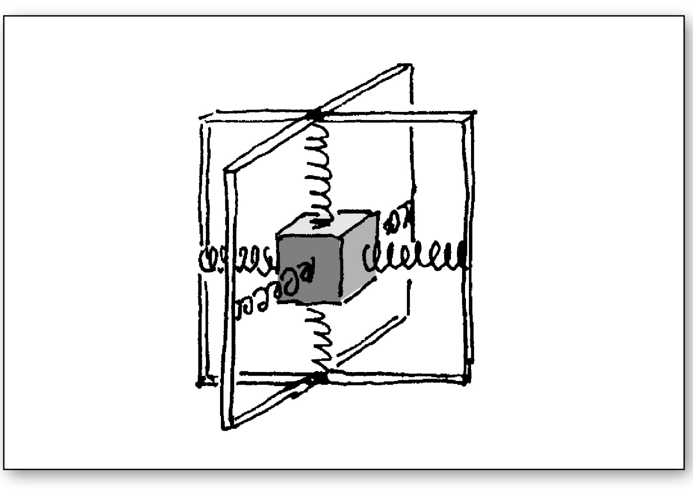


Abb. 2.79
Die Drücke können in drei aufeinander senkrechten Richtungen vorgegeben werden.

Du könntest auf die Idee kommen, dass man so weitermachen kann, dass man weitere verschiedene Druckwerte in weiteren Raumrichtungen erzeugen kann. Warum nicht fünf verschiedene Drücke (oder Zugspannungen) in fünf verschiedenen Richtungen, Abb. 2.80? Weil es nicht geht. Der Beweis dafür ist recht schwierig. Wir wollen deshalb das Ergebnis einfach hinnehmen:

> Man kann Druck- oder Zugspannungen in drei aufeinander senkrechten Richtungen vorgeben.

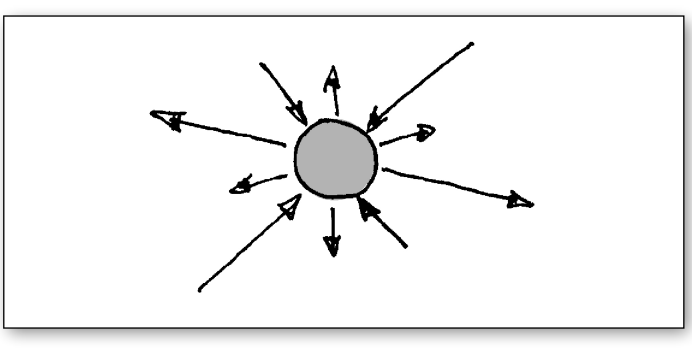


Abb. 2.80
Mehr als drei Drücke kann man in drei Dimensionen nicht vorgeben (in zwei Dimensionen nur zwei).

Sobald man versucht, den Druck in einer vierten Richtung zu verändern, ändern sich automatisch auch die Drücke in den drei ersten Richtungen.

Dieses Ergebnis gilt für jeden Punkt innerhalb eines Körpers. Die mechanische Spannung kann sich aber durchaus von Ort zu Ort ändern. Bei dem zusammengedrückten Schwamm von Abb. 9.7 ist der Druck bzw. Zug in der Mitte sicher anders als am oberen und am unteren Ende.

Wenn der Druck in drei aufeinander senkrechten Richtungen denselben Wert hat, z. B. 12 kPa, so herrscht auch in allen anderen Raumrichtungen dieser Druck, nämlich 12 kPa.

Jedes Material hält nur bestimmte Druck- und Zugspannungen aus. Oft ist es so, dass ein Material für Druck viel höher beanspruchbar ist als für Zug.

Beton zum Beispiel verträgt Druckspannungen von ungefähr 50 MPa, aber Zugspannungen von nur 1/20 dieses Wertes. Manchmal soll aber ein Betonträger an bestimmten Stellen auf Zug belastet werden. Abb. 2.81 zeigt einen Betonträger, der außen aufliegt und in der Mitte eine Last trägt – eine typische Situation. Der Beton im oberen Bereich des Trägers steht in waagrechter Richtung unter Druck. Im unteren Bereich steht er in waagrechter Richtung unter Zug. Da der Beton selbst die Zugspannung nicht aushält, verstärkt man ihn in den Zugbereichen durch Stahl. Denn Stahl hält hohe Zugspannungen aus.

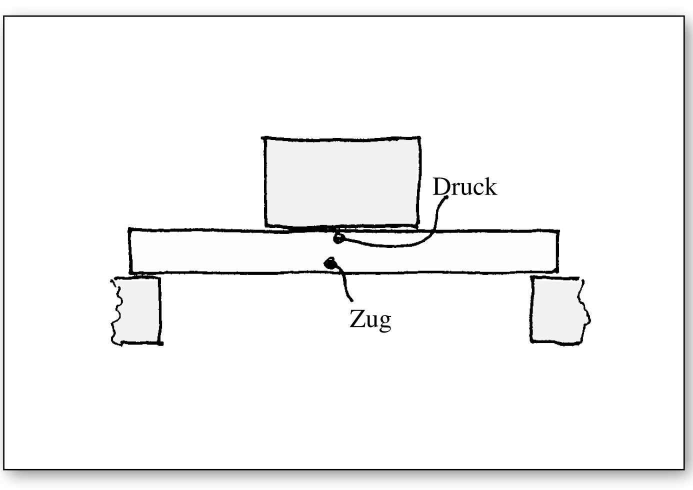


Abb. 2.81
Im oberen Teil des Trägers herrscht in waagrechter Richtung Druck, im unteren Zug.

Aus demselben Grund, nämlich um die Zugfestigkeit des Materials zu erhöhen, werden manche Kunststoffe durch Kohlenstofffasern verstärkt. Man verwendet solche Materialien zum Beispiel zur Herstellung von Skiern, Sprungbrettern für Schwimmbäder und Segelflugzeugen.

Viele Materialien sind in den verschiedenen Richtungen nicht gleich stark belastbar. Ein bekanntes Beispiel ist das Holz. Nadelholz verträgt in Richtung der Maserung eine Zugspannung von etwa 10 MPa, quer dazu aber nur 1/20 davon.

Aufgaben

1. Nenne Materialien, die hohe Zugspannungen, aber nur geringe Druckspannungen vertragen.

2. Nenne Materialien, die hohe Druck-, aber nur geringe Zugspannungen vertragen.

3. Nenne Materialien, die in verschiedenen Richtungen verschiedene Druck- oder Zugspannungen vertragen.

2.19 Der Druck in Flüssigkeiten und Gasen

Wir haben bisher die mechanische Spannung in festen Gegenständen betrachtet. (Auch ein Schwamm ist ein „fester" Gegenstand, denn er ist weder flüssig noch gasförmig.) Wir wollen nun eine Flüssigkeit, z. B. Wasser, unter Druck setzen. Wir stellen uns zunächst absichtlich ungeschickt an und versuchen ähnlich vorzugehen, wie bei dem Klotz in Abb. 2.70: Wir drücken in der Mitte von oben auf das Wasser, Abb. 2.82. Es passiert, was passieren muss: Das Wasser weicht seitlich aus.

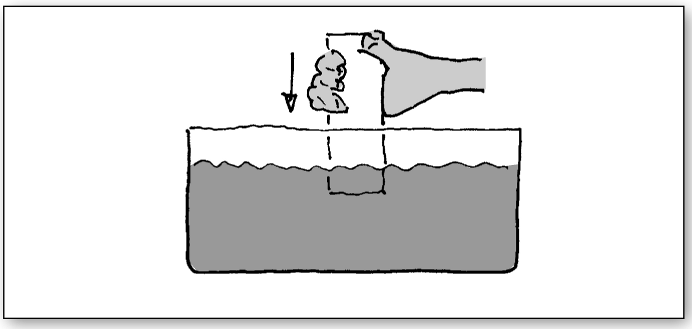


Abb. 2.82
So lässt sich das Wasser nicht unter Druck setzen. Es weicht seitlich aus.

Also gehen wir anders vor: Wir sperren das Wasser ein, so dass es nicht ausweichen kann, Abb. 2.83. Wenn die Querschnittsfläche des Kolbens A = 5 cm² ist, und die Impulsstromstärke F = 200 N, so entsteht ein Druck in waagrechter Richtung von

$$p = \frac{F}{A} = \frac{200\ \text{N}}{0{,}0005\ \text{m}^2} = 400\,000\ \text{Pa} = 0{,}4\ \text{MPa}\ .$$

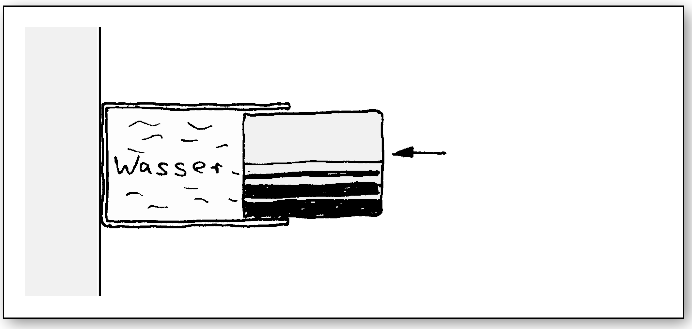


Abb. 2.83
Der Kolben steht nur in waagrechter Richtung unter Druck, das Wasser in allen Richtungen.

Da das Wasser in die Richtungen quer zur Druckrichtung des Kolbens auszuweichen versucht, entsteht aber auch in diesen Querrichtungen eine Druckspannung, die denselben Wert hat wie die in Kolbenrichtung. In allen anderen Richtungen herrscht ein Druck desselben Betrages.

Der in Abb. 2.84 dargestellte Versuch zeigt das besonders deutlich.

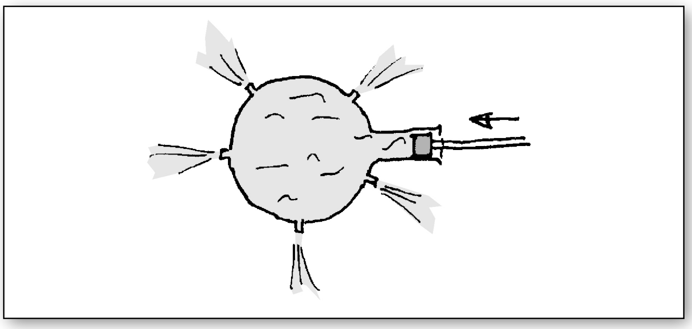


Abb. 2.84
Da in allen Richtungen Druck herrscht, spritzt das Wasser in alle Richtungen.

An einer beliebigen Stelle einer Flüssigkeit herrscht in allen Richtungen derselbe Druck.

Das gilt auch für Gase, denn Gase weichen ebenfalls seitlich aus, wenn man sie nicht daran hindert.

2.20 Die Kraft

In diesem Abschnitt geht es um nichts anderes als um ein anderes Wort für einen bekannten Begriff.

Newton hatte sein großes Werk, die „Principia Mathematica“, in lateinischer Sprache abgefasst, wie es damals üblich war. Was wir hier Impulsstrom nennen, hieß bei ihm „vis“, auf deutsch „Kraft“. Das Symbol *F* kommt vom englischen Wort „Force“.

Den Namen Impulsstromstärke für die Größe *F* gibt es erst seit Anfang des vorigen Jahrhunderts. Der Name Kraft für die Größe *F* ist aber heute noch weit verbreitet, ja er wird sogar viel häufiger gebraucht als der Name Impulsstromstärke. Wir müssen uns daher an seinen Gebrauch gewöhnen. Dabei gibt es allerdings ein Problem: Obwohl „Kraft” dieselbe physikalische Größe bezeichnet wie „Impulsstromstärke”, geht man mit den beiden Wörtern ganz unterschiedlich um. Wir wollen eine Beschreibung mit Impulsströmen das Impulsstrommodell nennen und eine mit Kräften das Kraftmodell.

Wir erläutern den Umgang mit dem Kraftmodell anhand der Abbildungen 2.85 und 2.86. In Abb. 2.85 zieht Lilly an einem gut gelagerten Wagen, so dass sich dieser nach rechts in Bewegung setzt. Zunächst noch einmal, zur Erinnerung, die Beschreibung im Impulsstrommodell:

> Lilly pumpt Impuls aus der Erde über das Seil in den Wagen. Dadurch nimmt der Impuls des Wagens zu.

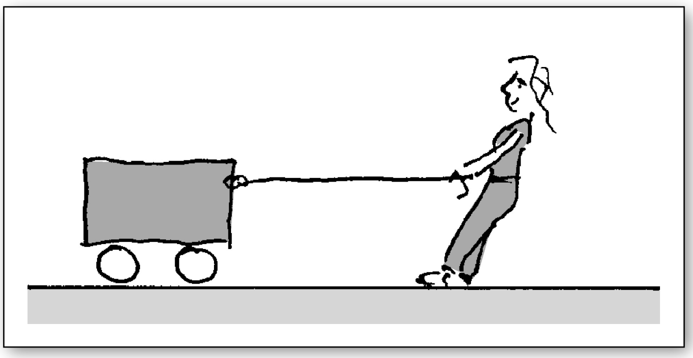


Abb. 2.85
Lilly übt auf den Wagen eine Kraft aus. Dadurch ändert sich der Impuls des Wagens.

Mit dem Kraftmodell beschreibt man denselben Vorgang so:

> Auf den Wagen wirkt eine Kraft. Dadurch nimmt der Impuls des Wagens zu.

Die Situation von Abb. 2.86 zunächst im Impulsstrommodell:

> Wir haben einen geschlossenen Stromkreis. Der Impuls fließt von rechts durch die Feder in den Wagen hinein, und links wieder heraus. Weil der ganze Impuls wieder herausfließt, ändert sich der Impuls des Wagens nicht.

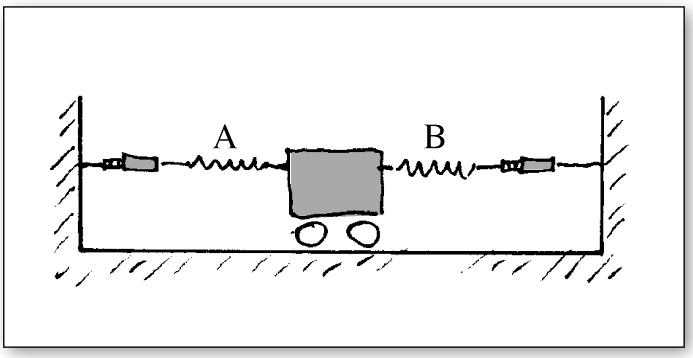


Abb. 2.86
Feder A übt auf den Wagen eine nach links gerichtete, Feder B eine nach rechts gerichtete Kraft aus. Da diese Kräfte vom selben Betrag sind, ändert sich der Impuls des Wagens nicht.

Im Kraftmodell ist die Beschreibung etwas komplizierter:

> Feder A übt auf den Wagen eine nach links gerichtete Kraft aus, Feder B übt auf den Wagen eine nach rechts gerichtete Kraft desselben Betrages aus. Da die Kräfte vom gleichen Betrag sind, aber in die entgegengesetzte Richtung wirken, ändert sich der Impuls des Wagens nicht.

3

Drehimpuls und Drehimpulsströme

Es geht in diesem Kapitel um eine besondere Art von Bewegungen: um Drehbewegungen. Dass Drehbewegungen an vielen Stellen stattfinden, dass sie besonders wichtig sind, wird dir klar sein.

Wir werden eine interessante Entdeckung machen: Die Beschreibung von Drehbewegungen hat sehr viel Ähnlichkeit mit der Beschreibung von geradlinigen Bewegungen. Man kann auch sagen, es existiert eine Analogie zwischen den entsprechenden Bereichen der Mechanik. Dank dieser Analogie können wir uns viel Arbeit sparen.

3.1 Der Drehimpuls

Wir betrachten ein gut gelagertes, frei laufendes Rad; zum Beispiel das Rad eines umgedrehten Fahrrades, Abb. 3.1. Es dreht sich mit einer bestimmten Winkelgeschwindigkeit, es macht eine bestimmte Zahl von Umdrehungen pro Sekunde. Wir können den Wert der Winkelgeschwindigkeit mit Hilfe einer Stoppuhr bestimmen. Wir haben damit die Drehbewegung des Rades beschrieben.

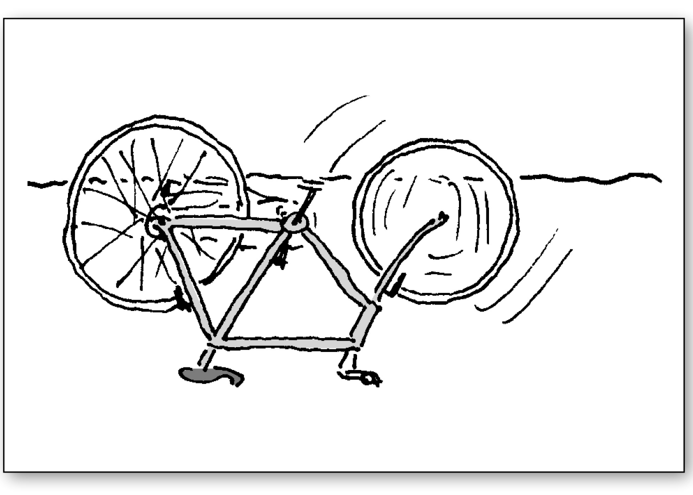


Abb. 3.1
Das sich drehende Rad hat eine bestimmte Menge Drehimpuls.

Die Winkelgeschwindigkeit ist für die Drehbewegung das, was die gewöhnliche Geschwindigkeit für die geradlinige Bewegung ist. Zur Beschreibung der geradlinigen Bewegung hatten wir aber noch eine zweite Größe eingeführt: den Impuls. Er ist ein Maß für den „Schwung", den ein Körper hat.

Genauso kann man auch von unserem sich drehenden Rad sagen, es habe Schwung: etwas, das man hineinsteckt, wenn man es in Drehung versetzt, und das wieder herauskommt, wenn man das Rad abbremst. Diese Art Schwung nennt man *Drehimpuls*.

Das Symbol für den Drehimpuls ist *L*. Die Maßeinheit ist Euler, abgekürzt E, nach dem großen Mathematiker und Naturwissenschaftler Leonhard Euler (1707 - 1783), Abb. 3.2, der die Erhaltung des Drehimpulses zum ersten Mal formulierte.

Abb. 3.2
Leonhard Euler

Drehimpuls und gewöhnlicher Impuls sind nicht dasselbe. Wenn das Rad in Abb. 3.3a gewöhnlichen Impuls hätte, müsste es sich so bewegen wie es Abb. 3.3b zeigt.

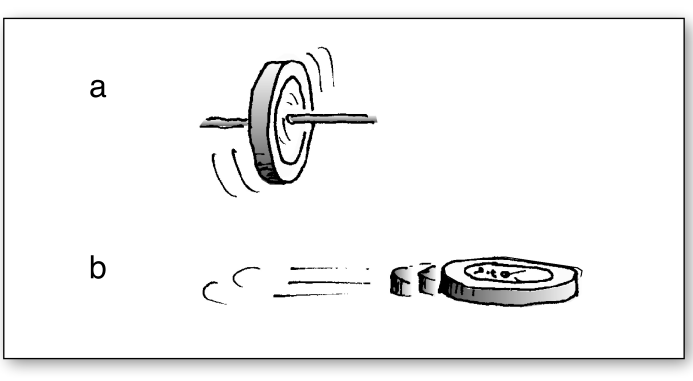


Abb. 3.3
(a) Das Rad hat Drehimpuls.
(b) Das Rad hat gewöhnlichen Impuls.

Wir machen ein Experiment mit zwei Rädern, Abb. 3.4. Das Lager des einen ist am Tisch befestigt, das andere kann man herumtragen. Die Räder können mit einer Art Rutschkupplung verbunden werden. Das eine Rad nimmt dann das andere mit.

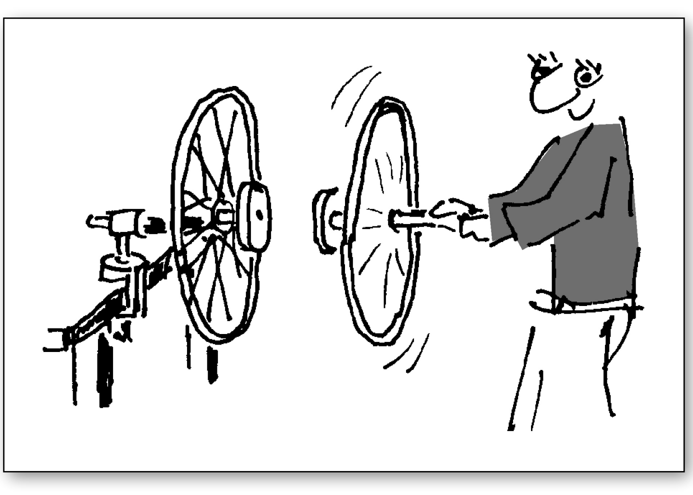


Abb. 3.4
Sobald sich die Kupplungsscheiben berühren, beginnt Drehimpuls vom rechten zum linken Rad zu fließen.

Die Räder sind zunächst getrennt. Das eine wird in Drehung versetzt, das andere nicht. Dann bringt man die Kupplungsscheiben in Kontakt. Was passiert?

Das sich drehende Rad wird langsamer, das andere, das sich zu Anfang nicht drehte, gerät in Drehung. Nachdem die Kupplungsscheiben eine Weile aneinander entlang gerutscht sind, erreichen sie schließlich dieselbe Winkelgeschwindigkeit.

So weit die Beobachtung. Wie ist die Erklärung? Was ist bei dem Vorgang mit dem Drehimpuls passiert?

Der Drehimpuls des Rades, das sich zu Anfang drehte, hat abgenommen. Der Drehimpuls des Rades, das sich nicht drehte, hat zugenommen. Es muss Drehimpuls vom einen zum anderen gelangt sein.

> Drehimpuls kann von einem auf einen anderen Körper übergehen.

Noch einmal ein einzelnes Rad, fest mit seiner Achse verbunden. Die Achse ist gut gelagert. Das Rad wird in Drehung versetzt, es wird mit Drehimpuls geladen. Willy umfasst nun die rotierende Achse mit der Hand und „bremst", Abb. 3.5. Nach einer Weile kommt das Rad zum Stillstand. Wo ist der Drehimpuls geblieben?

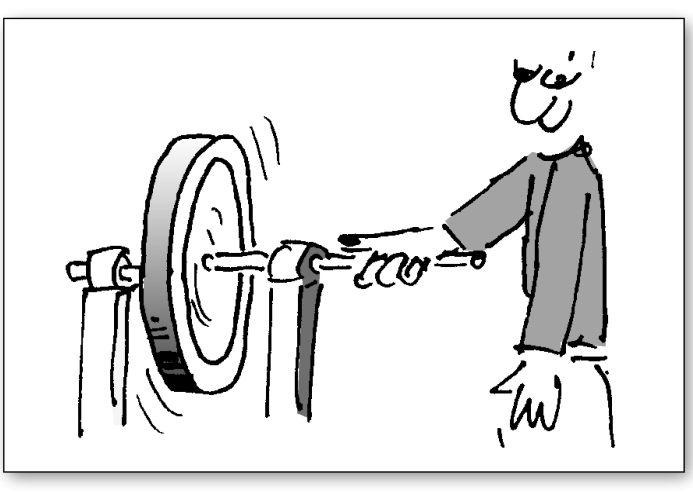


Abb. 3.5
Der Drehimpuls fließt in die Erde ab.

Die Situation ist ganz ähnlich zu einer, die du kennst: wenn ein Fahrzeug, das sich geradlinig bewegt, bremst. Genauso, wie bei dem Fahrzeug der Impuls in die Erde abfließt, so fließt bei dem rotierenden Rad der Drehimpuls in die Erde ab. Dasselbe wäre passiert, wenn man das Rad nicht absichtlich gebremst hätte. Dann wäre der Drehimpuls über die Lager in die Erde abgeflossen – nur langsamer.

Du siehst, wozu Radlager gut sind: Sie sollen ein Rad oder eine Achse halten, ohne dass dabei Drehimpuls in die Erde abfließt.

> Ist ein Rad schlecht gelagert, so dass es von selbst zum Stillstand kommt, so fließt sein Drehimpuls in die Erde ab.

Noch einmal zu dem Experiment von Abb. 3.4. Wir versetzen das am Tisch befestigte Rad in Drehung. Dann versetzen wir auch das bewegliche Rad in Drehung – allerdings in die entgegengesetzte Richtung. Wir richten es so ein, dass der Betrag der Winkelgeschwindigkeit für beide Räder gleich ist.

Wieder werden die Räder mit Hilfe der Rutschkupplung in Verbindung gebracht. Wie sieht diesmal der Endzustand aus? Beide Räder stehen still. Und die Erklärung? Vorher war doch Drehimpuls vorhanden. Wo ist der denn geblieben?

Jedes Rad für sich hatte am Anfang eine von null verschiedene Menge Drehimpuls. Wenn man aber die Drehimpulsmenge des einen Rades mit dem umgekehrten Vorzeichen versieht wie die des anderen, so war der Gesamtdrehimpuls auch am Anfang schon null. Wir schließen aus dem Experiment:

> Der Drehimpuls kann positive und negative Werte annehmen.

Welchen der beiden Werte wir als positiv und welchen als negativ bezeichnen, können wir willkürlich festlegen. Wie kann man aber eine solche Festlegung treffen? Eine praktische Möglichkeit stellt die *Rechte-Hand-Regel* dar, Abb. 3.6:

> Man umfasst mit der rechten Hand die Drehachse so, dass die gekrümmten Finger in die Drehrichtung weisen. Zeigt dann der Daumen in die positive *x*-Richtung, so ist der Drehimpuls positiv, zeigt er in die negative *x*-Richtung, so ist der Drehimpuls negativ.

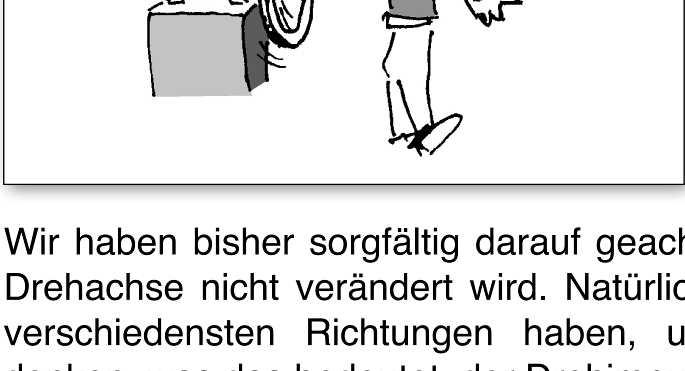


Abb. 3.6
Die Rechte-Hand-Regel

Wir haben bisher sorgfältig darauf geachtet, dass die Richtung der Drehachse sich nicht verändert wird. Natürlich kann die Drehachse die verschiedensten Richtungen haben, und du kannst dir schon denken, was das bedeutet: der Drehimpuls ist ein Vektor. Mit diesem Thema beschäftigen wir uns später. Vorläufig lassen wir die Richtung der Drehachse immer fest, nämlich parallel zur *x*-Achse.

Du siehst, dass man mit dem Drehimpuls ganz ähnlich umgeht wie mit dem gewöhnlichen Impuls, oder auch mit der elektrischen Ladung. Auch der Drehimpuls ist eine mengenartige Größe. Und eine weitere wichtige Eigenschaft hat er mit dem Impuls und der Ladung gemeinsam:

> Drehimpuls kann man nicht erzeugen und nicht vernichten.

Aufgabe

Formuliere allgemein gültige Sätze über den Drehimpuls und die analogen Sätze für den Impuls und die elektrische Ladung.

3.2 Drehimpulspumpen

Wie der Impuls bei einem Reibungsvorgang vom Körper mit der höheren zu dem mit der niedrigeren Geschwindigkeit fließt, so geht der Drehimpuls von dem Körper mit der höheren Winkelgeschwindigkeit zu dem mit niedrigeren. Drehimpuls fließt von selbst aus einem Rad, das positiven Drehimpuls enthält, heraus: über die nie ganz perfekten Lager in die Erde.

Um den Drehimpuls in das Rad hinein zu bekommen, muss man eine Anstrengung machen. Von selbst gerät ein Rad nicht in Drehung.

Man kann ein Rad mit der Hand mit Drehimpuls laden, etwa mit Hilfe einer Kurbel. Oder man überlässt die Arbeit einem Motor, Abb. 3.7.

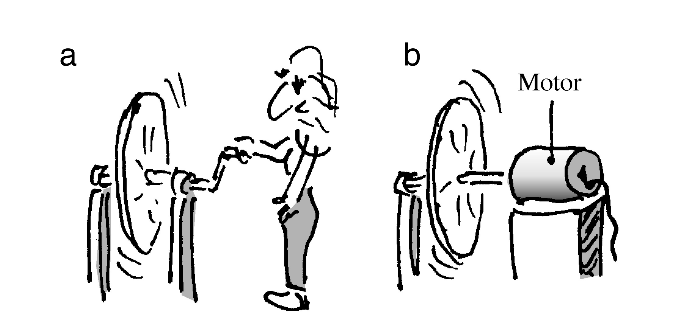


Abb. 3.7
(a) Lilly arbeitet als Drehimpulspumpe.
(b) Der Motor arbeitet als Drehimpulspumpe.

In beiden Fällen wird etwas gebraucht, das das Laden mit Drehimpuls erzwingt: eine „Drehimpulspumpe“. Im ersten Fall arbeitet Lilly als Drehimpulspumpe, im zweiten Fall der Motor. Und woher nimmt die Drehimpulspumpe den Drehimpuls? Es ist wie beim gewöhnlichen Impuls: Auch Drehimpuls kann aus der Erde geholt werden. Ein Versuch zeigt das sehr deutlich. Wir legen die positive *x*-Achse senkrecht nach oben. Gebraucht wird ein Drehstuhl und ein recht großes, gut gelagertes Rad, das man an seiner Achse bequem halten kann. Willy steht neben dem Drehstuhl, hält das Rad so, dass die Achse senkrecht steht und wirft es an. Dann setzt er sich auf den Drehstuhl, Abb. 3.8, und bremst das Rad ab bis es stillsteht. Er stellt fest, dass er sich dabei selbst zu drehen beginnt. Wie kommt das? Beim Bremsen ist Drehimpuls aus dem Rad abgeflossen, in Willy und den Drehstuhl hinein – aber nicht weiter. Er konnte nicht in die Erde fließen, weil der Drehstuhl durch das Lager von der Erde isoliert ist.

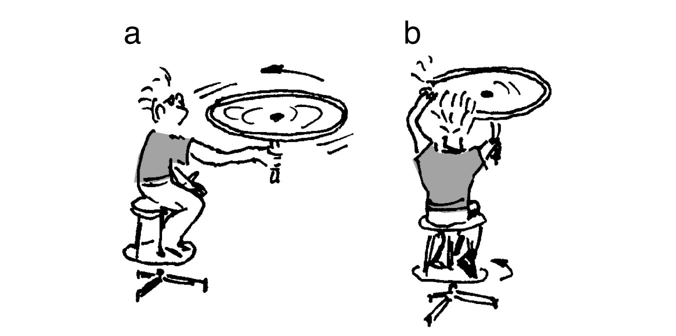


Abb. 3.8
(a) Nur das Rad hat Drehimpuls.
(b) Aus dem Rad fließt Drehimpuls in Willy und Stuhl.

Stützt sich Willy während des Bremsens des Rades am Fußboden ab, so kann der Drehimpuls direkt in die Erde abfließen.

Noch eine andere Variante des Experiments. Willy sitzt auf dem Drehstuhl und hält das Rad, Abb. 3.9. Drehstuhl und Rad sind zunächst in Ruhe. Willy versetzt nun das Rad in Drehung. Was passiert? Beim Andrehen beginnt auch der ganze Drehstuhl sich zu drehen, zusammen mit Willy – allerdings in die der Raddrehung entgegengesetzte Richtung. Willy hat offensichtlich Drehimpuls aus dem Stuhl und aus sich selbst in das Rad befördert. Willy plus Stuhl haben jetzt negativen Drehimpuls.

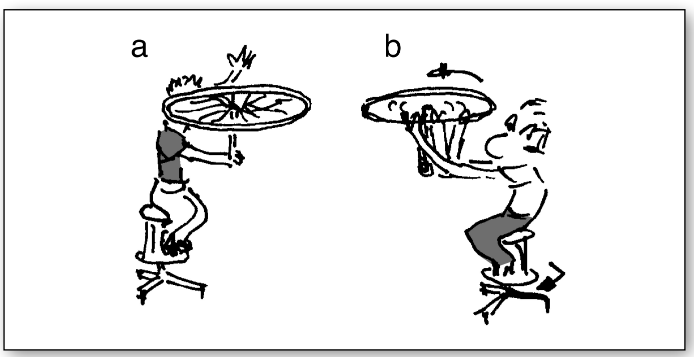


Abb. 3.9
(a) Das Rad, Willy und der Stuhl ohne Drehimpuls.
(b) Drehimpuls wird aus Willy und Stuhl in das Rad gepumpt.

Wenn sich Willy beim Laden des Rades wieder an der Erde abstützt, wird sich der Stuhl nicht drehen. Der Drehimpuls wird direkt aus der Erde ins Rad gepumpt.

Aufgabe

Willy hält in jeder Hand, mit der Achse nach oben, ein rotierendes Rad, Abb. 3.10. Die Räder sind gleichartig gebaut. Ihre Winkelgeschwindigkeiten haben denselben Betrag, die Drehrichtungen sind aber entgegengesetzt. Während Willy auf dem Drehstuhl sitzt, bremst er beide Räder gleichzeitig ab. Was passiert? Was passiert beim Abbremsen, wenn sich die beiden Räder vorher in die gleiche Richtung gedreht haben?

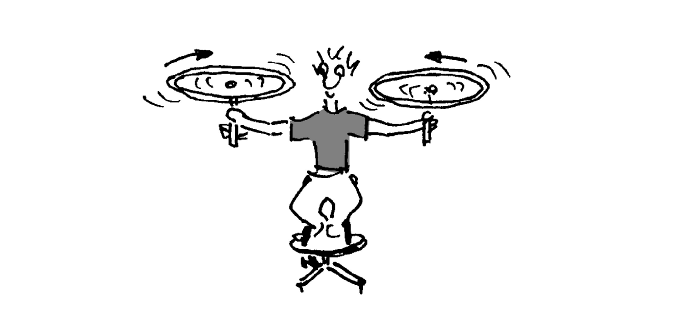


Abb. 3.10
Zur Aufgabe

3.3 Wovon der Drehimpuls abhängt – Schwungräder

Ein rotierendes Rad enthält Drehimpuls. Es ist ein Drehimpulsspeicher. Manche Räder dienen ausschließlich dem Zweck, Drehimpuls zu speichern. Man nennt sie Schwungräder.

Wozu braucht man Schwungräder? Dampfmaschinen und Verbrennungsmotoren (Automotoren) pumpen den Drehimpuls nicht gleichmäßig, sondern stoßweise. Ein Automotor produziert pro Sekunde etwa 50 Drehimpulsstöße. Zwischen diesen Stößen gibt es kurze Zeitintervalle, in denen er nicht „pumpt". Um diese Totzeiten zu überbrücken, hat der Motor ein Schwungrad. Während er arbeitet, geht ein Teil des Drehimpulses ins Schwungrad hinein; während der Totzeit kommt wieder etwas davon heraus. So liefert der Motor einen einigermaßen gleichmäßigen Drehimpulsstrom.

Wie bringt man in einem Schwungrad möglichst viel Drehimpuls unter? Wir wollen untersuchen, wovon der Drehimpuls eines rotierenden Körpers abhängt.

Wir benutzen eine ganz einfache, etwas grobe Methode, Drehimpulsmengen zu vergleichen. Der zu untersuchende Körper sitzt auf einer gut gelagerten Welle, Abb. 3.11.

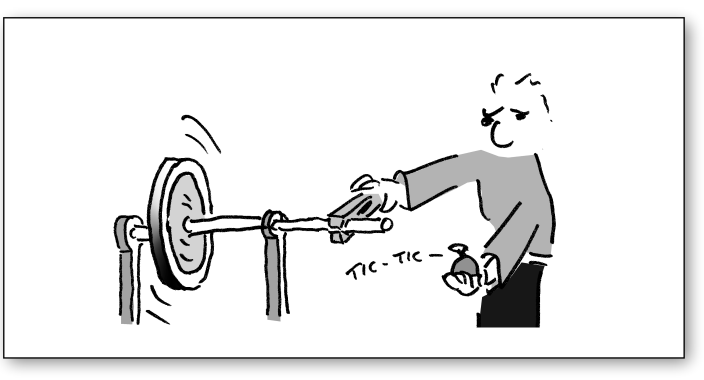


Abb. 3.11 Willy misst die Zeit, die der Drehimpuls braucht, um aus dem Schwungrad herauszufließen.

Wir klemmen dann eine Wäscheklammer an die Welle, und zwar so, dass sich die Klammer nicht mitdreht. Sie wirkt also als Bremse. In anderen Worten: Über die Wäscheklammer fließt Drehimpuls ab. Wir messen nun die Zeit, die das Rad braucht, um zum Stillstand zu kommen, bis also der ganze Drehimpuls herausgeflossen ist. Der Drehimpuls, der am Anfang in dem Rad war, ist dann proportional zur Zeit. (Damit das richtig ist, muss der Drehimpulsstrom während des Bremsens konstant sein. Diese Bedingung ist bei unserer Wäscheklammerbremse recht gut erfüllt.)

Wir vergleichen nun jeweils zwei rotierende Räder oder andere Körper.

1. Zwei Räder, die ganz gleichartig gebaut sind. Das eine dreht sich schnell, das andere langsam. Das Abbremsen des schnellen Rades dauert länger als das Abbremsen des langsamen. Das schnelle Rad enthält also mehr Drehimpuls als das langsame, Abb. 3.12. Wenn man die Winkelgeschwindigkeit nach dem Andrehen misst, kann man feststellen, dass der Drehimpuls proportional zur Winkelgeschwindigkeit ist:

$L \sim \omega$.

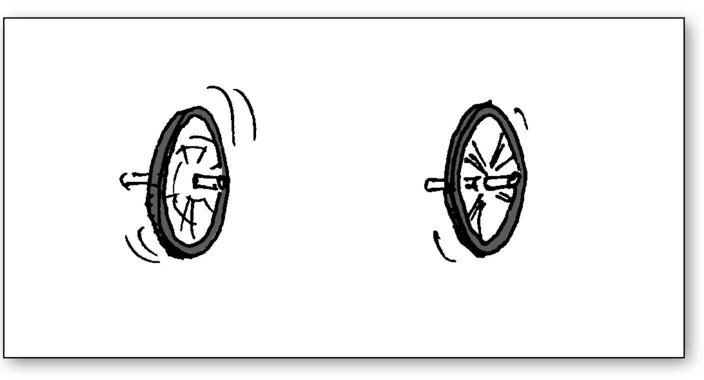


Abb. 3.12 Das schnell rotierende Rad hat mehr Drehimpuls als das langsam rotierende.

2. Zwei Räder haben dieselbe Form, bestehen aber aus verschiedenen Materialien. Das eine zum Beispiel aus Eisen, das andere aus Aluminium. Sie sind also unterschiedlich schwer. Beide werden auf dieselbe Winkelgeschwindigkeit gebracht. Das Abbremsen des schwereren dauert länger als das Abbremsen des leichteren. Das schwere Rad hatte also mehr Drehimpuls als das leichte, Abb. 3.13. Man findet:

$L \sim m$.

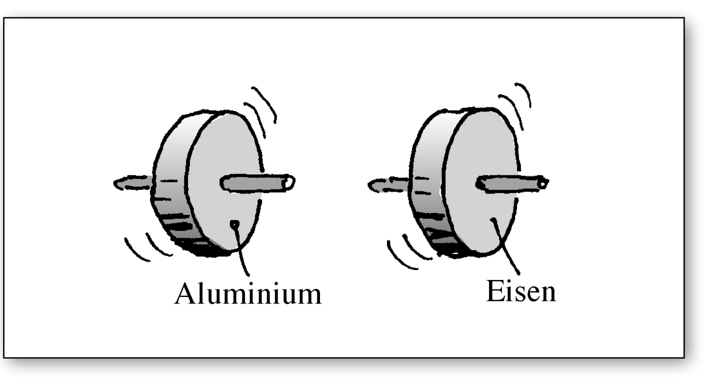


Abb. 3.13 Das schwere Rad hat mehr Drehimpuls als das leichte.

3. Wir vergleichen nun noch zwei Körper, die sich weder in der Masse noch in der Winkelgeschwindigkeit unterscheiden. Der einzige Unterschied besteht darin, dass bei dem einen die Masse weiter außen sitzt als beim anderen, Abb. 3.14. Man stellt fest: Der Drehimpuls ändert sich sehr stark mit dem Abstand der Massen von der Drehachse. Der genaue Zusammenhang ist:

$L \sim r^2$.

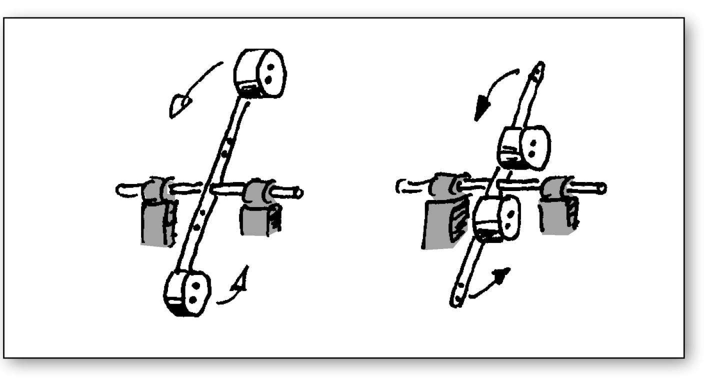


Abb. 3.14 Beide „Hanteln" haben dieselbe Masse, aber das Trägheitsmoment der linken Hantel ist größer als das der rechten.

Diese Beziehung kann natürlich nur gelten, wenn sich die ganze Masse in einem einzigen Abstand r von der Drehachse befindet. Das ist bei dem hantelförmigen Gebilde der Abbildung 3.14 ungefähr der Fall. Auch bei einem typischen Schwungrad, Abb. 3.15, sitzt die Masse im Wesentlichen in einer bestimmten Entfernung von der Drehachse.

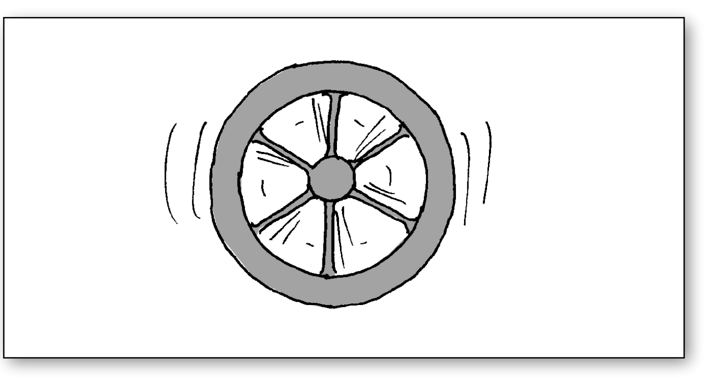


Abb. 3.15 Schwungrad: Die Masse sitzt weit außen.

Wenn das nicht mehr der Fall ist, wie etwa bei den massiven Rädern der Abbildung 3.13, so ist der Zusammenhang komplizierter. Zum Gesamtdrehimpuls tragen dann Massen bei, die sich in den verschiedensten Entfernungen von der Achse befinden. Wir wollen uns auf den Fall beschränken, dass wir es mit einem einzigen Abstand zu tun haben. Wir fassen die drei Proportionalitäten zusammen, und erhalten:

$L \sim m \cdot r^2 \cdot \omega$.

Die Maßeinheit Euler ist nun gerade so definiert, dass hier das Proportionalitätszeichen durch das Gleichheitszeichen ersetzt werden kann:

$$L = m \cdot r^2 \cdot \omega. \qquad (1)$$

Wir vergleichen diese Gleichung mit der entsprechenden Gleichung für den Impuls:

$p = m \cdot v$.

Hier charakterisiert die Masse m den Körper, und v sagt uns wie schnell er sich bewegt.

In Gleichung (1) charakterisiert der Term $m \cdot r^2$ den Körper, und ω sagt, wie schnell er sich dreht. Es liegt nahe, dem Term $m \cdot r^2$ einen eigenen Namen zu geben: Man nennt ihn das *Trägheitsmoment* des Körpers oder des Rades, abgekürzt J. Das Trägheitsmoment sagt uns, wie träge ein Körper in Bezug auf Rotationsbewegungen ist; wie schwer es ist, ihn in Drehung zu versetzen oder abzubremsen.

Wir können damit statt Gleichung (1) schreiben:

$L = J \cdot \omega$.

Ein Körper enthält um so mehr Drehimpuls, je höher seine Winkelgeschwindigkeit ist. Ein Körper enthält um so mehr Drehimpuls, je größer sein Trägheitsmoment ist (je größer seine Masse ist, und je weiter außen die Masse sitzt).

Wir wissen damit, wie ein Schwungrad aussehen muss: Ein großer, schwerer Ring, der mit dünnen Speichen an der Radnabe befestigt ist, Abb. 3.15.

Aufgaben

1. Räder haben unterschiedliche Funktionen. Das Speichern von Drehimpuls ist nur eine davon. Wozu benutzt man Räder noch? Nenne mehrere unterschiedliche Verwendungszwecke.

2. Man kann in einem Schwungrad nicht dadurch beliebig viel Drehimpuls speichern, dass man es immer schneller rotieren lässt. Warum nicht?

3. Das Schwungrad eines Autos hat eine Masse von 8,5 kg. Die Masse ist zwar auf verschiedene Abstände verteilt. Wir können aber als typischen Abstand r = 20 cm nehmen. Berechne das Trägheitsmoment des Schwungrads. Wie viel Drehimpuls enthält es bei 3000 Umdrehungen pro Minute?

4. Schätze ab, auf welchen Wert die Winkelgeschwindigkeit einer Eistänzerin zunimmt, wenn sie eine Pirouette macht. Sie dreht sich zunächst mit 1 Umdrehung pro Sekunde, wobei sie ein Bein und beide Arme ausgestreckt hält.

5. Ein Stern kollabiert und in einer „Supernovaexplosion" entsteht ein Neutronenstern. Der Neutronenstern ist sehr viel kleiner als der ursprüngliche Stern, seine Massendichte ist sehr, sehr groß (etwa 10^{12} kg/cm^3) und er dreht sich sehr schnell. Für den Ausgangsstern nehmen wir an, dass sich seine Masse in einem Abstand von 50 000 km vom Mittelpunkt befindet, für den Neutronenstern sei der Abstand 10 km. (In Wirklichkeit ist die Masse natürlich über einen großen Abstandsbereich verteilt, aber für eine grobe Abschätzung können wir mit einem mittleren Radius rechnen.) Der Ausgangsstern dreht sich in 120 Tagen einmal um seine Achse. Wie schnell dreht sich der entstehende Neutronenstern?

6. Setz dich auf einen Drehstuhl, und zwar so, dass deine Beine weder die Erde noch die Stuhlbeine berühren. Versuche nun, dich mit dem Sitz zu drehen. Es geht noch besser, wenn du in jede Hand einen schweren Gegenstand nimmst. Genau so macht es die Katze, um auf die vier Beine zu fallen. Erkläre.

3.4 Drehimpulsleiter

In Abb. 3.16 wird ein Schwungrad mit Drehimpuls geladen. Links befindet sich die Drehimpulspumpe (ein Elektromotor), rechts das Schwungrad und dazwischen eine lange Verbindung durch die der Drehimpuls von links nach rechts gelangt.

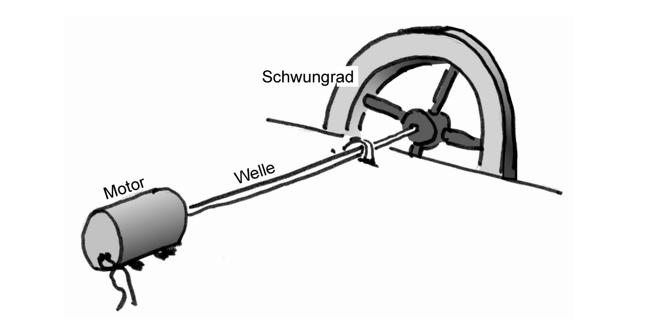


Abb. 3.16
Durch die Welle fließt Drehimpuls vom Motor zum Schwungrad.

Solche Drehimpulsleiter nennt man Wellen (nicht zu verwechseln mit der zweiten Bedeutung des Wortes, nämlich Wasserwellen, Schallwellen usw.). So gibt es im Auto eine Motorwelle, eine Kardanwelle, Antriebswellen und noch andere Wellen.

Welche Eigenschaft der Wellen ist dafür verantwortlich, dass sie den Drehimpuls leiten? Aus welchem Material müssen sie sein? Die einzige Bedingung ist, dass das Material fest ist. Jede beliebige feste Stange kann als Drehimpulsleiter verwendet werden.

> Feste Gegenstände leiten den Drehimpuls.

Wir wollen uns noch einige andere Vorrichtungen ansehen, die mit dem Transport von Drehimpuls zu tun haben.

Ein Lager dient dazu, eine Welle festzuhalten, ohne dass dabei Drehimpuls in die Erde abfließt. Abb. 3.17 zeigt ein Kugellager.

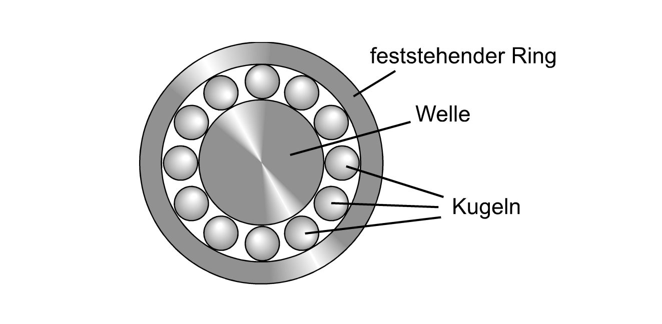


Abb. 3.17
Kugellager (vereinfacht dargestellt)

> Lager verhindern das Abfließen von Drehimpuls.

Abb. 3.18 zeigt eine Kupplung. Mit einem Hebel kann man die Verbindung zwischen Motor und Schwungrad unterbrechen und wiederherstellen.

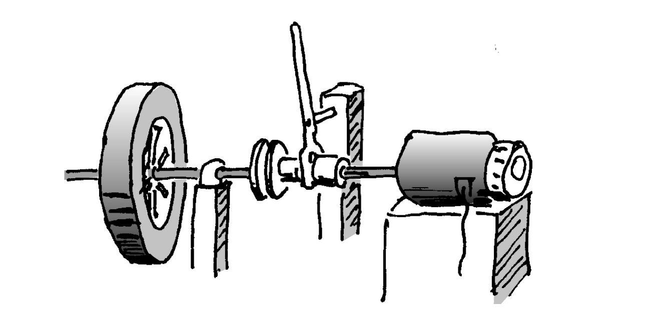


Abb. 3.18
Die Verbindung zwischen Motor und Schwungrad kann mit Hilfe der Kupplung unterbrochen werden.

> Mit einer Kupplung kann man zwei Drehimpulsleitungen verbinden und wieder trennen.

Jedes Auto hat eine Kupplung. Sie befindet sich zwischen Motor und Getriebe, Abb. 3.19. Beim Treten des Kupplungspedals (ganz links im Auto) wird „ausgekuppelt", die Verbindung zwischen Motor und Getriebe wird unterbrochen.

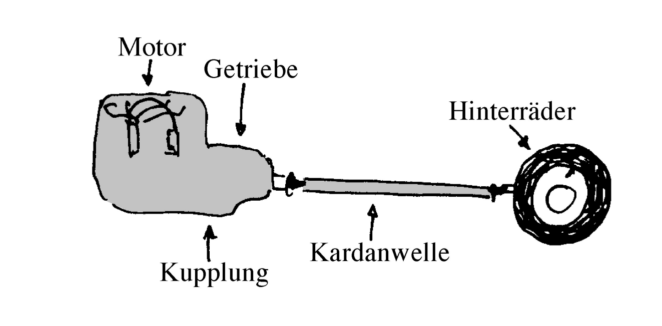


Abb. 3.19
Mit der Autokupplung unterbricht man die Verbindung zwischen Motor und Getriebe.

Man muss auskuppeln, bevor man „schaltet", d.h. die Zahnradübersetzung des Getriebes verändert. Wenn man während des Schaltens nicht auskuppelt, sondern den starken Drehimpulsstrom vom Motor zu den Rädern fließen lässt, wird das Getriebe beschädigt.

Wir lassen noch einmal Drehimpuls durch eine Welle in ein Schwungrad fließen. Macht es für die Welle einen Unterschied, ob ein Drehimpulsstrom fließt oder nicht? Und macht es einen Unterschied, ob er von links nach rechts oder von rechts nach links fließt?

Man sieht es der Welle nicht an, wenigstens solange es eine dicke Welle ist. Verwenden wir deshalb als Welle einen biegsamen, elastischen Gegenstand, z.B. ein Plastiklineal, Abb. 3.20a. Wie reagiert das Lineal, wenn ein Drehimpulsstrom hindurchfließt? Es verdrillt sich, weil es auf eine bestimmte Art verspannt ist. Wir sagen, es steht unter *Torsionsspannung.* Ein fester Gegenstand, durch den ein Drehimpulsstrom hindurchfließt, steht unter Torsionsspannung – auch wenn keine Verdrillung zu sehen ist.

Die Richtung der Verdrillung hängt nun davon ab, in welche Richtung der Drehimpuls fließt. In Abb. 3.20a wird das Rad mit positivem Drehimpuls geladen, d.h. im Lineal fließt der Drehimpuls von links nach rechts.

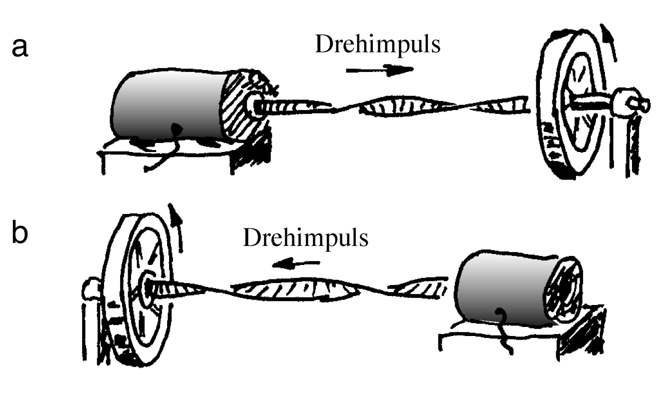


Abb. 3.20
(a) Der Drehimpuls fließt von links nach rechts.
(b) Der Drehimpuls fließt von rechts nach links.

Auch in das Rad in Abb. 3.20b fließt positiver Drehimpuls hinein. Hier kommt er von rechts, er fließt also von rechts nach links. Worin unterscheiden sich die beiden Lineale?

Die Ränder beider Lineale bilden eine Schraubenlinie. Wie du vielleicht weißt, gibt es zwei Sorten von Schrauben: Rechts- und Linksschrauben, Abb. 3.21. Eine Rechtsschraube ist die, die wie ein Korkenzieher aussieht oder wie das Gewinde einer gewöhnlichen Schraube. Eine Linksschraube bilden die so genannten Linksgewinde, oder Korkenzieher, die man im Spiegel betrachtet.

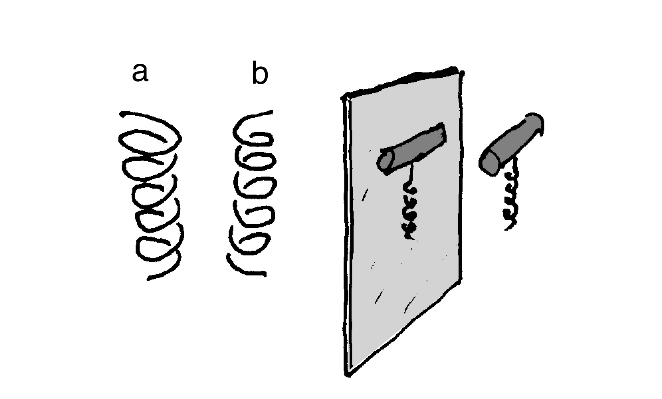


Abb. 3.21
(a) Rechtsschraube
(b) Linksschraube
(c) Korkenzieher und Spiegelbild

Zurück zu unseren Drehimpulsströmen. In Abb. 3.20a fließt Drehimpuls von links nach rechts. Das Lineal ist wie eine Linksschraube verdrillt. In Abb. 3.20b fließt Drehimpuls von rechts nach links. Das Lineal ist wie eine Rechtsschraube verdrillt.

> Drehimpulsstrom nach rechts:
> Verdrillung bildet Linksschraube;
> Drehimpulsstrom nach links:
> Verdrillung bildet Rechtsschraube.

Aufgaben

1. Entwirf ein Experiment, mit dem man untersuchen kann, ob Wasser den Drehimpuls leitet.

2. Entwirf ein Experiment, mit dem man nachweisen kann, dass Magnetfelder den Drehimpuls leiten.

3. Luft leitet den Drehimpuls fast nicht. Wie es konvektive Impulstransporte in der Luft gibt, so gibt es auch konvektive Drehimpulstransporte. Nenne ein Beispiel.

4. Wellen sind Drehimpulsleiter. Im Auto befindet sich eine größere Anzahl verschiedener Wellen. Sie haben je nach Funktion unterschiedliche Namen. Wozu dienen sie?

3.5 Stromstärke und Änderungsrate des Drehimpulses

Der Drehimpulsstrom durch eine Welle kann größer oder kleiner sein. Ein Maß dafür, wie groß er ist, ist die Drehimpulsstromstärke. Sie gibt an, wie viel Drehimpuls in der Zeiteinheit durch eine Querschnittsfläche der Welle hindurchfließt (wie viele Euler durch die Fläche pro Sekunde hindurchgehen). Das Symbol für die Drehimpulsstromstärke ist *M*, die Maßeinheit Euler pro Sekunde, abgekürzt E/s.

Fließen durch eine Welle pro Sekunde 12 Euler, so ist

$M = 12$ E/s.

Mit etwas Rechnerei findet man, dass 1 E/s = 1 N·m ist. In der Technik gibt man Drehimpulsströme meist in Nm an, und man bezeichnet die Drehimpulsstomstärke als Drehmoment. Die Situation von Abb. 3.16 beschreibt man dann so: „Der Motor übt auf das Schwungrad ein Drehmoment aus."

Abb. 3.22 zeigt einen Ausschnitt aus dem Datenblatt eines Autos. Bei einer Winkelgeschwindigkeit von 4000 U/min liefert der Motor seinen maximalen Drehimpulsstrom, nämlich 145 E/s.

Die Motorvarianten | **in der preisgünstigste**

Typ	1.6 16V SX	1.9 JTD SX	Bipower SX
Aufbau/Türen	GR/5	GR/5	GR/5
Zylinder/Hubraum [ccm]	4/1596	4/1910	4/1581
Leistung [kW(PS)]	76(103)	85(115)	68(92)
Max.Drehmoment [Nm]bei U/min	145/4000	203/1500	130/4000
0-100 km/h[s]	12,6	12,2	16,0
Höchstgeschwindigkeit [km/h]	170	176	157
Verbrauch pro 100 km [l/kg]	9,6S	7,5D	7,7G
Versicherungsklassen KH/VK/TK	15/17/26	17/20/32	15/17/26
Steuerbefreiung [Euro](Monate)	-	-	306(21)
Monatliche Gesamt-Kosten[Euro]	504	499	464
Grundpreis[Euro]	17550	19500	20300

Aufbau:
ST = Stufenheck KB = Kombi GO = Geländewagen offen
SR = Schrägheck KT = Kleintransporter GS = Geländew. geschlossen
CP = Coupe TR = Transporter PK = Pick-Up

Abb. 3.22
Aus dem Datenblatt eines Autos

Beim Anziehen einer Schraube fließt durch den Schraubendreher ein Drehimpulsstrom. Es gibt Schraubendreher, an denen man den maximalen Drehimpulsstrom, den sie durchlassen (das maximale Drehmoment), einstellen kann.

Wie $\Delta p/\Delta t$ die Änderungsrate des Impulses ist, so ist:

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = \text{Änderungsrate des Drehimpulses}.$$

Wenn durch eine Welle ein Drehimpulsstrom von

$M = 5$ E/s

in ein Schwungrad fließt, so ist auch die Änderungsrate des Drehimpulses des Schwungrads 5 E/s:

Änderungsrate = Drehimpulsstromstärke

Es gilt also:

$$M = \frac{\Delta L}{\Delta t}$$

Aufgaben

1. Bei einem großen Schwungrad sitzt die Masse von 1200 kg in einem Ring im Abstand von 1 m von der Drehachse. Das Schwungrad dreht sich mit 3 Umdrehungen pro Sekunde.

(a) Wie viel Drehimpuls steckt in dem Schwungrad?

Das Rad wird gebremst. Dabei fließt der Drehimpuls mit einer Stromstärke von 120 E/s in die Erde ab.

(b) Wie lange dauert es, bis das Rad zum Stillstand kommt?

2. Ein Einzylinder-Viertakt-Motor erzeugt im Mittel einen einigermaßen gleichmäßigen Drehimpulsstrom von 40 E/s. Tatsächlich arbeitet er nur 1/4 der Zeit, denn nur einer der 4 Takte ist ein Arbeitstakt. (Unter einem Takt versteht man eine halbe Umdrehung, von einem Umkehrpunkt des Kolbens zum nächsten.) Die Winkelgeschwindigkeit beträgt im Mittel 8 Umdrehungen pro Sekunde. Der Motor hat ein Schwungrad mit einem Trägheitsmoment von 2 kg · m².

(a) Wie viele Arbeitstakte macht der Motor pro Sekunde?

(b) Wie viel Drehimpuls liefert der Motor pro Arbeitstakt?

(c) Wie viel Drehimpuls hat das Schwungrad im Mittel?

(d) Schätze ab, wie viel Drehimpuls das Schwungrad während des Arbeitstakts speichert. Vergleiche mit dem Geamtdrehimpuls, den es enthält.

3.6 Drehimpuls und Winkelgeschwindigkeit als Vektoren

Zwei Schwungräder drehen sich gleich schnell, Abb. 3.23. Die Drehachsen haben aber verschiedene Richtungen. Damit eine Winkelgeschwindigkeit eindeutig festgelegt ist, muss man außer dem Betrag noch die Richtung der Drehachse angeben. Wenn man zur Festlegung einer Größe außer dem Betrag noch eine Richtung angeben muss, so handelt es sich um eine Vektorgröße.

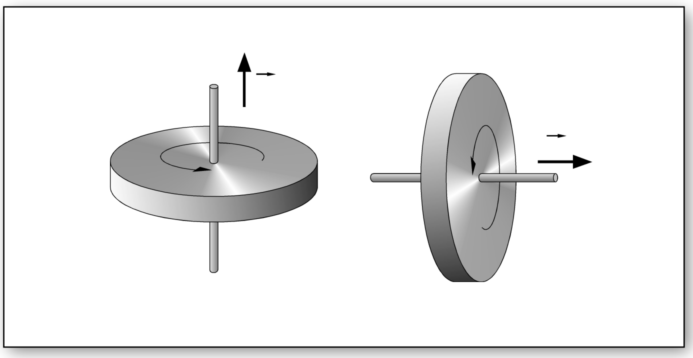


Abb. 3.23
Zwei gleichartige Schwungräder drehen sich gleich schnell, haben aber trotzdem unterschiedliche Winkelgeschwindigkeiten und unterschiedlichen Drehimpuls.

> Die Winkelgeschwindigkeit ist eine Vektorgröße.

Dieselben Bemerkungen treffen auch auf den Drehimpuls zu.

> Der Drehimpuls ist eine Vektorgröße.

Wir können daher sowohl die Winkelgeschwindigkeit als auch den Drehimpuls grafisch durch einen Pfeil darstellen. Die Pfeilrichtung kann hier allerdings nicht die Bewegungsrichtung sein, denn die einzelnen Teile des sich drehenden Körpers bewegen sich ja in die verschiedensten Richtungen. Man zeichnet den Pfeil daher parallel zur Drehachse. Und wie ist der Pfeil orientiert? Auf welcher Seite liegt die Pfeilspitze?

Wir können jetzt die etwas umständliche Regel über das Vorzeichen des Drehimpulses (Abschnitt 3.1) etwas knapper fassen:

> Man umfasst mit der rechten Hand die Drehachse so, dass die gekrümmten Finger in die Drehrichtung weisen. Der Daumen zeigt dann in die Richtung des Winkelgeschwindigkeitsvektors und des Drehimpulsvektors.

Wenn wir den Vektorcharakter von Winkelgeschwindigkeit und Drehimpuls berücksichtigen wollen, müssen wir einige unserer Formeln etwas abändern. Der Zusammenhang zwischen Winkelgeschwindigkeit und Drehimpuls lautet jetzt:

$$\vec{L} = m \cdot r^2 \cdot \vec{\omega}$$

und der zwischen Drehimpulsstrom und Änderungsrate des Drehimpulses:

$$\vec{M} = \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t}$$

3.7 Noch einmal Drehimpulsleiter

Wir hatten festgestellt, dass Lager dazu da sind, das Abfließen von Drehimpuls in die Erde zu verhindern.

Diese Aussage können wir jetzt etwas präziser fassen. Abb. 3.24 zeigt ein gut gelagertes Rad. Das Lager befindet sich zwischen Rad und Achse. Die Achse ist also im Rad frei drehbar.

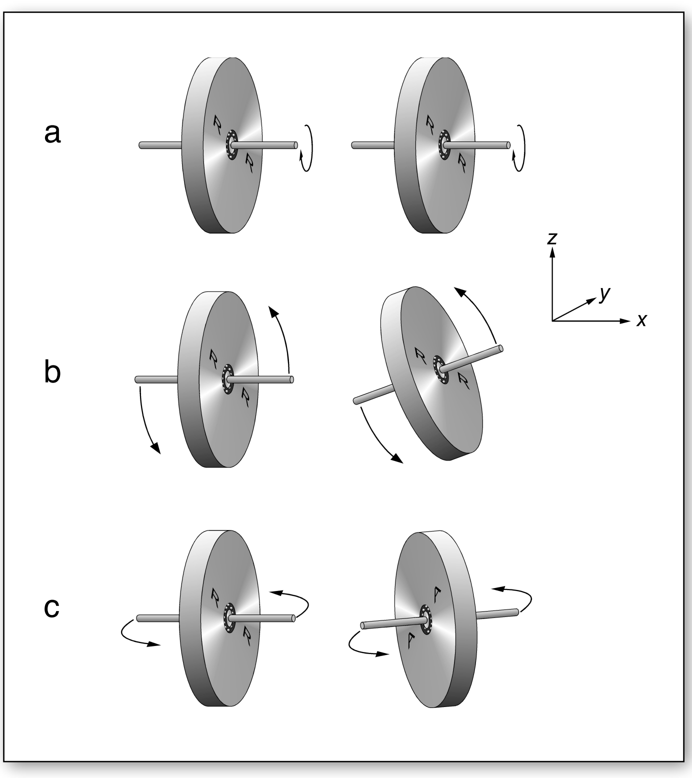


Abb. 3.24
Das Lager verhindert nur den Übergang von einer Drehimpulskomponente (hier die *x*-Komponente).

Dreht man die Achse wie in Teilbild a, so dreht sich das Rad nicht mit. Man kann keinen *x*-Drehimpuls ins Rad bringen, denn das Lager lässt ihn nicht durch. Man kann das Rad aber mit Hilfe der Achse um die *y*- oder die *z*-Richtung drehen oder kippen, siehe die Teilbilder b und c. Das Lager lässt also *y*- und *z*-Drehimpuls durch. Oder allgemeiner:

> Ein Lager dient dazu, eine Achse zu halten, und zwar so, dass der Drehimpuls, der die Richtung der Achse hat, nicht abfließt.

Man kann einen Gegenstand, ein Rad zum Beispiel, auch so lagern, dass gar kein Drehimpuls abfließen kann – kein *x*-, kein *y*- und kein *z*-Drehimpuls, Abb. 3.25. Eine solche Lagerung nennt man kardanische Aufhängung. Man kann den äußeren Bügel drehen und kippen wie man will – die Richtung der Achse des Rades in der Mitte bleibt immer dieselbe. Der Drehimpuls bleibt immer gleich, denn über die Aufhängung kann Drehimpuls weder aufgenommen noch abgegeben werden.

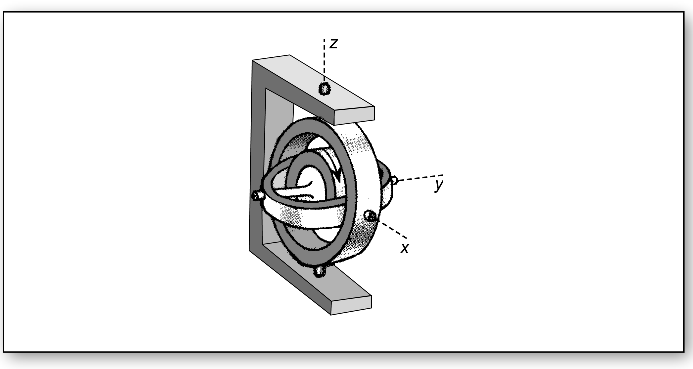


Abb. 3.25
Kardanische Aufhängung. Das Rad ist gegenüber der Halterung ganz und gar isoliert: Weder *x*-, noch *y*- noch *z*-Drehimpuls kann abfließen.

Wir hatten gesehen, dass beim Impuls die Bilanz für jede Komponente einzeln stimmen muss. Das Entsprechende trifft für den Drehimpuls zu:

> Der Drehimpulserhaltungssatz gilt für jede Komponente einzeln.

Willy versucht, uns davon zu überzeugen, Abb. 3.26.

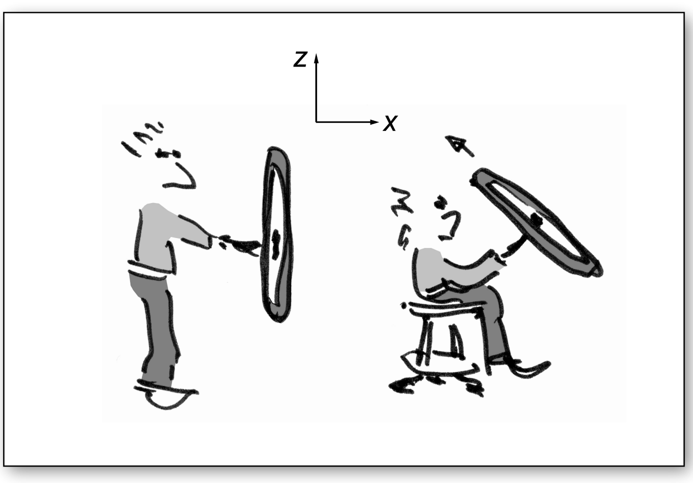


Abb. 3.26
Während Willy die Radachse senkrecht stellt, fließt *x*-Drehimpuls aus dem Rad in die Erde, und *z*-Drehimpuls aus Willy + Stuhl ins Rad.

Er hält ein schnell rotierendes Schwungrad. Der Drehimpulsvektor weist zunächst in die *x*-Richtung. Das Schwungrad enthält also *x*-Drehimpuls. Er setzt sich nun auf den Drehstuhl, und kippt die Drehachse nach oben, in *z*-Richtung. Dabei ist zweierlei festzustellen:

1. Willy samt Drehstuhl beginnt, sich zu drehen, und zwar andersherum als das Rad.
2. Willy spürt eine etwas unerwartete Reaktion des Rades.

Wie ist das zu verstehen? Am Anfang hat das Rad keinen *z*-Drehimpuls. Nachdem Willy die Radachse in die Senkrechte gekippt hat, hat das Rad *z*-Drehimpuls. Dieser muss irgendwoher gekommen sein. Aus der Erde kann er nicht kommen, denn Willy ist, was den *z*-Drehimpuls betrifft, von der Erde isoliert. (Der Stuhl ist um die senkrechte Achse drehbar gelagert.) Er wird also aus Willy + Stuhl genommen. Willy und der Stuhl haben am Ende so viel negativen *z*-Drehimpuls, wie das Rad positiven hat.

Und wo ist der *x*-Drehimpuls geblieben, den das Rad am Anfang hatte? Der konnte in die Erde abfließen, denn das Lager des Stuhls ist für *x*- und für *y*-Drehimpuls durchlässig. Die merkwürdige Reaktion der Radachse kommt durch den Drehimpulsfluss in das Rad und aus dem Rad zustande.

Aufgaben

1. Skizziere das Fahrwerk und die Antriebsteile eines Autos mit seinen wesentlichen Teilen: Räder, Federn, Stoßdämpfer und die Antriebswellen mit den notwendigen Gelenken.

2. Lilly sitzt auf dem Drehstuhl und hält zwei sich drehende Schwungräder mit der Achse in waagrechter *x*-Richtung, Abb. 3.27 . Der Drehstuhl dreht sich zunächst noch nicht. Lilly kippt die Achsen der beiden Räder in die senkrechte *z*-Richtung. Was passiert? Diskutiere den Fall, dass der *x*-Drehimpuls der beiden Räder am Anfang gleich ist, und den Fall, dass er entgegengesetzt gleich ist.

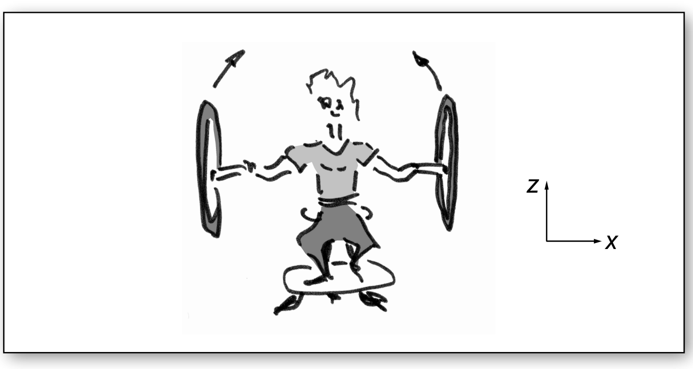


Abb. 3.27
Zu Aufgabe **2**

3.8 Drehimpulsstromkreise

Abb. 3.28 zeigt eine Kaffeemühle. Eine echte Kaffeemühle ist zwar etwas kompakter, aber im Wesentlichen ist sie so gebaut wie es die Abbildung zeigt. Wir diskutieren im Folgenden die Kaffeemühle nicht, weil sie besonders wichtig wäre, sondern als Beispiel für viele andere Maschinen, bei denen etwas über eine rotierende Welle angetrieben wird: Maschinen im Haushalt, wie Waschmaschine, Staubsauger und Elektroquirl, verschiedene Gartenwerkzeuge, wie Rasenmäher, Motorsense und Motorheckenschere, alle Fahrzeuge, unzählige Maschinen in Fabriken und Kraftwerken.

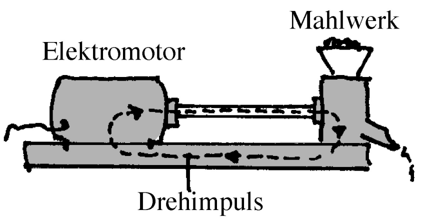


Abb. 3.28
Kaffeemühle. Der Drehimpuls fließt in einem Stromkreis.

Bei der Kaffeemühle wird das Mahlwerk von einem Elektromotor angetrieben. Der Motor pumpt Drehimpuls über eine Welle zum Mahlwerk. Nimmt dadurch der Drehimpuls des Mahlwerks zu? Nein, denn dann müsste sich die Welle immer schneller und schneller drehen, und das tut sie nicht.

Wo bleibt also der Drehimpuls? Er muss aus dem Mahlwerk wieder abfließen. Das ist nicht verwunderlich. Schließlich gibt es zwischen dem rotierenden Innenteil des Mahlwerks und dem unbeweglichen äußeren Teil sehr starke Reibung, und Reibung ist wie ein schlechtes Lager, d.h. ein Lager, über das der Drehimpuls abfließt.

Wir haben also einen geschlossenen Drehimpulsstromkreis vor uns: Der Motor pumpt den Drehimpuls aus dem Gehäuse der Kaffeemühle über die Welle zum Mahlwerk. Von dort gelangt er über das Gehäuse wieder zurück zum Motor.

Überall, wo etwas über eine sich drehende Welle angetrieben wird, fließt Drehimpuls in einem geschlossenen Stromkreis herum. Abb. 3.29 zeigt Turbine und Generator in einem Kraftwerk.

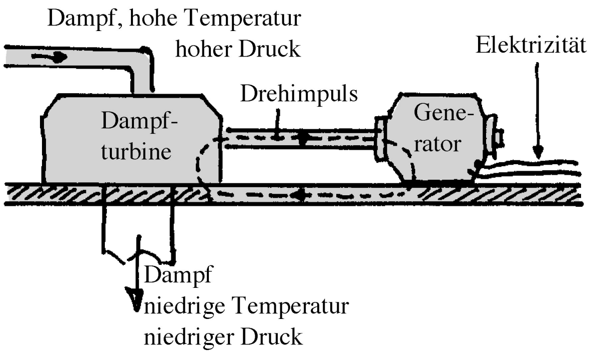


Abb. 3.29
Turbine und Generator in einem Kraftwerk. Der Drehimpuls fließt in einem Stromkreis.

Antriebe über rotierende Wellen sind oft komplizierter als in den Abbildungen 3.28 und 3.29.

Abb. 3.30 zeigt einen Antrieb, bei dem die Wellen von Motor und Mahlwerk einen Winkel von 90° bilden.

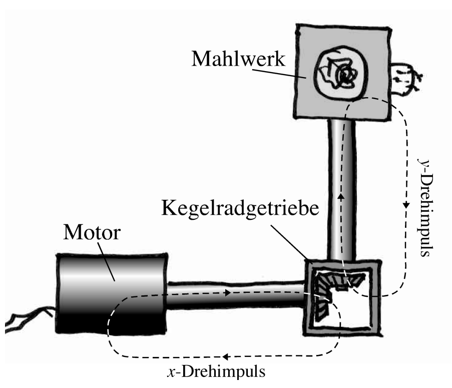


Abb. 3.30
Antrieb über Kegelradgetriebe

Die beiden Wellen sind mit Kegelrädern, Abb. 3.31, miteinander verbunden. An diesem Antrieb sind zwei Drehimpulssorten beteiligt. Zwischen Motor und Kegelradgetriebe fließt *x*-Drehimpuls im Kreis herum, und zwischen Kegelradgetriebe und Mahlwerk *y*-Drehimpuls.

Abb. 3.31
Kegelradgetriebe

4

Das Gravitationsfeld

4.1 Die Erdanziehung

Alle Gegenstände werden von der Erde angezogen. Das merkt man an zweierlei Erscheinungen:

- Man nimmt einen Gegenstand in die Hand und lässt ihn los. Er fällt nach unten.
- Jeder Gegenstand hat Gewicht.

Beide Erscheinungen zeigen, dass der Gegenstand Impuls von der Erde bekommt. Ein fallender Körper wird beim Fallen immer schneller: Sein Impuls nimmt zu. Dass auch der nichtfallende Körper Impuls bekommt, sieht man, wenn man ihn an einen Kraftmesser hängt, Abb. 4.1. Der Kraftmesser zeigt an, dass ständig ein Impulsstrom von dem Gewichtsstück weg über die Aufhängung in die Erde fließt. Dieser Impuls muss ständig nachgeliefert werden. Es fließt also ständig Impuls in den Körper, allerdings über eine Verbindung zwischen Körper und Erde, von der absolut nichts zu sehen ist.

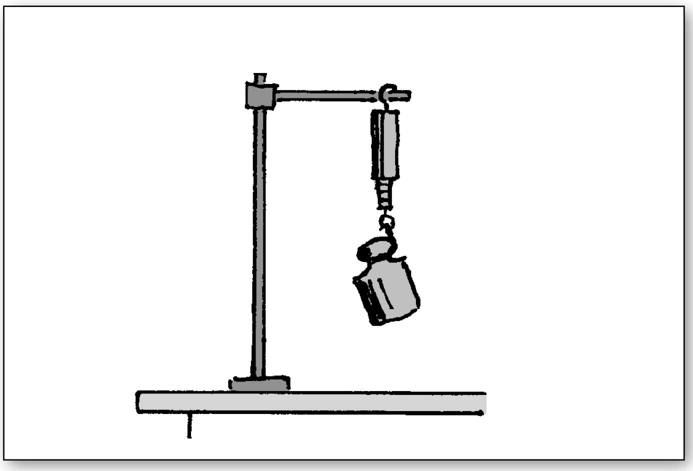


Abb. 4.1
Der Federkraftmesser zeigt, dass ein Impulsstrom vom Gewichtsstück weg nach oben fließt. Dieser Impuls ist über das Gravitationsfeld in das Gewichtsstück hineingekommen.

Wir hatten früher schon eine ähnliche impulsleitende Verbindung kennen gelernt, d.h. eine Verbindung, die man nicht sehen kann: das Magnetfeld. In dem Fall, der uns gerade interessiert, kann es sich allerdings nicht um ein Magnetfeld handeln, denn dann dürften ja von der Erde nur Magneten oder eiserne Körper angezogen werden. Die Verbindung besteht also aus einem Gebilde, das zwar kein Magnetfeld ist, das aber eine Ähnlichkeit mit dem Magnetfeld hat. Man nennt es das Gravitationsfeld (auch Schwerefeld). Genauso wie ein Magnetpol von einem Magnetfeld umgeben ist, so ist jedes Gebilde, das eine Masse hat, also jeder Körper, von einem Schwerefeld umgeben. Je größer die Masse des Körpers ist, desto dichter ist dieses Feld.

Jeder Körper ist von einem Gravitationsfeld umgeben. Je größer die Masse des Körpers, desto dichter ist das Feld. Durch das Feld fließt Impuls von einem Körper zum anderen. Die Erdanziehung kommt durch einen Impulsstrom von der Erde zu dem betreffenden Körper zustande.

4.2 Wovon die Erdanziehung abhängt

Wir probieren es aus. Wir hängen zuerst einen Körper A aus Eisen mit einer Masse von 1 kg an einen Kraftmesser und dann einen Körper B aus Holz, der ebenfalls eine Masse von 1 kg hat. Es gilt also:

$m_A = m_B$.

Der Kraftmesser zeigt beide Male dasselbe an:

$F_A = F_B$.

Die Körper sind gleich schwer. Das wird dich wahrscheinlich nicht überraschen; trotzdem ist es keine Selbstverständlichkeit.

Wir wollen uns das klar machen. Was bedeutet es denn, dass das Stück Holz und das Stück Eisen die gleiche Masse haben? Dazu müssen wir uns an die Gleichung

$p = m \cdot v$

erinnern. Die Masse ist der Proportionalitätsfaktor in der Beziehung zwischen Impuls und Geschwindigkeit. Sie sagt uns, wie viel Impuls man braucht um einen Körper auf eine bestimmte Geschwindigkeit zu bringen. Sie sagt uns wie *träge* der Körper ist. Aus der Tatsache, dass zwei Körper gleich träge sind, kann man aber zunächst noch nicht schließen, dass sie auch gleich *schwer* sind. Aus

$m_A = m_B$

kann man nicht einfach schließen, dass

$F_A = F_B$

gilt. Man kann es nur ausprobieren. Das Experiment zeigt, dass es tatsächlich so ist:

> Gleich träge Körper sind auch gleich schwer.

Wir haben uns an diesen Sachverhalt gewöhnt und können uns kaum noch vorstellen, dass es auch anders sein könnte. Trotzdem hat er die Physik lange beschäftigt. Dabei sah es zunächst so aus, als sei diese Übereinstimmung nur ein Zufall. Wenn man nur genau genug misst –so vermutete man– , würde man schon einen Unterschied zwischen Trägheit und Schwere feststellen. Erst die Relativitätstheorie hat gezeigt, dass Trägheit und Schwere prinzipiell übereinstimmen müssen.

Wir nehmen nun zwei Körper mit je einer Masse von 1 kg. Beide zusammen können wir auffassen als einen einzigen Körper mit einer Masse von 2 kg. In beide zusammen fließt nun ein Impulsstrom, dessen Stromstärke doppelt so groß ist wie bei einem einzigen Körper. Auch das findest du bestimmt selbstverständlich. Man könnte sich aber durchaus vorstellen, dass das Hinzunehmen eines zweiten Körpers den Impulsstrom, der in den ersten fließt, beeinflusst. Das ist aber nicht der Fall. Für den Impulsstrom, der aus der Erde in einen anderen Körper fließt, gilt also

$F \sim m$,

oder als Gleichung geschrieben:

$$F = m \cdot g. \qquad (1)$$

Für den Proportionalitätsfaktor findet man:

$g = 9{,}8$ N/kg,

oder näherungsweise

$g = 10$ N/kg.

Unser Ergebnis ist noch nicht vollständig.

Zunächst stellen wir fest, dass g der Betrag eines Vektors sein muss. Das folgt schon aus mathematischen Gründen. Da die Größe auf der linken Seite von Gleichung (1) eine Vektorgröße ist, muss auch rechts ein Vektor stehen. Vektoriell geschrieben wird aus Gleichung (1)

$$\vec{F} = m \cdot \vec{g}\,. \qquad (2)$$

Wir machen nun –in Gedanken– das folgende Experiment. Wir wägen einen Gegenstand an den verschiedensten Orten: bei uns in Europa, in Japan, in einer Höhe von 1000 km über der Erdoberfläche, auf dem Mond, auf dem Mars oder weit weg von allen Himmelskörpern. Der Impulsstrom ist jedes mal anders. Es gilt zwar an jedem Ort noch die Proportionalität

$F \sim m$,

aber der Proportionalitätsfaktor ist in jedem Fall ein anderer.

Der Impuls, der in einen Körper in Japan fließt, ist um grob 90° verdreht gegenüber dem, der in einen Körper der gleichen Masse in Europa fließt. Die Richtung von $\vec{F}$ ist also auf der Erde ortsabhängig, und damit auch die von $\vec{g}$. Aber auch der Betrag von $\vec{g}$ ist ortsabhängig. Geht man von der Erde weg, so wird er immer kleiner. In großer Entfernung von jedem Himmelskörper ist er praktisch null. In Tabelle 4.1 sind die Beträge von $\vec{g}$ für einige markante Orte aufgeführt.

Ort	g in N/kg
Erdoberfläche	9,8
1000 km über der Erdoberfläche	7,3
Mondoberfläche	1,62
Marsoberfläche	3,8
Sonnenoberfläche	274
Oberfläche eines Neutronensterns	1 000 000 000 000

Tabelle 4.1
Betrag der Gravitationsfeldstärke an verschiedenen Orten

Die Vektorgröße $\vec{g}$ gibt uns Auskunft über das Gravitationsfeld am jeweiligen Ort. Ihr Betrag sagt uns, wie dicht das Feld ist. Da $\vec{g}$ ein Vektor ist, schließen wir, dass das Gravitationsfeld an jeder Stelle eine ausgezeichnete Richtung hat. Es hat in dieser Hinsicht eine Ähnlichkeit mit Holz. Auch im Holz ist an jeder Stelle eine ausgezeichnete Richtung zu erkennen: die Richtung der Maserung. Man nennt $\vec{g}$ die Gravitationsfeldstärke (manchmal auch Ortsfaktor).

Mit Hilfe von Gleichung (2) können wir das Gravitationsfeld vermessen. Bevor wir uns weit ausgedehnte Gravitationsfelder anschauen, wollen wir uns mit den Konsequenzen des Feldes an einem Ort in der Nähe der Erdoberfläche befassen.

Was meint man eigentlich, wenn man von einem Gegenstand sagt, er sei schwer? Man meint wohl, dass es schwer ist, ihn vom Boden aufzuheben. Meint man also, er habe eine große Masse? Genau genommen meint man das nicht. Auf dem Mond wäre es ja schließlich gar nicht schwer, diesen „schweren" Gegenstand vom Mond-Boden aufzuheben. Mit „schwer" meint man also eher, dass ein großer Impulsstrom in den Körper fließt. Ein und derselbe Gegenstand kann also schwer oder leicht sein, je nachdem, wo er sich befindet.

Hier noch die Beschreibung der Erdanziehung im Kraftmodell: Wenn man eine Kraft nach Gleichung (2) berechnet, nennt man sie Schwerkraft oder Gewichtskraft, und man sagt, auf einen Körper wirke die Schwerkraft bzw. Gewichtskraft.

> Zusammenhang zwischen Gravitationsfeldstärke $\vec{g}$ und Impulsstrom $\vec{F}$ in einen Körper der Masse m:
> $\vec{F} = m \cdot \vec{g}$

Aufgaben

1. Welcher Impulsstrom fließt aus der Erde in deinen eigenen Körper hinein? (Welche Gewichtskraft wirkt auf deinen Körper?) Wie stark wäre dieser Impulsstrom auf dem Mond, wie stark wäre er auf einem Neutronenstern?

2. Astronauten bestimmen bei einer Mondexpedition die Gewichtskraft auf einen Körper mit einem Kraftmesser. Sie finden $F = 300$ N. Welche Masse hat der Körper?

4.3 Der freie Fall

Wenn wir es nur mit Bewegungen in der senkrechten Richtung zu tun haben, brauchen wir nur die senkrechte Komponente des Impulses und der Geschwindigkeit zu betrachten. Wir bezeichnen diese mit den Buchstaben p und v, und wählen die positive Richtung nach unten. Ein Körper, der sich nach unten bewegt, hat also positiven Impuls und eine positive Geschwindigkeit.

Die Erscheinungen, die wir jetzt untersuchen, spielen sich alle in der näheren Umgebung eines Punktes an der Erdoberfläche ab. Wir gehen nicht 1000 km in die Höhe, und auch nicht 1000 km nach Ost, West, Süd oder Nord. In diesem Bereich können wir die Gravitationsfeldstärke als konstant, d.h. ortsunabhängig betrachten. Das Gravitationsfeld ist hier *homogen*.

Wir nehmen einen Gegenstand in die Hand und lassen ihn los. Er fällt zur Erde. Wir können diese Erscheinung jetzt erklären: In den Gegenstand fließt ein Impulsstrom der Stärke $m \cdot g$ hinein, also nimmt sein Impuls ständig zu. Je länger er fällt, desto schneller bewegt er sich.

Etwas ist dabei allerdings merkwürdig. Lässt man zwei Gegenstände, einen schwereren und einen leichteren, gleichzeitig aus derselben Höhe los, so stellt man fest, dass sie gleichzeitig am Erdboden ankommen. Sollte nicht der schwere schneller fallen? Er bekommt doch mehr Impuls von der Erde.

Wir wollen berechnen, nach welchem Gesetz der Impuls der beiden Körper zunimmt. Wir nehmen an, die Masse des schweren Körpers beträgt 4 kg, die des leichten 1 kg. Wir setzen

$$F = m \cdot g$$

ein in

$$p = F \cdot t$$

und erhalten

$$p = m \cdot g \cdot t\,. \qquad (3)$$

Hier setzen wir die Masse und die Gravitationsfeldstärke ein und erhalten für den schweren Körper

$$p = 4\text{ kg} \cdot 9{,}8\text{ N/kg} \cdot t = 39{,}2\text{ N} \cdot t$$

und für den leichten

$$p = 1\text{ kg} \cdot 9{,}8\text{ N/kg} \cdot t = 9{,}8\text{ N} \cdot t\,.$$

Diese beiden p-t-Zusammenhänge sind in Abb. 4.2 dargestellt. Man sieht, dass der Impuls für beide Gegenstände gleichmäßig zunimmt. Der Impuls des schweren Körpers wächst aber schneller als der des leichten. Der schwere hat in jedem Augenblick viermal so viel Impuls wie der leichte.

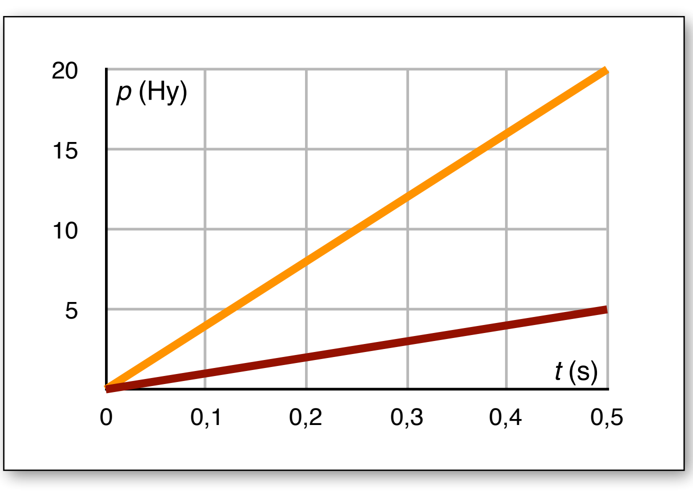


Abb. 4.2
Impuls als Funktion der Zeit für zwei fallende Körper verschiedener Masse

Warum fallen dann aber beide Körper gleich schnell? Um die Antwort auf diese Frage zu finden, brauchen wir die Formel

$$p = m \cdot v\,. \qquad (4)$$

Aus ihr folgt nämlich: Um den schweren Körper auf eine bestimmte Geschwindigkeit zu bringen, braucht man viermal so viel Impuls wie man braucht, um den leichten auf dieselbe Geschwindigkeit zu bringen. Der Körper mit der größeren Masse hat eine größere Trägheit als der mit der kleinen Masse.

Wir erhalten dieses Ergebnis auch durch eine einfache Rechnung. Wir setzen die rechten Seiten der Gleichungen (3) und (4) gleich und erhalten

$$m \cdot g \cdot t = m \cdot v\,.$$

Division beider Seiten der Gleichung durch m ergibt

$$v = g \cdot t\,. \qquad (5)$$

Da hier die Masse nicht mehr auftritt, sagt uns die Gleichung, dass die Geschwindigkeit eines fallenden Körpers nicht von seiner Masse abhängt. In Abb. 4.3 ist die Geschwindigkeit eines beliebigen frei fallenden Körpers über der Zeit aufgetragen.

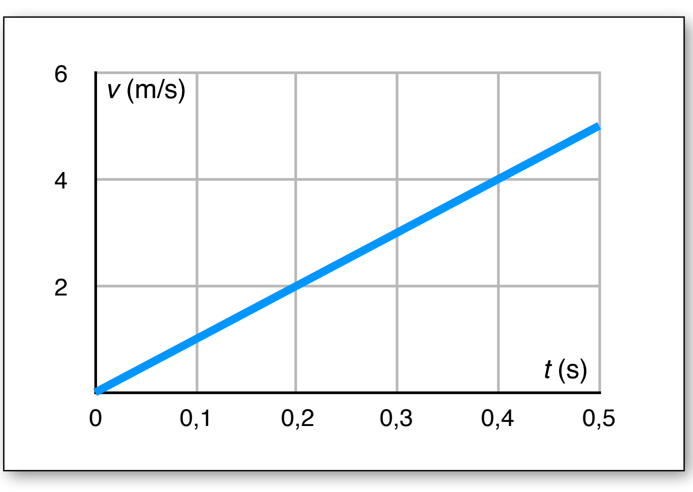


Abb. 4.3
Die Geschwindigkeit eines frei fallenden Körpers nimmt linear mit der Zeit zu.

Gleichung (5) sagt uns auch, dass die Geschwindigkeit eines fallenden Körpers gleichmäßig zunimmt. Das bedeutet, dass seine Beschleunigung konstant ist.

Die Beschleunigung lässt sich leicht berechnen. Wir betrachten das Zeitintervall von $t = 0$ bis $t = t_0$. In dieser Zeitspanne nimmt die Geschwindigkeit zu von $v = 0$ auf $v = v_0 = g \cdot t_0$. Wir erhalten damit:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_0}{t_0} = g.$$

Die Beschleunigung eines fallenden Körpers ist also gleich der Gravitationsfeldstärke.

Dass in Gleichung (5) die Gravitationsfeldstärke auftritt bedeutet, dass die Fallgeschwindigkeit vom Ort abhängt, an dem sich der fallende Körper befindet. Auf dem Mond zum Beispiel fallen alle Körper etwa sechsmal so langsam wie auf der Erde.

Wir waren bei unseren Überlegungen davon ausgegangen, dass der Körper beim Fallen keinen Impuls verliert. Damit haben wir die tatsächliche Situation vereinfacht: Durch die Reibung mit der Luft verliert er in Wirklichkeit Impuls. Ist ein Körper nicht zu leicht und fällt er nur über eine kurze Strecke, so ist unsere Vereinfachung aber gerechtfertigt. Man nennt einen solchen Bewegungsvorgang einen *freien Fall*.

> *Frei fallende Körper:*
> Die Geschwindigkeit nimmt gleichmäßig zu.
> Alle Körper fallen gleich schnell.
> Die Beschleunigung ist gleich der Gravitationsfeldstärke.

Wir betrachten noch eine Variante des freien Falls: Wir lassen den Gegenstand nicht einfach aus dem Ruhezustand fallen, sondern werfen ihn senkrecht nach oben. Er hat dann beim Start negativen Impuls. Er bekommt nach wie vor von der Erde ständig neuen positiven Impuls, was zur Folge hat, dass sein negativer Impuls weniger und weniger wird: Der Gegenstand fliegt immer langsamer, kommt zum Stillstand und beginnt schließlich, sich in die positive Richtung (nach unten) zu bewegen.

Die Aufwärtsbewegung ist hierbei das Spiegelbild der Abwärtsbewegung. Beim Herunterfallen nimmt der Impuls des Körpers gleichmäßig zu, beim Hinauffliegen nimmt sein negativer Impuls gleichmäßig ab. Das Entsprechende gilt für die Geschwindigkeit: Beim Hinauffliegen nimmt die negative Geschwindigkeit linear mit der Zeit ab, beim Herunterfallen nimmt die (positive) Geschwindigkeit linear mit der Zeit zu.

Abb. 4.4 zeigt die Geschwindigkeit als Funktion der Zeit. Als Nullpunkt der Zeitachse haben wir hier den Zeitpunkt der Umkehr gewählt. Der Wurf findet bei dieser Zählung zum Zeitpunkt „minus 0,4 Sekunden" statt. Man sieht an dem Schaubild, dass der Gegenstand für die Aufwärtsbewegung dieselbe Zeit braucht wie für die Abwärtsbewegung.

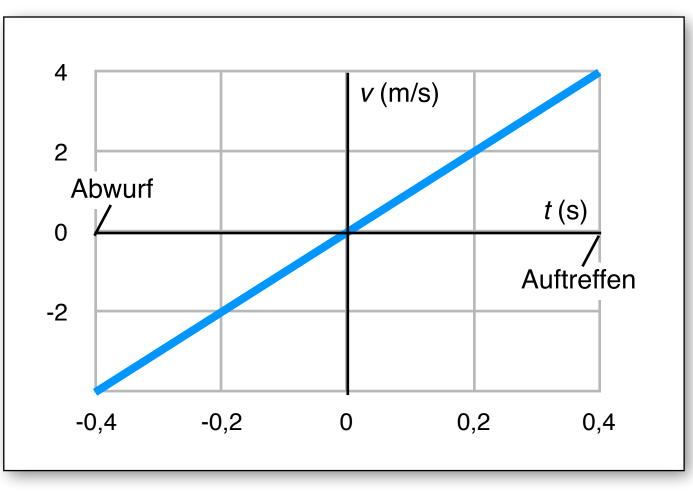


Abb. 4.4
Die Geschwindigkeit eines Körpers, der nach oben geworfen wurde als Funktion der Zeit. Beim Hinauffliegen ist die Geschwindigkeit negativ, beim Herunterfallen positiv.

Aufgaben

1. Du springst vom 3-m-Brett ins Wasser. Der freie Fall beim Sprung dauert 0,77 s. Wie groß ist dein Impuls beim Auftreffen auf die Wasseroberfläche? Wie groß ist deine Geschwindigkeit?

2. Wie groß ist die Geschwindigkeit eines frei fallenden Körpers nach einer Fallzeit von 1/2 Sekunde auf der Erde und auf dem Mond? Wie groß wäre sie auf der Sonne wenn es dort einen Körper gäbe?

3. Ein Stein wird nach oben geworfen. Seine Anfangsgeschwindigkeit ist 15 m/s. Nach welcher Zeit trifft er wieder auf die Erde auf?

4. Ein Stein wird mit einer Steinschleuder nach oben geschleudert. Nach 5 Sekunden schlägt er auf die Erde auf. Wie groß war seine Anfangsgeschwindigkeit?

4.4 Fallen mit Reibung

Häufig ist die Luftreibung nicht vernachlässigbar. Wie groß sie ist, hängt ab

- von der Form des Körpers;
- von seiner Geschwindigkeit.

Sicher ist dir das vom Auto her bekannt:

- Man gestaltet die Form der Autokarosserie so, dass die Luftreibung möglichst klein ist.
- Fährt man schnell, so ist die Reibung, und damit der Benzinverbrauch (pro Kilometer) größer, als wenn man langsam fährt.

Dass die Reibung, d.h. die Stärke des Impulsstroms, der in die Luft abfließt, mit zunehmender Geschwindigkeit stark wächst, zeigen die Abbildungen 4.5 und 4.6.

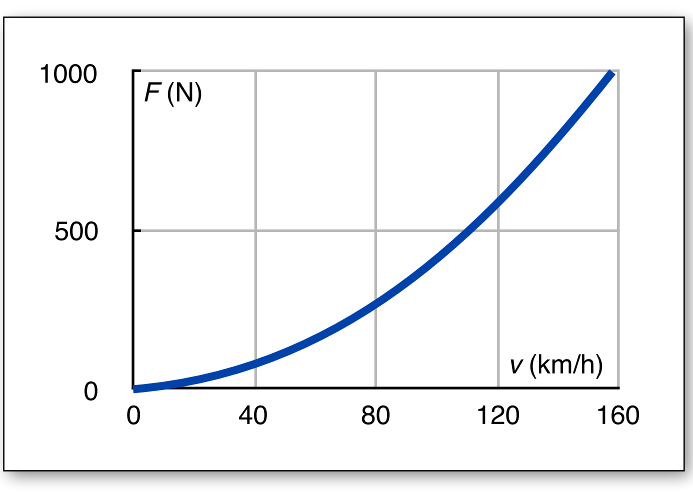


Abb. 4.5
Stärke des Impulsstroms, der in die Luft abfließt, als Funktion der Geschwindigkeit für einen typischen Personenwagen

In beiden Bildern ist der Reibungsimpulsverlust über der Geschwindigkeit aufgetragen, in Abb. 4.5 für einen typischen Personenwagen und in Abb. 4.6 für einen viel kleineren Gegenstand: einen Ball von 30 cm Durchmesser.

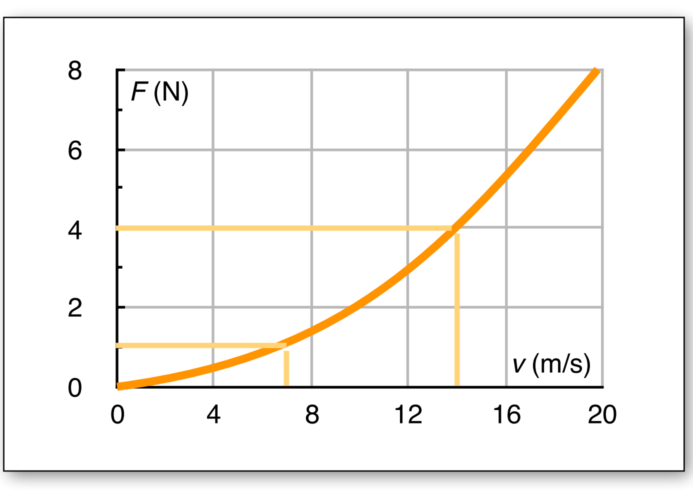


Abb. 4.6
Stärke des Impulsstroms, der in die Luft abfließt, als Funktion der Geschwindigkeit für eine Kugel von 30 cm Durchmesser

Wir hatten gesehen: Wenn diese Reibungsverluste nicht wären, oder solange sie vernachlässigbar sind, fallen alle Körper gleich schnell. Wie verhält es sich aber mit der Fallgeschwindigkeit, wenn man die Reibung nicht mehr vernachlässigen kann?

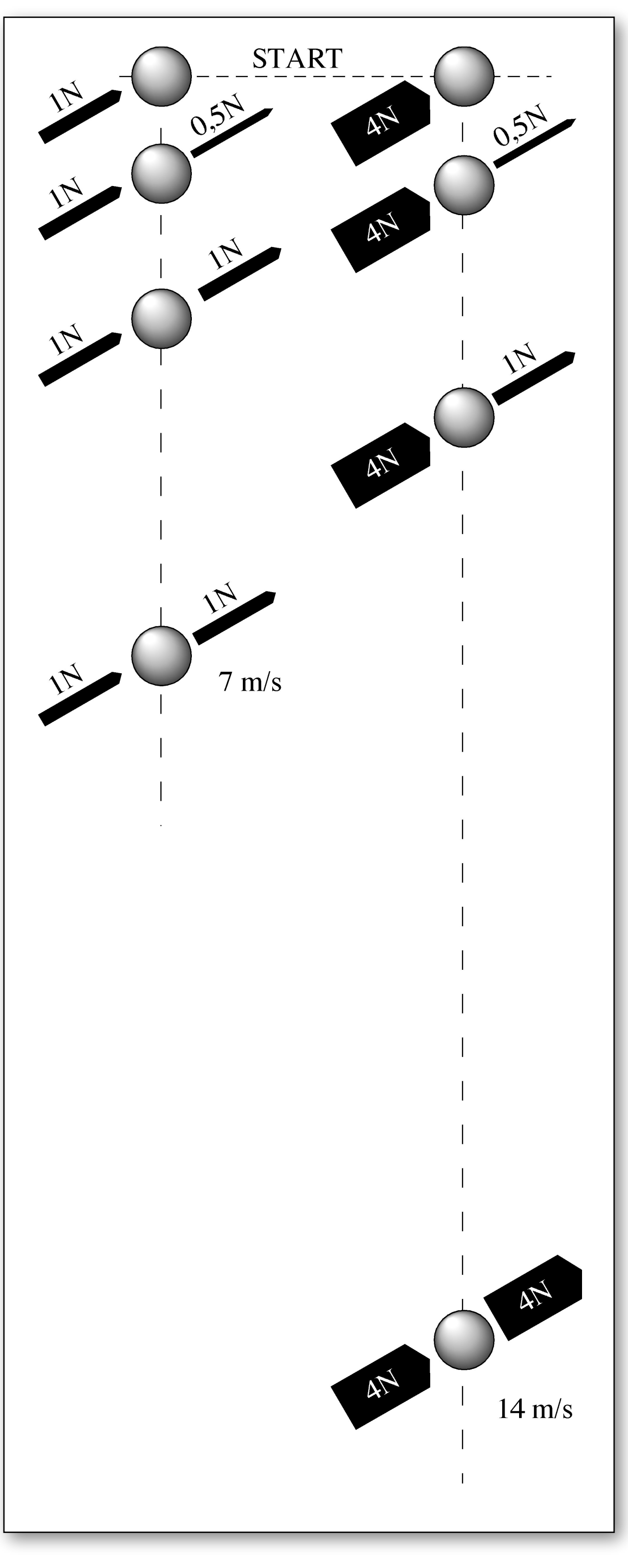


Abb. 4.7
Eine leichte (links) und eine schwere (rechts) Kugel fallen zur Erde. Die leichte erreicht ihre Grenzgeschwindigkeit früher als die schwere.

Wir lassen einen großen, leichten Ball fallen, Abb. 4.7, linke Seite. Seine Masse betrage

$m = 100 \text{ g} = 0{,}1 \text{ kg}$,

sein Durchmesser

$30 \text{ cm} = 0{,}3 \text{ m}$.

Von der Erde fließt in den Ball ständig ein Impulsstrom von

$F = m \cdot g$
$= 0{,}1 \text{ kg} \cdot 10 \text{ N/kg} = 1 \text{ N}$

hinein. Beim Fallen ist seine Geschwindigkeit ganz am Anfang noch gering, und damit auch der Impulsverlust an die Luft. Bei einer Geschwindigkeit von 2 m/s hat der Impulsstrom, der in die Luft fließt, immer noch eine Stärke von weniger als 0,1 N, siehe Abb. 4.6. Der Verlust ist noch klein, verglichen mit dem Impulsstrom von 1 N, der aus der Erde kommt. Der Verlust wird aber schnell größer, und schließlich verliert der Ball pro Sekunde genauso viel Impuls an die Luft, wie er von der Erde bekommt. Von jetzt an nimmt sein Impuls nicht mehr zu. Abb. 4.6 entnehmen wir, dass der Ball dann eine Geschwindigkeit von etwa 7 m/s hat.

Abb. 4.8 zeigt die Geschwindigkeit unseres Balls über der Zeit: Ganz am Anfang nimmt seine Geschwindigkeit linear mit der Zeit zu, er verhält sich wie ein frei fallender Ball. Nach und nach wird aber der Verlust größer. Schließlich, wenn die zu- und die wegströmenden Impulsmengen gleich sind, nimmt sein Impuls, und daher auch seine Geschwindigkeit, nicht mehr zu. Er hat seine *Grenzgeschwindigkeit* erreicht. Der Ball befindet sich jetzt im Zustand des Fließgleichgewichts.

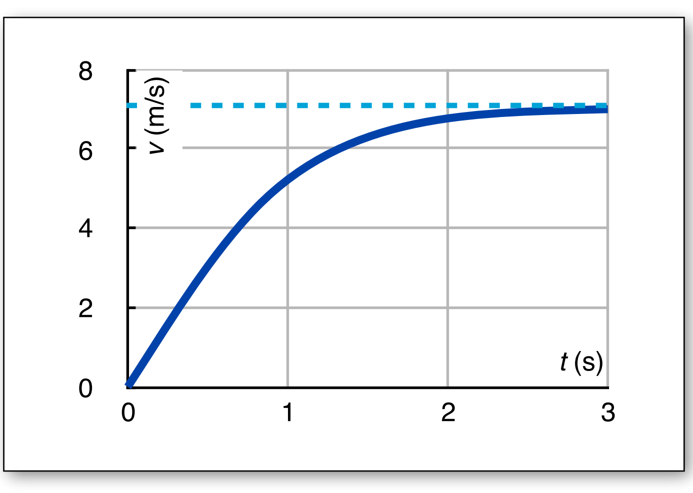


Abb. 4.8
Wenn Luftreibung vorhanden ist, wächst die Geschwindigkeit eines fallenden Körpers bis zu einer Grenzgeschwindigkeit.

Wir lassen nun einen anderen Ball fallen. Er soll denselben Durchmesser (30 cm) haben, aber viermal so schwer sein wie der erste, Abb. 4.7, rechte Seite:

$m = 0{,}4 \text{ kg}$.

Von der Erde fließt über das Gravitationsfeld in den Ball ein Impulsstrom von

$F = m \cdot g = 0{,}4 \text{ kg} \cdot 10 \text{ N/kg} = 4 \text{ N}$.

Bei welcher Geschwindigkeit hört dieser Ball auf, schneller zu werden? Wieder befragen wir das Schaubild von Abb. 4.6. Der Verlustimpulsstrom ist gerade dann gleich dem von der Erde kommenden Impulsstrom, wenn die Geschwindigkeit 14 m/s beträgt. Der schwere Ball erreicht also das Fließgleichgewicht bei einer höheren Geschwindigkeit als der leichte.

Bei hohen Geschwindigkeiten ist die Luftreibung nicht mehr vernachlässigbar.

Die Geschwindigkeit eines fallenden Körpers wächst nur bis zu einer Grenzgeschwindigkeit. Die Grenzgeschwindigkeit hängt von der Form des Körpers ab. Sie ist für schwere Körper größer als für leichte.

Eine interessante Anwendung unserer Überlegungen stellt das Fallschirmspringen dar. Lilly springt aus dem Flugzeug und erreicht innerhalb weniger Sekunden ihre Grenzgeschwindigkeit von etwa 50 m/s. Mit dieser Geschwindigkeit „fällt“ sie dann eine längere Zeit. Der Impulsstrom, der über das Gravitationsfeld in Lilly hineinfließt, hat dieselbe Stärke, wie der, der auf Grund der Luftreibung abfließt.

Etwa 400 m über dem Erdboden wird der Fallschirm geöffnet. Das Öffnen des Fallschirms bedeutet aber, dass die Luftreibung plötzlich stark erhöht wird. Der abfließende Impulsstrom wird plötzlich viel größer als der zufließende. Dadurch nimmt Lillys Impuls ab. Mit dem Impuls nimmt auch ihre Geschwindigkeit ab, und damit auch der Reibungsverlust. Schließlich erreicht der Reibungsimpulsstrom wieder denselben Wert wie der Schwereimpulsstrom, allerdings bei einer relativ niedrigen Geschwindigkeit: bei etwa 4 m/s. Der Fallschirm schwebt jetzt also mit der daran hängenden Lilly mit konstanter, niedriger Geschwindigkeit zur Erde. In Abb. 4.9 ist Lillys Geschwindigkeit über der Zeit aufgetragen.

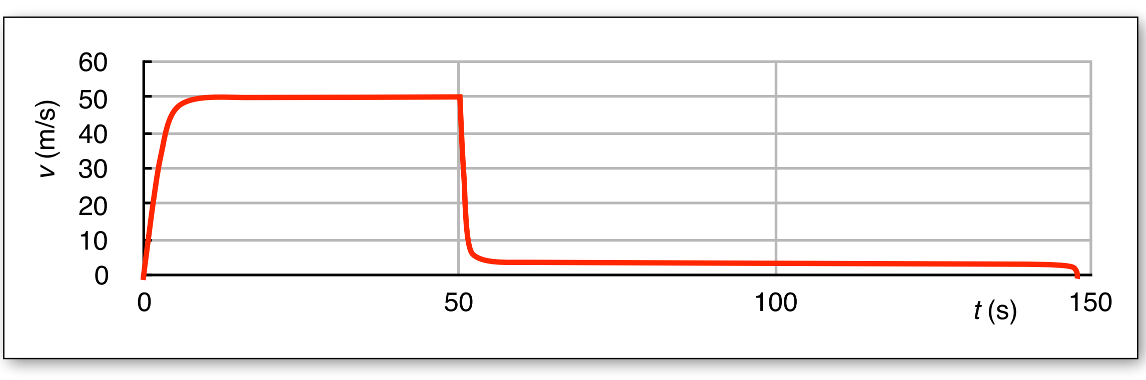


Abb. 4.9
Lillys Geschwindigkeit als Funktion der Zeit

Wenn keine Luft oder kein anderes reibendes Medium vorhanden ist, stellt sich auch keine Grenzgeschwindigkeit ein. Der Mond hat keine Atmosphäre. Daher fallen hier wirklich alle Körper gleich schnell: Ein Blatt Papier fällt genauso schnell zum Boden wie ein großer Stein. Man kann das aber auch auf der Erde beobachten. Man muss dazu die Fallversuche in einem Gefäß ausführen, aus dem die Luft herausgepumpt wurde. Wir lassen einige kleine Gegenstände unterschiedlicher Masse in einem evakuierten Glasrohr fallen. Wie erwartet fallen sie alle gleich schnell.

Aufgabe

Welche Grenzgeschwindigkeit erreicht eine fallende Kugel mit einem Durchmesser von 30 cm und einer Masse von 0,8 kg?

4.5 Schwerelosigkeit

Willy, Abb. 4.10a, fühlt sich schwer, sein Körper hat das Gewicht seines schweren Kopfes zu tragen, und seine Füße sind am schlechtesten dran: Sie müssen den ganzen Körper tragen. Willy hat eine Idee, siehe Abb. 4.10b. Die Beine sind entlastet. Dafür haben allerdings jetzt die Arme die ganze Last zu tragen. In Abb. 4.10c sieht man seinen dritten Versuch, sein Gewicht loszuwerden – und dieser ist wieder erfolglos.

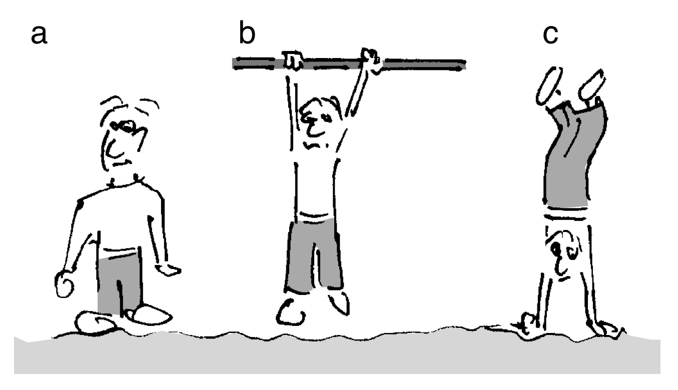


Abb. 4.10
Wie er's auch anstellt – Willy wird sein Schweregefühl nicht los.

Was Willy stört, ist das „Schweregefühl". Wir wollen versuchen, dieses Gefühl physikalisch zu definieren. In jedem der drei Fälle spürt Willy Impulsströme, die in seinem Körper fließen. In jeden Teil seines Körpers fließt über das Gravitationsfeld Impuls hinein, und dieser muss abgeleitet werden, er muss in die Erde zurückfließen. In Abb. 4.11 sind diese Ströme für eine stehende Person skizziert: Es fließt Impuls in den Kopf, in die Arme, in den Oberkörper usw. All dieser Impuls muss nach unten durch die Beine und die Füße in die Erde abfließen. Der Impulsstrom ist also in den Füßen am stärksten.

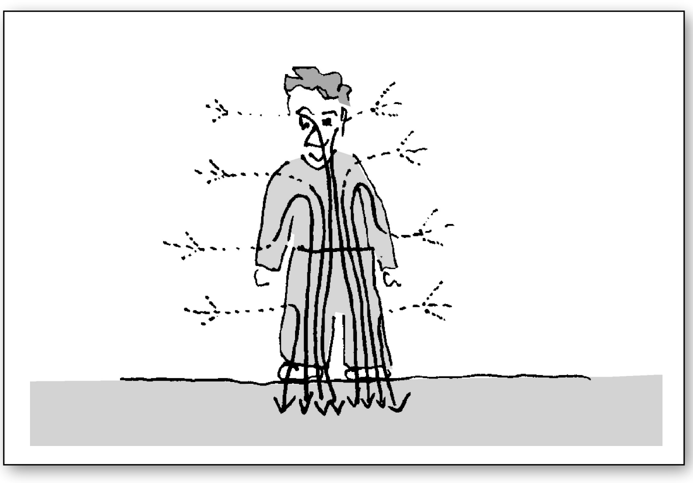


Abb. 4.11
Die Impulsströme, die über das Gravitationsfeld in die Person hineinfließen, müssen wieder abfließen.

Wir betrachten im Folgenden eine Art Modellperson: Sie besteht aus zwei aufeinander liegenden Klötzen (dem oberen Teil des Körpers und dem unteren Teil sozusagen), Abb. 4.12. Man sieht, dass der Impulsstrom an der Unterseite des unteren Klotzes doppelt so groß ist wie an der Unterseite des oberen.

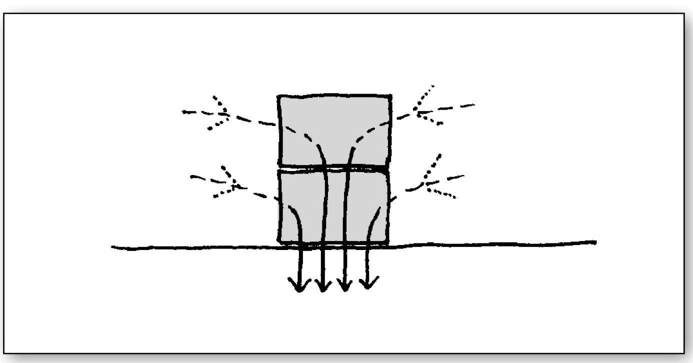


Abb. 4.12
Die Modellperson besteht aus Ober- und Unterkörper.

Wir möchten diese „Person" nun in den Zustand der Schwerelosigkeit versetzen: in einen Zustand, in dem keine Impulsströme durch sie hindurchfließen. Oder in anderen Worten: in einen Zustand, in dem keiner ihrer Teile unter Druck- oder unter Zugspannung steht.

Du wirst wahrscheinlich glauben, dass man die Person dazu sehr weit von der Erde wegbringen müsste, an eine Stelle, wo vom Gravitationsfeld der Erde nichts mehr zu spüren ist. Dort würde kein Impuls in unsere Person hineinfließen. Also könnte auch kein Impuls durch sie hindurchfließen. Das wäre tatsächlich eine Möglichkeit. Es gibt aber eine andere, viel einfachere Methode: Wir lassen den Impuls zwar in die Person hinein- aber nicht wieder herausfließen. Auch dann fließt kein Impuls mehr durch sie hindurch, und sie fühlt sich schwerelos.

Wie kann man das aber anstellen? Ganz einfach. Damit der Impuls aus der Person nicht wieder herauskann, d.h. damit der Impuls nicht in die Erde abfließt, genügt es, die Verbindung zur Erde zu unterbrechen. Das erreichen wir, indem wir unsere Person frei fallen lassen, Abb. 4.13. Jetzt fließt zwar aus dem Gravitationsfeld in jeden Klotz (in jeden Teil der Person) und an jede Stelle der Klötze Impuls hinein. Aber dieser fließt in den Klötzen nicht mehr umher. So fließt auch kein Impuls mehr vom einen Klotz in den anderen. Die Folge davon: Es herrschen keinerlei Druck- oder Zugspannungen mehr. Der untere Klotz spürt nicht mehr das Gewicht des darüber liegenden.

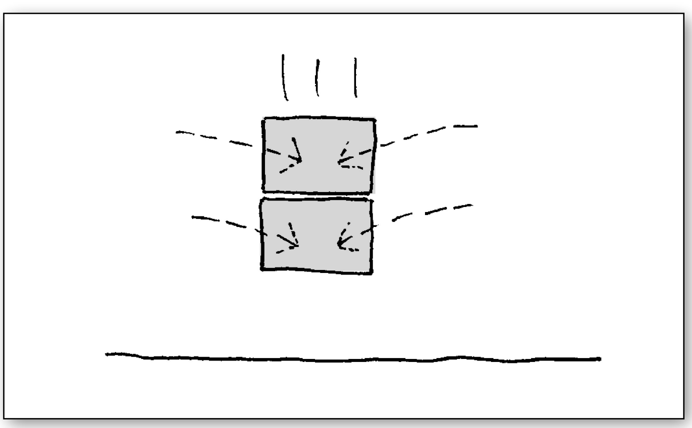


Abb. 4.13
Ein frei fallender Körper ist schwerelos. In ihm fließen keine Impulsströme.

Für dich selbst, d.h. eine richtige Person, gilt natürlich dasselbe: Wenn du von irgendwo herunterspringst, bist du, solange du fällst, schwerelos. Ja sogar, wenn du nach oben springst, bist du schwerelos, sobald du den Kontakt zur Erde verloren hast und bleibst es, bis du die Erde wieder berührst.

Nun ist die Zeit, die man beim Fallen in der Luft zubringt, so kurz, dass man das Schwerelosigkeitsgefühl kaum richtig zur Kenntnis nehmen kann. Wir machen deshalb einen Versuch mit unserer Modellperson, Abb. 4.14. Die beiden Klötze stehen auf einer Platte, die mit Bindfäden, ähnlich wie eine Waagschale, aufgehängt ist. Zwischen dem unteren und dem oberen Klotz befindet sich ein dünnes Brettchen, das über eine dünne, gespannte Gummischnur mit der Wand verbunden ist. Die Gummischnur würde das Brettchen herausziehen, wenn dieses nicht durch das Gewicht des oberen Klotzes eingeklemmt wäre.

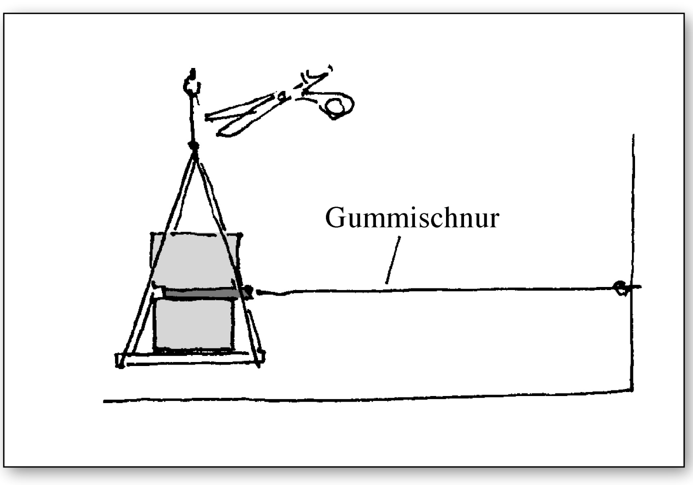


Abb. 4.14
Während des freien Fallens sind die Klötze schwerelos. Das eingeklemmte Brettchen wird losgelassen.

Nun das Experiment: Wir schneiden den Faden, an dem die ganze Anordnung hängt, durch. Im selben Augenblick schießt das Brettchen, von dem Gummiseil gezogen, heraus. Warum? Der Klotzturm ist eine kurze Zeit lang frei gefallen. Während dieser kurzen Zeit war er schwerelos. Der obere Klotz hat nicht mehr auf den unteren gedrückt, er hat das Brettchen losgelassen. Wir fassen zusammen:

Frei fallende Körper sind schwerelos.

4.6 Kreisbahnen im Gravitationsfeld

Satelliten und Raumstationen laufen antriebslos auf einer kreisförmigen (oder nahezu kreisförmigen) Bahn um die Erde. Warum fallen sie aber nicht herunter in Richtung Erde? Genau das ist es, was sie tun. Ohne den ständigen Impulsstrom von der Erde würde ein Satellit geradeaus fliegen. Da er aber Impuls von der Erde bekommt, wird seine Bahn zur Erde hin gekrümmt. Wenn die Erde flach wäre, würde er also auf die Erde herunterfallen. Die Erde ist aber rund und der Satellit fällt immer gerade so, dass er der Krümmung der Erdoberfläche folgt. Damit der Satellit auf einer Kreisbahn um die Erde fliegt, muss er eine ganz bestimmte Geschwindigkeit haben. Die Richtung des Geschwindigkeitsvektors muss parallel zur Erdoberfläche sein, d.h. senkrecht zur Verbindungslinie zwischen Satellit und Erdmittelpunkt, und ihr Betrag muss einen ganz bestimmten Wert haben.

Wenn diese Bedingungen nicht erfüllt sind, bewegt sich der Satellit auf auf einer anderen Bahn: einer Ellipse, einer Parabel, einer Hyperbel oder einer Gerade.

Wir wollen die Geschwindigkeit berechnen, die ein Satellit haben muss, damit seine Bahn kreisförmig ist.

Wir erinnern uns: Die Impulsänderung pro Zeitintervall für einen Körper, der sich mit der Geschwindigkeit v auf einer Kreisbahn mit dem Radius r bewegt ist:

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = m \cdot \frac{v^2}{r}.$$

Die Impulsänderung eines Satelliten kommt zustande durch den Impulsstrom von der Erde. Daher muss gelten:

$$m \cdot \frac{v^2}{r} = m \cdot g\,.$$

Division beider Seiten der Gleichung durch m ergibt:

$$\frac{v^2}{r} = g\,,$$

und daraus folgt:

$$v = \sqrt{r \cdot g}\,. \qquad (6)$$

Die Gleichung gilt auch näherungsweise für den Mond, der die Erde umkreist und die Planeten, die sich um die Sonne herum bewegen, denn die entsprechenden Bahnen sind nahezu kreisförmig.

> Bewegt sich ein Satellit oder ein Himmelskörper auf einer Kreisbahn um einen anderen herum, dessen Masse viel größer ist, so ist seine Geschwindigkeit
>
> $v = \sqrt{r \cdot g}$
>
> (r = Bahnradius, g = Gravitationsfeldstärke)

Wir können den Satz auch „umdrehen“: Wenn die Geschwindigkeit des Satelliten durch Gleichung (6) gegeben ist, so ist die Satellitenbahn kreisförmig. Nun kann man aber einem Satelliten beim Start jede beliebige Geschwindigkeit geben: jeden beliebigen Betrag und jede beliebige Richtung. Was macht der Satellit, wenn die Geschwindigkeit am Anfang nicht Gleichung (6) entspricht, oder wenn sie nicht die richtige Richtung hat? Der Satellit bewegt sich nicht auf einer Kreisbahn. Kann man ihn dazu bringen, auf irgendeiner beliebigen Bahn durch die Gegend zu fliegen? Ganz und gar nicht. Die möglichen Bahnen sind eine ganz bestimmte Klasse von-Kurven, die so genannten *Kegelschnitte*. Zu ihnen gehören:

- Kreis
- Ellipse
- Hyperbel
- Parabel
- Gerade

Du siehst sicher, dass sowohl der Kreis, als auch die Gerade nichts anderes sind als Sonderfälle der Ellipse sind.

Wir wollen noch zwei Fragen stellen, aber nur eine davon beantworten:

Frage 1: Warum fliegt eine Satellit auf einer Kreisbahn?

Antwort: Das war eine dumme Frage. Er fliegt auf einer Kreisbahn, weil man ihn auf eine Kreisbahn gebracht hat.

Frage 2: Warum fliegen Mond und Planeten auf Kreisbahnen:

Antwort: Gute Frage. Aber sie ist zu schwierig, um sie hier zu beantworten. Im Übrigen sind diese Bahnen gar nicht genau kreisförmig. Die Abweichung vom Kreis ist relativ groß bei Merkur.

Wir berechnen noch die Geschwindigkeit der Internationalen Raumstation ISS. Sie fliegt in einer Höhe von 400 km. Dort ist der Betrag der Gravitationsfeldstärke g = 8,7 N/kg. r ist gleich dem Erdradius plus 400 km, also r = 6770 km. Damit wird

$$v = \sqrt{6{,}770 \cdot 10^6 \text{ m} \cdot 8{,}7 \text{ N/kg}}$$
$$= 7{,}675 \cdot 10^3 \text{ m/s} = 27\,630 \text{ km/h}.$$

Du weißt, dass sich Astronauten in ihrem Raumschiff schwerelos fühlen. Was ist hierfür die Erklärung? Dass sie so weit von der Erde weg sind? Keineswegs. Wir haben gerade gesehen: Die ISS fliegt in etwa 400 km Höhe. Das ist, verglichen mit dem Erdradius, sehr wenig. Sie fliegt also eigentlich ganz dicht über der Erdoberfläche, Abb. 4.15.

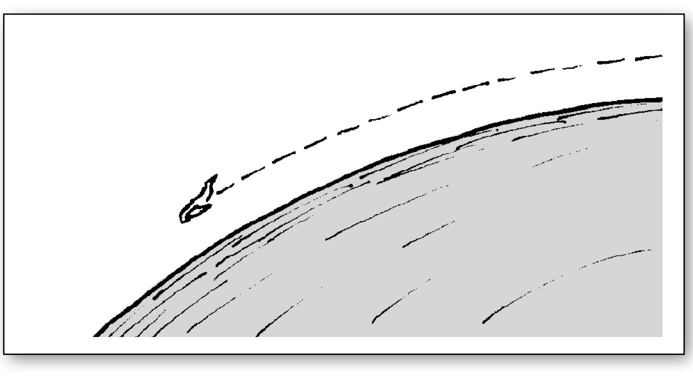


Abb. 4.15
Die ISS fliegt in nur 400 km Höhe, also dicht über der Erdoberfläche. Der Betrag der Gravitationsfeldstärke ist nur 10 % kleiner als an der Erdoberfläche.

Der Betrag der Gravitationsfeldstärke ist hier nur um etwa 10 % geringer als an der Erdoberfläche. Die Erklärung der Schwerelosigkeit ist genau die, die wir für fallende Körper gefunden hatten: Ein Raumschiff ist, mit Besatzung und allem anderen Drum und Dran, ein frei fallender Körper. Und frei fallende Körper sind schwerelos. Beachte: Schwerelosigkeit bedeutet nicht, dass die Gravitationsfeldstärke null ist.

Aufgaben

1. Ein Astronaut hat in seinem Raumschiff zwei gleich aussehende Gegenstände verschiedener Masse vor sich. Kann er herausbekommen, welches der Körper mit der größeren Masse ist und wenn ja, wie?

2. Ein Raumschiff befindet sich so weit von der Erde entfernt, dass die Gravitationsfeldstärke praktisch gleich null ist. Die Astronauten möchten nun gern wieder einmal ihre Schwere spüren. Was können sie tun, ohne zur Erde oder zu einem anderen Himmelskörper zu fliegen?

3. Leite eine Formel her, mit der man die Winkelgeschwindigkeit der Umlaufbewegung eines Satelliten aus Bahnradius und Gravitationsfeldstärke berechnen kann.

4. Auch der Mond ist ein Satellit der Erde. Er läuft auf einer Kreisbahn mit einem Radius r = 384 000 km um die Erde. Berechne die Feldstärke des Gravitationsfeldes der Erde in diesem Abstand.

Hilfe:
(a) Berechne den Umfang des Kreises, auf dem sich der Mond bewegt.
(b) Berechne die Umlaufzeit des Mondes in Sekunden.
(c) Berechne die Geschwindigkeit des Mondes.
(d) Berechne die Gravitationsfeldstärke.

5. Ein Satellit bewegt sich zunächst auf einer Kreisbahn. Wie ändert sich die Bahn, wenn man den Betrag der Geschwindigkeit plötzlich verkleinert, wie ändert sie sich, wenn man ihn vergrößert. Wie muss man es anstellen, damit eine Hyperbelbahn entsteht?

4.7 Die Feldstärke für kugelsymmetrische Körper

Die Gravitationsfeldstärke nimmt von der Erde aus nach außen hin ab. Diese Abnahme wird durch die Gleichung

$$g(r) = G \cdot \frac{m}{r^2} \qquad (7)$$

beschrieben. Die Gleichung gilt nicht nur für die Erde, sondern für jeden kugelsymmetrischen Körper, also insbesondere auch für andere Himmelskörper: Sterne, Planeten und Monde, denn diese sind nahezu kugelsymmetrisch.

Wir wollen die Gleichung etwas genauer anschauen:

- So wie sie hier steht, gilt sie für den Betrag der Feldstärke. Die Richtung des Feldstärkevektors ist die Richtung zum Mittelpunkt des kugelsymmetrischen Körpers, also im Fall der Erde die Richtung zum Erdmittelpunkt.
- G ist die *Gravitationskonstante*. Es ist:

  $$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m^3}}{\mathrm{kg\ s^2}} .$$

  G hat denselben Wert für die Erde, den Mond, die Sonne, jeden anderen Himmelskörper und auch jeden kleinen irdischen Körper.
- Dass g proportional zur Masse des Körpers ist, ist nicht überraschend: Ein Körper kleiner Masse hat ein schwaches Gravitationsfeld, und einer mit einer großen Masse ein starkes.
- r ist der Abstand zum Mittelpunkt des Körpers. Die Feldstärke nimmt mit zunehmender Entfernung ab, und zwar quadratisch, also recht schnell.

Abbildung 4.16 zeigt die Feldstärke in der Umgebung eines kugelförmigen Körpers, dargestellt durch Vektorpfeile. Die Stelle, auf die sich ein Pfeil bezieht, ist jeweils der Anfangspunkt.

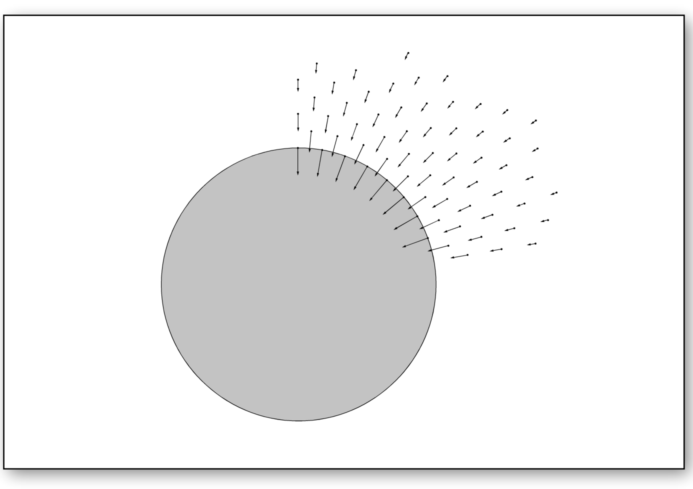


Abb. 4.16
Gravitationsfeldstärkevektoren in der Umgebung eines kugelförmigen Körpers.

Ist der Abstand r groß im Vergleich zur Größe des Körpers, so müssen wir nicht mehr die Kugelförmigkeit voraussetzen. Das Feld in diesem Abstand ist dasselbe, egal ob der Körper rund ist oder nicht.

Wir kommen noch einmal auf ein Ergebnis des vorigen Abschnitts zurück:

$$v = \sqrt{r \cdot g} \,. \qquad (8)$$

Um die Geschwindigkeit zu berechnen, die ein Satellit oder anderer Himmelskörper haben muss, damit er auf einer Kreisbahn mit dem Radius r läuft, muss man die Feldstärke g des Gravitationsfeldes kennen. Mit Gleichung (7) haben wir nun die Möglichkeit die Feldstärke zu berechnen. Wir können auch gleich das g von Gleichung (7) in Gleichung (8) einsetzen:

$$v = \sqrt{r \cdot g} = \sqrt{r \cdot G \cdot \frac{m}{r^2}} = \sqrt{\frac{G \cdot m}{r}},$$

also:

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot m}{r}}. \qquad (9)$$

Beachte, dass m hier die Masse des Zentralkörpers ist und nicht die Masse des Körpers, der um ihn herumkreist. Es kann also sein:

m **= Masse von**	***r*** **= Bahnradius von**	***v*** **= Geschwindigkeit von**
Erde	Satellit	Satellit
Erde	Mond	Mond
Sonne	Erde	Erde

Wir nehmen an, unser Zentralkörper sei die Erde. In Gleichung (9) ist dann m die Masse der Erde. Um die Geschwindigkeit eines Satelliten oder des Mondes zu berechnen, brauchen wir außer der Erdmasse nur noch den zugehörigen Bahnradius r zu kennen. Die Masse der Sonne, der Planeten und des Mondes der Erde sind in Tabelle 4.2 aufgeführt.

	m **in Erdmassen**	***m*** **in kg**
Sonne	$3{,}33 \cdot 10^{5}$	$2{,}0 \cdot 10^{30}$
Merkur	0,053	$0{,}317 \cdot 10^{24}$
Venus	0,82	$4{,}9 \cdot 10^{24}$
Erde	1	$5{,}97 \cdot 10^{24}$
Mars	0,107	$0{,}64 \cdot 10^{24}$
Jupiter	318	$1900 \cdot 10^{24}$
Saturn	95,2	$569 \cdot 10^{24}$
Uranus	14,6	$87 \cdot 10^{24}$
Neptun	17,2	$103 \cdot 10^{24}$
Mond der Erde	0,0123	$7{,}35 \cdot 10^{22}$

Tabelle 4.2
Masse von Sonne, Planeten und Mond

Die Bahnen, auf denen sich die Planeten um die Sonne bewegen, liegen alle ungefähr in einer Ebene, der Ekliptikebene. Auch die Bahn des Mondes liegt in dieser Ebene.

Wir merken uns:

> Wenn ein Satellit oder ein Mond oder ein Planet um einen Zentralkörper kreist, so gilt:
> Die Geschwindigkeit ist um so größer
> - je größer die Masse des Zentralkörpers ist;
> - je kleiner der Bahnradius ist.

Beispiel: Ein Satellit soll in einer Höhe von 10 000 km über der Erdoberfläche eine Kreisbahn um die Erde beschreiben. Welche Geschwindigkeit muss er haben?

r = 10 000 km + 6 370 km = $16{,}37 \cdot 10^{6}$ m
$m = 5{,}97 \cdot 10^{24}$ kg
$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3/(kg \cdot s^2)}$

Mit Gleichung (9) wird:

$$v = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3/(kg \cdot s^2)} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}}{16{,}37 \cdot 10^{6}\ \mathrm{m}}} = 4930\ \mathrm{m/s}\,.$$

Aufgaben

1. Fortsetzung von Aufgabe **4** im vorigen Abschnitt: Berechne die Masse der Erde.

2. Der Abstand Sonne - Erde beträgt ziemlich genau 150 Millionen Kilometer.

(a) Berechne die Geschwindigkeit der Erde auf ihrer Bahn um die Sonne.
(b) Berechne die Feldstärke des Gravitationsfeldes der Sonne am Ort der Erdbahn.
(c) Berechne die Masse der Sonne.

3. Jeder Mond kreist um einen Planeten und die Planeten kreisen um die Sonne. Diese Bewegungen kann man mit Teleskopen sehr genau beobachten, d.h. man kann die Bahnradien und die Umlaufzeiten messen. Aus den Messdaten kann man die Massen von Himmelskörpern bestimmen. Welche Daten braucht man, um die Masse eines Planeten zu bestimmen? (Du brauchst dir nur die beiden vorangehenden Aufgaben anzusehen.)

4. Fernsehsatelliten kreisen so um die Erde, dass sie dieselbe Winkelgeschwindigkeit haben wie die Erde selbst. Warum?

In welcher Höhe fliegt ein Fernsehsatellit? Welche Bahngeschwindigkeit muss er haben?

4.8 Galilei, Kepler und Newton

Die physikalische Erklärung und die mathematische Beschreibung der Gravitationserscheinungen –des freien Falls und der Bewegung der Himmelskörper– war eine der ersten großen Leistungen der Physik. Diese Entwicklung fand im 16. und 17. Jahrhundert statt. Viele Wissenschaftler waren daran beteiligt, aber die wichtigsten Beiträge stammen von nur drei Naturforschern: Galilei, Kepler und Newton.

Galileo Galilei (1564-1642), Abb. 4.17, machte zahlreiche Entdeckungen und Erfindungen. Unter anderem fand er, dass die Geschwindigkeit von fallenden Körpern, wenn die Luftreibung ausgeschlossen werden kann, gleichmäßig zunimmt, und dass alle Körper gleich schnell fallen.

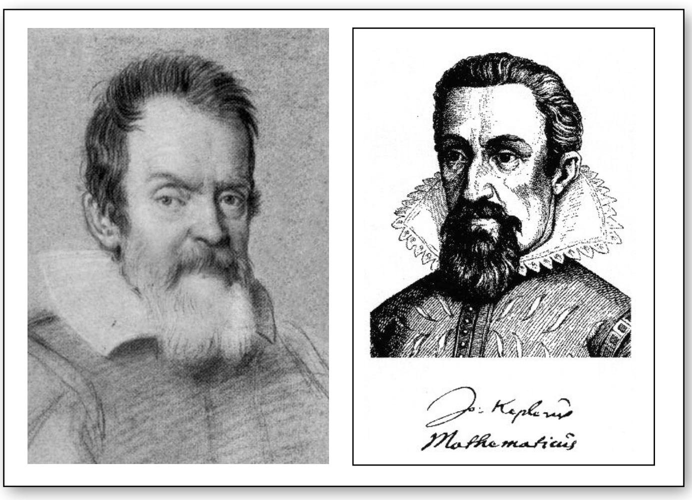


Abb. 4.17
Galileo Galilei (links) und Johannes Kepler (rechts)

Johannes Kepler (1571-1630) war es gelungen, die Planetenbahnen mathematisch exakt zu beschreiben. Unter anderem fand er:

Der Quotient

$$\frac{T^2}{r^3}$$

hat für alle Planeten des Sonnensystems denselben Wert (T = Umlaufzeit, r = Bahnradius).

Isaac Newton (1643-1727), Abb. 2.35, erkannte, dass das Fallen eines Gegenstandes auf der Erde im Prinzip dieselbe Erscheinung ist, wie die Bewegung des Mondes um die Erde und der Planeten um die Sonne.

Außerdem fand er den Zusammenhang, den wir mit Gleichung (7) beschrieben haben. Er musste diesen Zusammenhang allerdings etwas anders formulieren, denn zu seiner Zeit kannte man noch keine Felder, und daher auch keine Feldstärke. Wir können aber die Newtonsche Gleichung leicht aus unseren Gleichungen herleiten.

Wir wenden Gleichung (7) auf einen Körper A der Masse m_A (z.B. die Erde) an:

$$g(r) = G \cdot \frac{m_A}{r^2}. \qquad (10)$$

Der Impulsstrom aus Körper A in einen anderen Körper B (mit der Masse m_B) ist

$$F = m_B \cdot g(r) .$$

Wir ersetzen $g(r)$ mit Hilfe von Gleichung (10):

$$F = m_B \cdot G \cdot \frac{m_A}{r^2} = G \cdot \frac{m_A \cdot m_B}{r^2}.$$

Es gilt also:

$$F = G \cdot \frac{m_A \cdot m_B}{r^2}.$$

Dies ist das Newtonsche *Gravitationsgesetz*.

Die Mittelpunkte von zwei Körpern (Massen m_A bzw. m_B) haben voneinander den Abstand r. Der Impulsstrom, der durch das Gravitationsfeld vom einen zum anderen Körper fließt, ist
- proportional zu m_A und zu m_B;
- umgekehrt proportional zu r^2.

Noch einmal die Bedingungen, unter denen das Gravitationsgesetz gilt: Jeder der Körper muss entweder eine kugelförmige Massenverteilung haben, oder klein sein gegen den Abstand r.

Aufgaben

1. Leite das Gesetz von Kepler her, das im Text zitiert wurde. Gehe dazu aus von Gleichung (9). Rechne die Geschwindigkeit in die Umlaufzeit um.

2. Die Gravitationskonstante soll experimentell bestimmt werden, indem man den Impulsstrom zwischen zwei Körpern misst, die je eine Masse von 1 kg haben, und deren Mittelpunkte einen Abstand von 10 cm haben. Welches ist das Problem bei dieser Messung?

4.9 Die Gezeiten

Die Geschwindigkeit eines fallenden Apfels im Gravitationsfeld der Erde nimmt gleichmäßig zu:

$v = g \cdot t$,

für die Beschleunigung a gilt:

$a = g$.

g ist die Feldstärke des Gravitationsfeldes der Erde. Die Beschleunigung des Apfels hängt nicht von seiner eigenen Masse ab. Sie hängt aber ab von der Feldstärke g, und g hängt ab von der Masse der Erde und vom Ort:

$$g(r) = G \cdot \frac{m}{r^2}.$$

Das führt zu einem interessanten Problem: Was passiert, wenn der fallende Körper so groß ist, dass g an den verschiedenen Stellen des Körpers unterschiedliche Werte hat, Abb. 4.18?

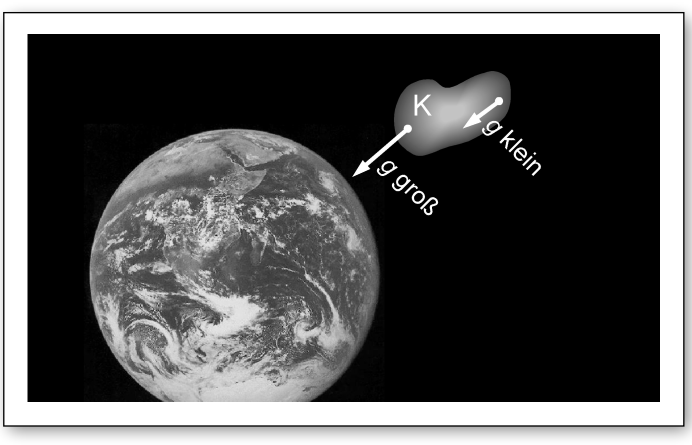


Abb. 4.18
Die Feldstärke des Feldes der Erde hat im Bereich des Körpers K unterschiedliche Werte.

Eine etwas übersichtlichere Situation zeigt Abb. 4.19. Statt eines ausgedehnten Körpers betrachten wir eine Art Hantel: Zwei Körper K_1 und K_2 der gleichen Masse

$m = 4$ kg

sind durch eine Stange verbunden.

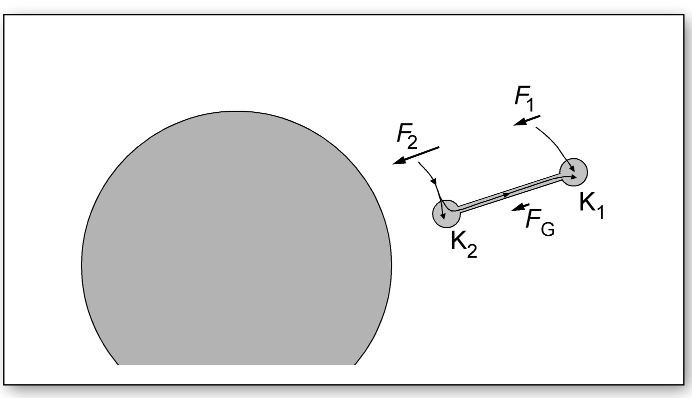


Abb. 4.19
In K_1 fließt über das Gravitationsfeld weniger Impuls hinein als in K_2. Daher muss Impuls von K_2 nach K_1 fließen.

Die Masse der Stange ist so klein, dass wir sie gegen die der beiden Körper vernachlässigen können. Die Feldstärke hat bei den beiden Körpern die unterschiedlichen Werte g_1 und g_2. Wir nehmen an, es sei

$g_1 = 11$ N/kg und $g_2 = 12$ N/kg .

Daher fließen in die beiden Körper unterschiedliche Impulsströme hinein:

K_1: $F_1 = m \cdot g_1 = 4 \text{ kg} \cdot 11 \text{ N/kg} = 44 \text{ N}$
K_2: $F_2 = m \cdot g_2 = 4 \text{ kg} \cdot 12 \text{ N/kg} = 48 \text{ N}$

K_2 bekommt also pro Sekunde mehr Impuls von der Erde als K_1. Wäre die Stange nicht da, so wäre die Impulszunahme (die Änderungsrate) von K_2 48 N und die von K_1 44 N. K_2 würde in jedem Augenblick schneller fallen als K_1.

Nun sind die Körper aber durch die Stange verbunden, und sie können nicht unterschiedlich schnell fallen. Durch die Stange muss daher ein Impulsstrom F_G von K_2 nach K_1 fließen, was dazu führt, dass die Impulszunahme beider Körper gleich wird. In unserem Beispiel ist

$F_G = 2$ N.

Damit ist die Impulszunahme:

Körper K_1: $\dfrac{\Delta p_1}{\Delta t} = 44 \text{ N} + 2 \text{ N} = 46 \text{ Hy/s}$

Körper K_2: $\dfrac{\Delta p_2}{\Delta t} = 48 \text{ N} - 2 \text{ N} = 46 \text{ Hy/s}$

Die Stange steht dabei unter Zugspannung. Man kann das auch so ausdrücken: K_2 zieht an K_1, damit K_1 schneller wird, oder K_1 zieht an K_2, damit K_2 langsamer wird.

Noch einmal in anderen Worten der Grund für das Fließen des Impulsstroms F_G: Die Feldstärke hat im Bereich des Körpers unterschiedliche Werte. Das Feld ist nicht homogen.

Das Ergebnis, das wir uns mit Hilfe des Hantel-Körpers beschafft haben, gilt auch für jeden anderen Körper:

> Wenn das Gravitationsfeld im Bereich eines fallenden Körpers nicht homogen ist, so fließen innerhalb des Körpers Impulsströme. Der Körper steht in Fallrichtung unter Zugspannung.

Es ist so, als wenn jemand versuchte, den Körper in die Länge zu ziehen.

Wir vergleichen diese Aussage mit einem Ergebnis, das wir früher gefunden hatten: Frei fallende Körper sind schwerelos. Wir meinten damit, dass innerhalb eines frei fallenden Körpers keine Impulsströme fließen. Wir sehen jetzt, dass diese Regel nur für ein Feld gilt, das im Bereich des betrachteten fallenden Körpers homogen ist.

Wo spielen aber solche Zugspannungen wirklich eine Rolle, und was haben diese Überlegungen mit unserer Überschrift zu tun?

Jeder Körper, der dem Gravitationsfeld eines anderen ausgesetzt ist, steht unter Zugspannung, falls das Feld dieses anderen Körpers nicht homogen ist. Die Erde befindet sich im Bereich des Gravitationsfeldes der Sonne und des Mondes. Die Felder dieser beiden Himmelskörper sind im Bereich der Erde fast homogen, aber eben nur fast. Und weil sie nicht ganz homogen sind, steht die Erde als Ganzes unter Zugspannung. Dabei ist der Einfluss des Mondes größer als der der Sonne. Die Inhomogenität des Mondfeldes ist am Ort der Erde größer als die des Sonnenfeldes.

Wir beschränken uns im Folgenden auf den Einfluss des Mondes. Er versucht also, die Erde in Richtung der Verbindungslinie Erde - Mond in die Länge zu ziehen. Der festen Erde macht das nicht allzu viel aus. Aber das Wasser der Ozeane kann auf diese Zugspannung reagieren. Es entstehen auf den beiden entgegengesetzten Seiten der Erde je ein „Wasserberg“, Abb. 4.20. Es herrscht dort Hochwasser. An den Seiten der Erde herrscht Niedrigwasser. Während sich die Erde um ihre eigene Achse dreht, wandern diese Wasserberge um die Erde herum, oder besser: Die Erde dreht sich unter den Bergen hinweg. Wenn man sich an einer festen Stelle der Erde befindet, steigt und fällt der Wasserstand mit einer Periode von 12 Stunden. Das Zunehmen des Wasserstandes nennt man Flut, das Abnehmen Ebbe.

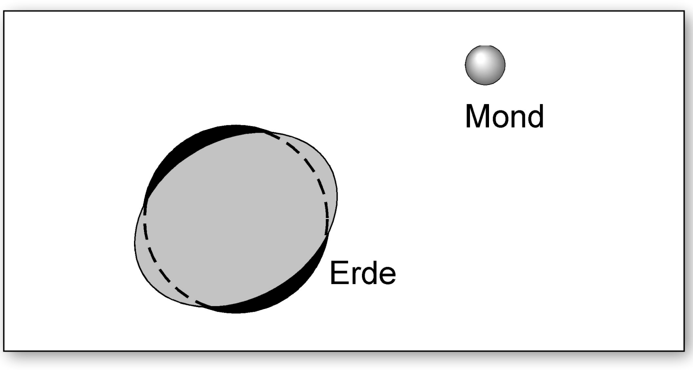


Abb. 4.20
Das Gravitationsfeld des Mondes versucht die Erde in die Länge zu ziehen. An gegenüber liegenden Seiten der Erde entstehen zwei „Wasserberge“. (Das Bild ist nicht maßstabsgerecht.)

Diese Gezeiten-Zugspannungen sind auf der Erde ein kleiner Effekt. Es gibt aber Gegenden in der Welt, wo sie sehr stark werden, etwa an der Oberfläche eines Neutronensterns. Nun ist ein Neutronenstern aus mehreren Gründen kein gemütlicher Ort. Die Gravitationsfeldstärke beträgt etwa 10^{12} N/kg, sodass ein Mensch durch sein eigenes Gewicht sofort zermalmt würde. Aber auch, wenn man frei fällt, also in einem Zustand ist, in dem man unter irdischen Bedingungen schwerelos ist, würde man auf einem Neutronenstern durch die Gezeiten-Zugspannung zerrissen.

Aufgaben

1. Berechne die Gravitationsfeldstärke des Mondfeldes am Ort der Erde. Wie groß ist der Unterschied zwischen der dem Mond zugewandten und der dem Mond abgewandten Seite?

2. Ein frei fallender Körper in einem nicht homogenen Feld steht in Fallrichtung unter Zugspannung. Das ist aber noch nicht die ganze Wahrheit. Er steht auch in der Richtung quer dazu unter mechanischer Spannung. Wie kommt das? Benutze zur Begründung wieder einen hantelförmigen Körper. Orientiere ihn aber quer zur Fallrichtung. Um was für eine Spannung handelt es sich: Zug oder Druck?

5

Impuls, Drehimpuls und Energie

5.1 Was ist Energie?

Vorher noch einmal: Was ist Impuls? Die Antwort war einfach: Im Wesentlichen ein Maß für das, was man umgangssprachlich Schwung oder Wucht nennt. Schwung ist in einem Körper enthalten, er „steckt drin“. Impuls ist daher eine mengenartige Größe.

Und die Energie? Auch sie können wir uns vorstellen als ein „Zeug“, das in den Dingen drinsteckt – in festen Körpern, in Flüssigkeiten, in Gasen und in Feldern. Auch sie ist also eine mengenartige Größe. Nur können wir von ihr nicht sagen, sie entspricht irgendetwas, wofür wir einen Namen haben – so wie „Schwung“ für den Impuls oder „Wärme“ für die Entropie. Der Grund: Die Energie hat keine Eigenschaft, an der man sie immer leicht erkennt. Ein Körper hat viel Energie, wenn er heiß ist, wenn er sich schnell bewegt, wenn er schnell rotiert oder wenn er unter hohem Druck steht. Und seine Energie hängt von der chemischen Zusammensetzung ab. Leider ist der Energieinhalt auch nicht einfach proportional zur Geschwindigkeit, zur Temperatur, zum Druck usw.. Der Zusammenhang ist komplizierter.

Es ist daher etwas Geschick nötig um zu erkennen, ob ein System viel oder wenig Energie enthält, und es ist oft kompliziert, die Energie zu berechnen. Wir wollen uns im Folgenden mit diesem Problem befassen.

Immerhin hat die Energie auch einfache Eigenschaften:

> Energie ist eine mengenartige Größe. Energie kann nicht erzeugt und nicht vernichtet werden.

Als grobe Orientierung merken wir uns noch:

> Ein Körper hat viel Energie, wenn er sich schnell bewegt oder schnell rotiert, wenn er heiß ist oder wenn er einen hohen Druck hat.

Zu jedem dieser Kriterien gibt es Einschränkungen. Die wirst du aber erst nach und nach kennen lernen.

Eine endgültige Antwort auf die Frage „Was ist Energie?“ werden wir erst in Kapitel 7 bekommen. Im Augenblick könnten wir mit dieser Antwort aber noch nicht viel anfangen.

Noch zur Erinnerung: Das Symbol der Energie ist E, die Maßeinheit Joule, abgekürzt J.

5.2 Der Impuls als Energieträger

Willy, Abb. 5.1, zieht wieder mal eine Kiste über den Boden. Er strengt sich an, er gibt Energie ab. Die Energie kommt aus seinen Muskeln. Wo bleibt diese Energie? Sie geht zur Unterseite der Kiste, erzeugt dort Entropie und verteilt sich, zusammen mit der Entropie, in der Umgebung.

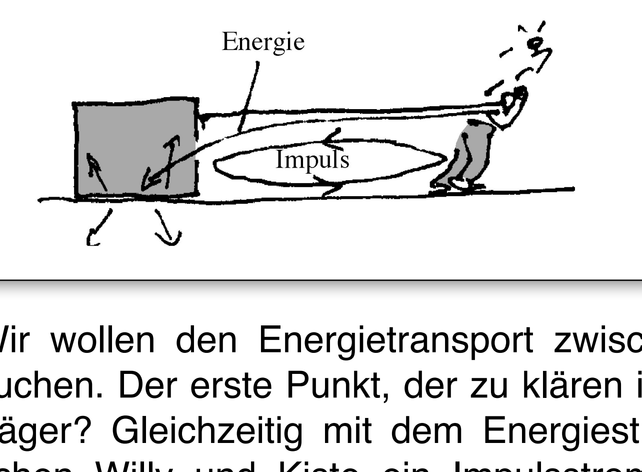


Abb. 5.1
Die Energie fließt mit dem Energieträger Impuls von Willys Muskeln zur Unterseite der Kiste. Von dort geht sie mit dem Energieträger Entropie in die verschiedensten Richtungen.

Wir wollen den Energietransport zwischen Willy und Kiste untersuchen. Der erste Punkt, der zu klären ist: Welches ist der Energieträger? Gleichzeitig mit dem Energiestrom fließt in dem Seil zwischen Willy und Kiste ein Impulsstrom. Wir schließen, dass der gesuchte Energieträger der Impuls ist.

Der Impuls ist ein Energieträger.

In dem Flussbild, Abb. 5.2, sind Energie- und Impulsstrom schematisch dargestellt.

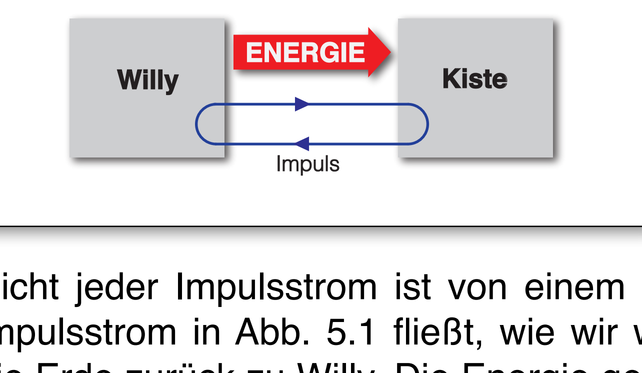


Abb. 5.2
Flussbild zu den Energie- und Impulsströmen in Abb. 5.1

Nicht jeder Impulsstrom ist von einem Energiestrom begleitet: Der Impulsstrom in Abb. 5.1 fließt, wie wir wissen, von der Kiste durch die Erde zurück zu Willy. Die Energie geht aber von der Kistenunterseite aus ihre eigenen Wege. Der zurückfließende Impuls trägt keine Energie.

Wovon hängt es nun ab, wie groß der Energiestrom ist? Oder allgemeiner formuliert: Wie müssen wir es anstellen, wenn wir möglichst viel Energie mit einem Seil oder einer Stange übertragen wollen?

Wenn wir ein gespanntes Seil an den Wänden festhaken, Abb. 5.3, so fließt ein Impulsstrom, aber kein Energiestrom. Welches ist der Unterschied zwischen den Seilen in Abb. 5.1 und Abb. 5.3? Das erste Seil bewegt sich, das zweite nicht. Man sieht also, dass es beim Energietransport auch auf die Bewegung ankommt, genauer: auf die Geschwindigkeit, mit der sich die Impulsleitung bewegt.

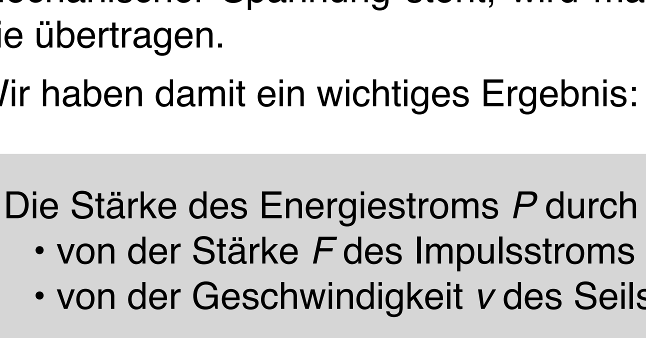


Abb. 5.3
Es fließt ein Impulsstrom, aber kein Energiestrom.

Außerdem hängt die Stärke des Energiestroms natürlich noch von der Stärke des Impulsstroms ab, denn wenn das Seil nicht unter mechanischer Spannung steht, wird man mit ihm auch keine Energie übertragen.

Wir haben damit ein wichtiges Ergebnis:

Die Stärke des Energiestroms P durch ein Seil hängt ab
- von der Stärke F des Impulsstroms im Seil
- von der Geschwindigkeit v des Seils.

Wir wollen klären, wie der Zusammenhang quantitativ aussieht. Durch was für eine Gleichung sind die drei Größen P, F und v miteinander verknüpft?

Zunächst der Zusammenhang zwischen Energiestrom P und Impulsstrom F. Abb. 5.4 zeigt von oben, wie zwei gleichartige Kisten über den Boden gezogen werden.

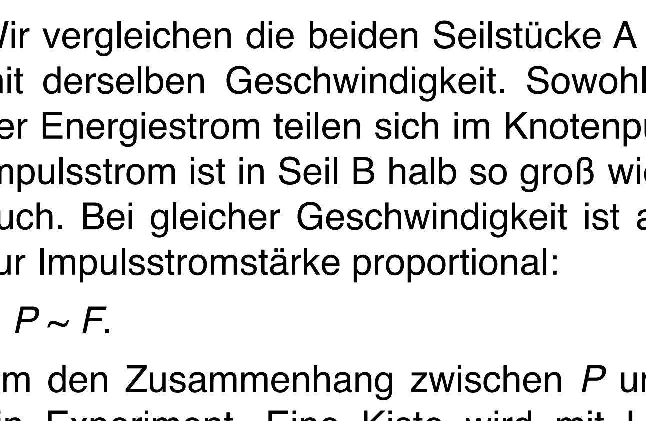


Abb. 5.4
Zwei Kisten werden über den Boden gezogen. Ansicht von oben

Wir vergleichen die beiden Seilstücke A und B. Beide bewegen sich mit derselben Geschwindigkeit. Sowohl der Impulsstrom als auch der Energiestrom teilen sich im Knotenpunkt P gleichmäßig auf: Der Impulsstrom ist in Seil B halb so groß wie in A und der Energiestrom auch. Bei gleicher Geschwindigkeit ist also die Energiestromstärke zur Impulsstromstärke proportional:

$$P \sim F.$$

Um den Zusammenhang zwischen P und v zu finden, machen wir ein Experiment. Eine Kiste wird mit Hilfe eines „Flaschenzuges" gezogen, Abb. 5.5.

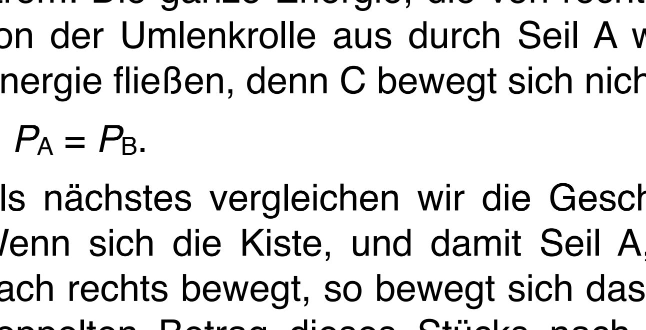


Abb. 5.5
In Seil A ist die Impulsstromstärke doppelt so groß wie in Seil B. Die Geschwindigkeit von Seil A ist halb so groß wie die von Seil B.

Wir vergleichen die Seilstücke A und B. Zunächst zum Energiestrom: Die ganze Energie, die von rechts in Seil B hineinfließt, geht von der Umlenkrolle aus durch Seil A weiter. In Seil C kann keine Energie fließen, denn C bewegt sich nicht. Wir haben also

$$P_A = P_B.$$

Als nächstes vergleichen wir die Geschwindigkeiten von A und B. Wenn sich die Kiste, und damit Seil A, um ein bestimmtes Stück nach rechts bewegt, so bewegt sich das rechte Ende von B um den doppelten Betrag dieses Stücks nach rechts. Und das bedeutet, dass die Geschwindigkeit von B doppelt so groß ist wie die von A. Es ist also:

$$v_B = 2v_A.$$

Schließlich vergleichen wir noch die Impulsströme in A und B. Das können wir nur mit einer Messung machen. Es zeigt sich, dass die Impulsstromstärke in B gerade halb so groß ist wie die in A. (In C ist sie übrigens genauso groß wie in B, so dass die Knotenregel erfüllt ist.) Wir können also schreiben:

$$F_A = 2F_B.$$

Alle diese Ergebnisse zusammen werden korrekt beschrieben, wenn man setzt:

$$P \sim v \cdot F.$$

Diese Proportionalität sagt zum einen, dass P zu F proportional ist, wenn die Geschwindigkeit konstant gehalten wird. Zum anderen sagt sie: Wenn man v verdoppelt und gleichzeitig F halbiert, so bleibt P konstant, und genau das haben wir in unserem Experiment mit der Umlenkrolle gefunden.

Überträgt man Energie mit dem Energieträger Impuls, so ist die Energiestromstärke proportional zur Impulsstromstärke und zur Geschwindigkeit, mit der sich die Leitung bewegt.

Um aus dieser Proportionalität eine Gleichung zu machen, müsste man eigentlich einen Proportionalitätsfaktor einführen. Nun sind aber die SI-Maßeinheiten der drei beteiligten Größen so gewählt worden, dass einfach gilt:

$$P = v \cdot F.$$

Dies ist das gesuchte Ergebnis. Wir können mit ihm den Energiestrom in unserem Seil berechnen, wenn wir den Impulsstrom im Seil und die Geschwindigkeit des Seils kennen.

Beispiel: Wir ziehen an einem Seil, in das ein Kraftmesser eingebaut ist. Der Kraftmesser zeigt 120 N an, das Seil bewegt sich mit 0,5 m/s. Der Energiestrom ergibt sich zu:

$$P = v \cdot F = 0{,}5\ \text{m/s} \cdot 120\ \text{N} = 60\ \text{W}.$$

Beachte, dass man die Geschwindigkeit in m/s und den Impulsstrom in N einsetzen muss, damit der Energiestrom in der SI-Einheit Watt herauskommt.

Wenn die Energie mit anderen Trägern fließt, so gelten ähnliche Formeln. Ist der Energieträger die elektrische Ladung, so gilt

$$P = U \cdot I,$$

d.h. der Energiestrom ist proportional zur elektrischen Stromstärke I. Falls die Entropie der Energieträger ist, haben wir:

$$P = T \cdot I_S,$$

d.h. der Energiestrom ist proportional zur Entropiestromstärke I_S.

Aus der Formel

$$P = v \cdot F$$

lässt sich eine Gleichung herleiten, die für manche Probleme handlicher ist. Wir ersetzen auf der linken Seite

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t}$$

und auf der rechten

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

also:

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot F.$$

Damit wird:

$$\Delta E = F \cdot \Delta s.$$

Die Gleichung sagt uns zum Beispiel: Wenn man gegen eine Stange drückt und die Stange dabei um das Wegstück Δs verschiebt, so fließt die Energie $F \cdot \Delta s$ durch die Stange. F ist hierbei die Stärke des Impulsstroms, der beim Schieben durch die Stange fließt. F muss während des Vorgangs natürlich einen eindeutigen Wert haben, d.h. konstant sein.

Beispiel: Wir ziehen so an einem Seil, dass dabei ein Impulsstrom von 120 N fließt und sich das Seil um 2 m bewegt. Wie viel Energie wird dabei durch das Seil übertragen? Mit $F = 120$ N und $\Delta s = 2$ m wird

$$\Delta E = F \cdot \Delta s = 120\ \text{N} \cdot 2\ \text{m} = 240\ \text{Nm} = 240\ \text{J}.$$

Aufgaben

1. Ein Traktor zieht einen Anhänger auf ebener Straße mit einer Geschwindigkeit von 20 km/h. Durch die Anhängerkupplung fließt ein Impulsstrom von 900 N. Wie groß ist der Energieverbrauch des Anhängers? (Wie stark ist der Energiestrom vom Traktor zum Anhänger?) Wo bleibt der Impuls, der zum Anhänger fließt, wo bleibt die Energie?

2. Der Antriebsriemen einer Maschine läuft mit einer Geschwindigkeit von 10 m/s. Die Stromstärke der mit dem Riemen übertragenen Energie beträgt 800 W. Mit welcher Kraft zieht der Riemen an der Riemenscheibe? (Wie stark ist der Impulsstrom im Riemen?)

3. Ein Kran hebt eine Last von 50 kg mit einer Geschwindigkeit von 0,8 m/s. Wie groß ist der Energiestrom durch das Kranseil? Die Last wird 5 m hoch gehoben. Wie lange dauert der Vorgang? Wie viel Energie fließt während dieser Zeit durch das Seil?

4. Ein Lastwagen zieht einen Anhänger auf ebener Straße von einer Stadt zur anderen. Die Entfernung zwischen den Städten beträgt 35 km. Durch die Anhängerkupplung fließt ein Impulsstrom von 900 N. Wie viel Energie ist insgesamt vom Lastwagen zum Anhänger geflossen?

5.3 Der Drehimpuls als Energieträger

Abbildung 5.6 zeigt noch einmal die Kaffeemühle, die uns schon in Kapitel 3 beschäftigt hatte. Auch hier wird Energie übertragen, nämlich mit Hilfe der Welle vom Motor zum Mahlwerk. Als Energieträger kommt hier nur der Drehimpuls in Frage.

Der Drehimpuls ist ein Energieträger.

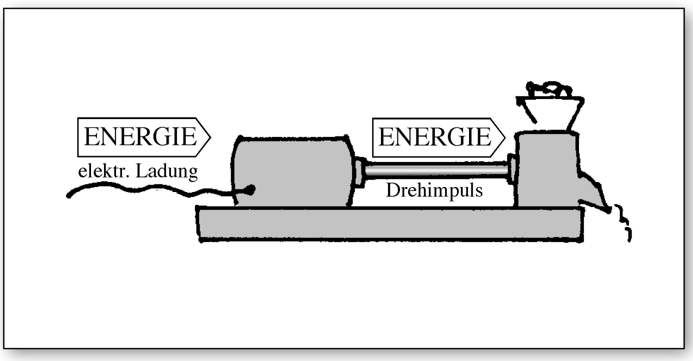


Abb. 5.6
Kaffeemühle. Der Drehimpuls fließt in einem Stromkreis.

Das entsprechende Flussdiagramm zeigt Abb. 5.7.

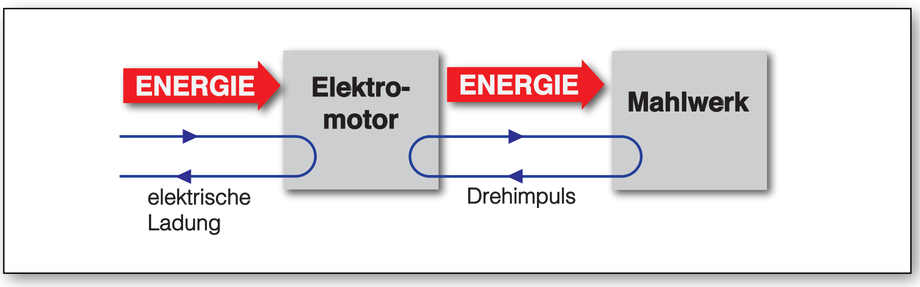


Abb. 5.7
Flussdiagramm der Kaffeemühle von Abb. 5.6

Abb. 5.8 zeigt das Flussdiagramm eines Wasserkraftwerks. Der Generator wird durch eine Wasserturbine angetrieben.

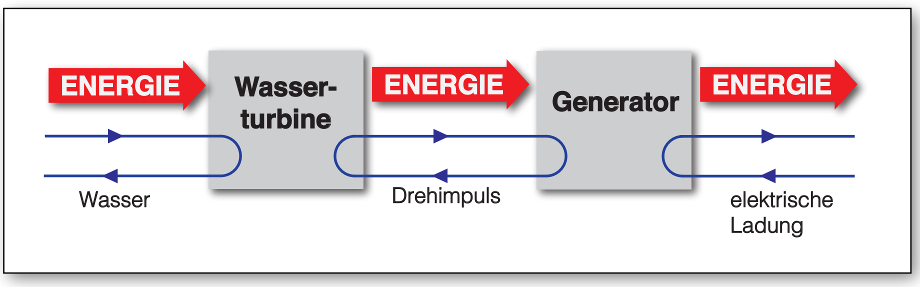


Abb. 5.8
Flussdiagramm eines Wasserkraftwerks

In beiden Fällen fließt der Drehimpuls in einem geschlossenen Stromkreis.

Der Zusammenhang zwischen Energiestrom P und Drehimpulsstrom M ist von derselben Art wie der zwischen Energiestrom und Impulsstrom (oder Energiestrom und elektrischem Strom):

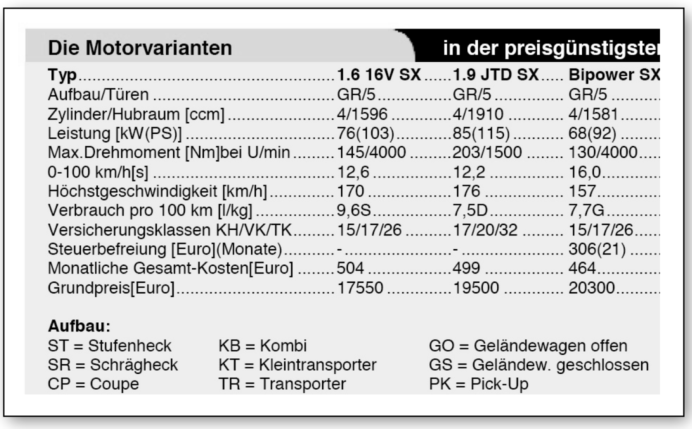
$P = \omega \cdot M.$

Überträgt man Energie mit einer rotierenden Welle (mit dem Energieträger Drehimpuls), so ist die Energiestromstärke proportional zur Drehimpulsstromstärke und zur Winkelgeschwindigkeit, mit der sich die Welle dreht.

Aufgaben

1. Das Rheinkraftwerk Iffezheim bei Baden-Baden hat vier Wasserturbinen mit je einem Generator. Wir betrachten ein solches Aggregat. Eine Turbine liefert an ihren Generator einen Energiestrom von 27 MW. Die Welle, die die Turbine mit dem Generator verbindet, dreht sich mit 100 Umdrehungen pro Minute. Wie groß ist der Drehimpulsstrom in der Welle?

2. Abb. 5.9 zeigt das Datenblatt eines Autos. Welchen Energiestrom (= Leistung) liefert einer der Motoren wenn sein Drehimpulsstrom maximal ist (maximales Drehmoment)? Vergleiche mit dem im Datenblatt angegebenen maximalen Energiestrom? Woher könnte der Unterschied kommen?



Die Motorvarianten in der preisgünstigste[n]

Typ	1.6 16V SX	1.9 JTD SX	Bipower SX
Aufbau/Türen	GR/5	GR/5	GR/5
Zylinder/Hubraum [ccm]	4/1596	4/1910	4/1581
Leistung [kW(PS)]	76(103)	85(115)	68(92)
Max.Drehmoment [Nm]bei U/min	145/4000	203/1500	130/4000
0-100 km/h[s]	12,6	12,2	16,0
Höchstgeschwindigkeit [km/h]	170	176	157
Verbrauch pro 100 km [l/kg]	9,6S	7,5D	7,7G
Versicherungsklassen KH/VK/TK	15/17/26	17/20/32	15/17/26
Steuerbefreiung [Euro](Monate)	-	-	306(21)
Monatliche Gesamt-Kosten[Euro]	504	499	464
Grundpreis[Euro]	17550	19500	20300

Aufbau:
ST = Stufenheck KB = Kombi GO = Geländewagen offen
SR = Schrägheck KT = Kleintransporter GS = Geländew. geschlossen
CP = Coupe TR = Transporter PK = Pick-Up

Abb. 5.9
Zu Aufgabe **2**

5.4 Mechanische Energiespeicher

a) Elastisch verformte Körper als Energiespeicher

Wir spannen eine lange, starke Feder, Abb. 5.10. Das ist anstrengend, denn dazu wird Energie gebraucht.

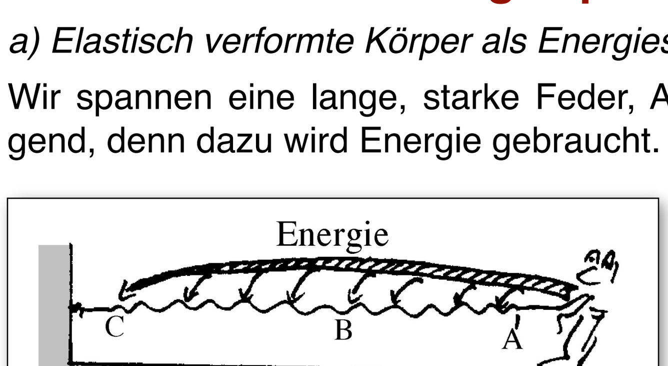


Abb. 5.10
Beim Spannen der Feder fließt über das rechte Ende Energie in die Feder hinein.

Wir betrachten das rechte Ende der Feder (die Stelle A in Abb. 5.10). Dieses Federende steht unter mechanischer Spannung, d.h. in ihm fließt ein Impulsstrom F, und es bewegt sich mit einer Geschwindigkeit v. Nach unserer Formel

$$P = v \cdot F$$

fließt in ihm auch ein Energiestrom. Wir betrachten nun das linke Ende der Feder (die Stelle C). Der Impulsstrom ist hier derselbe wie bei A. Da sich C aber nicht bewegt, fließt hier kein Energiestrom. Die Energie, die bei A in die Feder hineinfließt, kommt bei C nicht wieder heraus. Sie wird in der Feder gespeichert.

Wir können die Ströme noch an anderen Stellen der Feder prüfen, z.B. bei B in der Mitte der Feder. Der Impulsstrom ist hier wieder derselbe wie bei A und bei C. Die Geschwindigkeit der Federmitte ist halb so groß wie die von Punkt A. Deshalb ist auch der Energiestrom nur noch halb so groß wie der, der bei A in die Feder hineinfließt. Das ist einleuchtend: Die Hälfte der Energie wird in der rechten Hälfte der Feder gespeichert, und der Rest fließt weiter in die linke Federhälfte. Man kann diese Überlegung noch weiterführen: In jedem Drittel der Feder wird gerade ein Drittel der Energie gespeichert, in jedem Viertel der Feder wird ein Viertel der Energie gespeichert usw. Oder kurz: Die Energie verteilt sich gleichmäßig auf die gesamte Länge der Feder.

Wenn man eine Feder zusammendrücken kann, ohne dass sie seitlich ausweicht, kann man auch auf diese Art Energie in ihr speichern.

Diese Überlegungen gelten nicht nur für Federn, sondern auch für beliebige andere elastisch verformbare Gegenstände: Ein auseinander gezogener Expander enthält ebenso Energie wie eine gespannte Steinschleuder, ein verbogenes Sprungbrett oder ein eingedrückter Fußball.

Von einem Energiespeicher möchte man natürlich gern wissen, wie viel Energie in ihm enthalten ist. Wir wollen berechnen, wie für eine Feder die gespeicherte Energiemenge von der Verlängerung (oder Verkürzung) abhängt. Das Problem ist schwieriger als es zunächst scheinen mag.

Wir verlängern eine Feder, indem wir das eine Ende mit konstanter Geschwindigkeit v bewegen.

Wir kennen den Zusammenhang:

$$P = v \cdot F \qquad (1)$$

Man könnte denken, dass sich damit die gespeicherte Energie E_{Feder} so berechnen lässt: Man multipliziert den Energiestrom (die Joules pro Sekunde) mit der Zeit t_0, während der er geflossen ist, also

$$E_{Feder} = P \cdot t_0. \qquad (2)$$

Das führt aber nur dann zum richtigen Ergebnis, wenn die Energie gleichmäßig fließt, wenn sich also der Energiestrom mit der Zeit nicht ändert. Leider trifft das bei uns nicht zu; der Impulsstrom F in Gleichung (1) ist nicht konstant. Wir können aber Gleichung (2) trotzdem anwenden, wenn wir den zeitlichen Mittelwert von P einsetzen:

$$E_{Feder} = \bar{P} \cdot t_0 \qquad (3)$$

Wir müssen uns also den Mittelwert des Energiestroms beschaffen.

Wir gehen dazu aus von Gleichung (1). Wir ersetzen F mit Hilfe von

$$F = D \cdot s$$

(siehe Abschnitt 2.13) und erhalten:

$$P = v \cdot D \cdot s.$$

Diese Gleichung sagt uns, dass der Energiestrom um so größer ist, je stärker die Feder gedehnt wurde. Da wir an der Feder mit konstanter Geschwindigkeit ziehen, können wir s durch $v \cdot t$ ersetzen:

$$P = v \cdot D \cdot v \cdot t = D \cdot v^2 \cdot t\,.$$

Der Energiestrom nimmt also linear mit der Zeit zu, Abb. 5.11.

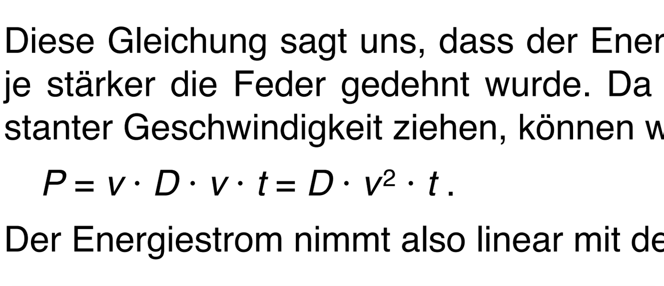


Abb. 5.11
Der Energiestrom nimmt vom Zeitpunkt $t = 0$ bis zum Zeitpunkt t_0 von null auf P_0 zu. Der mittlere Energiestrom in diesem Zeitintervall ist gleich dem Energiestrom zum Zeitpunkt $t_0/2$. Die Abweichung vorher nach unten wird durch die Abweichung danach nach oben ausgeglichen.

Aus diesem Graphen kann man den mittleren Energiestrom ablesen: Er ist gleich dem Energiestrom zum Zeitpunkt $t_0/2$, also

$$\bar{P} = \frac{D}{2} v^2 t_0.$$

Eingesetzt in Gleichung (3) folgt:

$$E_{Feder} = \frac{D}{2} v^2 t_0^{\,2}. \qquad (4)$$

Nun ist $v \cdot t_0 = x_0$, also gleich der Verlängerung der Feder. Wenn wir das in Gleichung (4) einsetzen, erhalten wir den gesuchten Zusammenhang:

$$E_{Feder} = \frac{D}{2} s_0^{\,2}.$$

Den Index „0“ brauchen wir jetzt nicht mehr, da keine Verwechslungsgefahr besteht:

> Wenn man eine Feder spannt, nimmt ihre Energie zu um
>
> $$E_{Feder} = \frac{D}{2} s^2.$$
>
> Wenn die Feder entspannt wird, kommt die Energie wieder heraus.

Wir hatten angenommen, dass die Feder verlängert worden ist, um Energie zu speichern. Falls sich eine Feder zusammendrücken lässt, gilt für sie aber dieselbe Gleichung. s ist dann das Wegstück, um das die Feder verkürzt wird.

Obwohl die Herleitung mühsam war, ist das Ergebnis einfach und auch einleuchtend. Wenn du die Gleichung vergessen hast, kannst du dir das Wesentliche von ihr durch geschicktes Raten wieder beschaffen. Zunächst: Wovon hängt die in einer Feder gespeicherte Energie überhaupt ab? Erstens von der Feder selbst, und das heißt von der Federkonstante D. Und zweitens davon, wie stark sie verlängert oder verkürzt wurde, also von s. Bei gegebener Verlängerung s enthält eine harte Feder mehr Energie als eine weiche. Dafür sorgt das D in der Formel. Und es ist auch klar, dass die Feder um so mehr Energie enthält, je mehr man sie verlängert hat, daher das s. Warum steht das s aber im Quadrat? Auch dafür gibt es ein gutes Argument: Die Feder speichert ja positive Energie (negative Energie gibt es nicht), egal ob man sie verlängert oder verkürzt, also egal ob s positiv oder negativ ist. Da s im Quadrat steht, kommt sowohl beim Stauchen als auch beim Dehnen der Feder eine positive Energie heraus.

Das einzige an der Formel, was man nicht so leicht erraten kann, ist der Faktor 1/2. Den musst du dir also merken.

Du wirst später noch mehrere andere Gleichungen kennen lernen, die diese Struktur haben.

Zum Schluss sei noch einmal daran erinnert: Die Energie, die man nach unserer Gleichung berechnet, ist nicht die ganze Energie der Feder. Es ist nur ein winziger Anteil; nämlich der, den man beim Spannen hineinsteckt, und beim Entspannen wieder herausbekommt.

b) Bewegte Körper als Energiespeicher

Wir laden einen gut gelagerten Wagen mit Impuls, wie wir es schon oft gemacht haben, Abb. 5.12. Allerdings wissen wir jetzt, dass in dem Seil nicht nur Impuls, sondern auch Energie fließt. Die Energie kann nun den Wagen genauso wenig verlassen wie der Impuls. Beim Ziehen wird demnach im Wagen sowohl Impuls als auch Energie angehäuft.

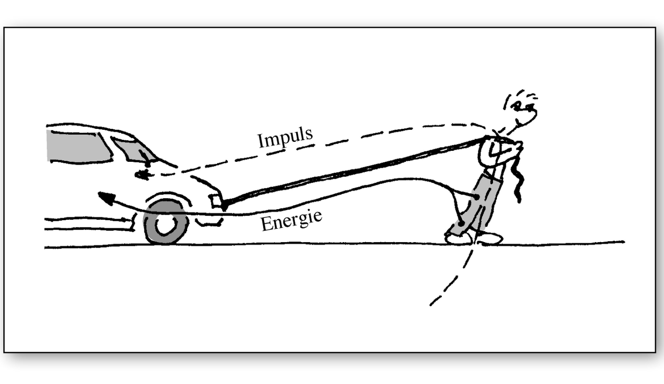


Abb. 5.12
Das Auto wird mit Impuls und Energie geladen.

Man nennt den Energiebetrag, den ein Körper auf Grund seiner Bewegung enthält, *kinetische Energie*.

Lässt man einen sich bewegenden Wagen ausrollen, so fließt sein Impuls in die Erde ab. Die Energie nimmt einen anderen Weg. Sie wird zur Entropieerzeugung verwendet (oder besser: vergeudet). Entropie wird überall dort produziert, wo Reibung stattfindet. Die Energie verteilt sich dabei in der Umgebung: zum Teil in der Erde, zum Teil aber auch im Wagen und in der Luft.

Wieder gibt es eine einfache Gleichung, mit der man die gespeicherte (kinetische) Energie berechnen kann. Die Herleitung ist ähnlich wie bei der gespannten Feder. Wir wollen sie übergehen. Das Ergebnis lässt sich auch fast erraten.

> Wenn man einen Körper mit Impuls lädt, nimmt seine Energie zu um
>
> $$E_{kin} = \frac{m}{2} v^2.$$
>
> Wenn der Körper den Impuls wieder abgibt, kommt auch die Energie wieder heraus.

Dadurch dass die Geschwindigkeit im Quadrat steht, ist garantiert, dass die Energie immer positiv ist. Mit Hilfe von $p = m \cdot v$ können wir die Geschwindigkeit durch den Impuls ausdrücken und erhalten:

$$E_{kin} = \frac{p^2}{2m}.$$

c) Rotierende Körper als Energiespeicher

Ein Schwungrad wird mit Drehimpuls geladen, Abb. 5.13. Durch die Welle fließt aber nicht nur Drehimpuls, sondern auch Energie. Sowohl der Drehimpuls als auch die Energie werden im Schwungrad gespeichert.

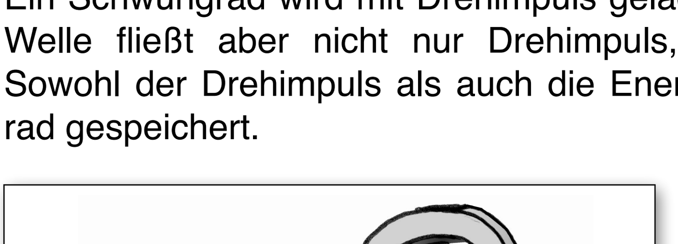


Abb. 5.13
Im Schwungrad wird außer Drehimpuls auch Energie gespeichert.

Die im Schwungrad gespeicherte Energie E_{rot} lässt sich aus Trägheitsmoment und Winkelgeschwindigkeit berechnen. Die Formel erhält man ganz einfach, indem man in

$$E_{kin} = \frac{m}{2} v^2$$

die Masse durch das Trägheitsmoment ersetzt und die Geschwindigkeit durch die Winkelgeschwindigkeit.

> Wenn man einen Körper mit Drehimpuls lädt, nimmt seine Energie zu um
>
> $$E_{rot} = \frac{J}{2} \omega^2$$
>
> Wenn der Körper den Drehimpuls wieder abgibt, kommt auch die Energie wieder heraus.

Mit Hilfe von $L = J \cdot \omega$ können wir die Winkelgeschwindigkeit durch den Drehimpuls ausdrücken und erhalten:

$$E_{rot} = \frac{L^2}{2J}$$

Aufgaben

1. Ein 30 kg schwerer Wagen wird mit Impuls geladen. Es fließt 6 s lang ein Impulsstrom von 20 N. Es gibt keine Reibungsverluste. Welche kinetische Energie hat der Wagen am Ende?

2. Ein 200 g schwerer Wagen wird durch eine sich entspannende Feder beschleunigt. Er bekommt eine Geschwindigkeit von 0,8 m/s. Die Feder hat sich von 10 cm auf ihre Normallänge von 15 cm verlängert. Wie groß ist die Federkonstante?

3. Ein Gleiter auf der Luftkissenbahn stößt gegen einen doppelt so schweren Gleiter, der sich am Anfang nicht bewegt. Der Stoß ist vollkommen unelastisch, d.h. die Gleiter hängen nach dem Stoß aneinander. Vergleiche die kinetischen Energien vor und nach dem Stoß. Erkläre.

4. Ein Wagen (m = 20 kg) fährt mit v = 0,5 m/s in x-Richtung gegen einen Federpuffer und prallt zurück.

a) Welchen Impuls hat er vor dem Stoß und nach dem Stoß?
b) Wie ist seine kinetische Energie vor und nach dem Stoß?
c) Wie stark wird die Feder zusammengedrückt (Federkonstante D = 60 N/m)?
d) Wie groß ist die Geschwindigkeit des Wagens, wenn die Feder gerade zur Hälfte zusammengedrückt ist?

5. Ein Gleiter auf der Luftkissenbahn (Masse gleich 300 g) hängt an einer Feder (D = 7,5 N/m), Abb. 5.14. Wenn man den Gleiter aus der Ruhelage herausbewegt und dann loslässt, führt er eine Schwingung aus. Beschreibe den Weg von Energie und Impuls während des Schwingungsvorgangs.

Beim Durchgang durch die „Ruhelage“ (die Feder ist entspannt) hat der Gleiter eine Geschwindigkeit von 0,5 m/s. Wie weit schwingt der Gleiter nach rechts und links?

6. Ein Fahrzeug, Masse m, Geschwindigkeitsbetrag v, rollt (ohne Reibung) um eine 90°-Kurve. Bilanziere Energie und Impuls. (Wie viel geht hinein, wie viel kommt heraus?)

7. Eine Dampfmaschine hat ein Schwungrad mit einem Durchmesser von 2,2 m und einer Masse von 1,8 Tonnen. Nimm an, dass sich die ganze Masse in dem äußeren Ring befindet. Die Maschine läuft mit 2 Umdrehungen pro Sekunde. Wie viel Drehimpuls und wie viel Energie ist im Schwungrad gespeichert?

8. Zwei Schwungräder A und B haben je ein Trägheitsmoment von 2 kgm^2. Rad A dreht sich mit 2 Umdrehungen pro Sekunde, Rad B dreht sich zunächst nicht.

(a) Wie viel Drehimpuls hat Rad A?
(b) Wie viel Energie hat A auf Grund der Drehbewegung?

Die Räder werden mit Hilfe einer Kupplung miteinander verbunden.
(c) Wie viel Drehimpuls hat jedes der beiden Räder?
(d) Wie viel Energie hat jedes der beiden Räder? Wie viel Energie haben beide zusammen?
(e) Kommentiere das Ergebnis.

9. Für Fusionsexperimente am Max-Planck-Institut für Plasmaphysik in Garching (bei München) wird für kurze Zeitintervalle ein sehr großer Strom elektrizitätsgetragener Energie gebraucht. Der benötigte Energiestrom ist so groß, dass das normale Netz nicht ausreicht. Man verwendet daher große Schwungräder, die man langsam (mit einem niedrigen Energiestrom) mit Hilfe eines Elektromotors auflädt. Die ganze aufgesammelte Energie kann dann in wenigen Sekunden über einen Generator abgegeben werden.
Ein solches Schwungrad liefert 10 Sekunden lang einen Energiestrom von 150 MW. Wenn es geladen ist, dreht es sich mit 1600 Umdrehungen pro Minute. Wie groß ist sein Trägheitsmoment?

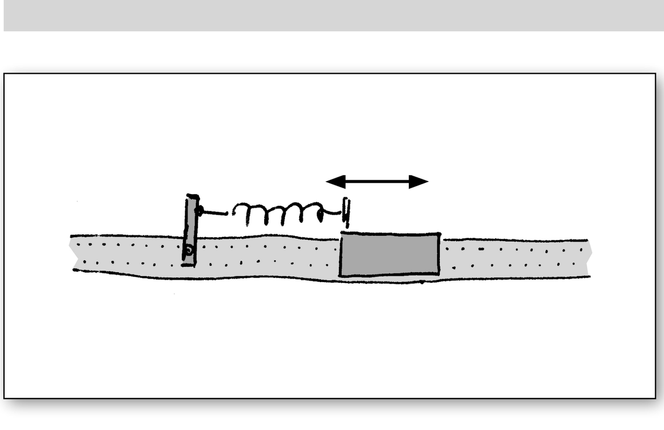


Abb. 5.14
Zu Aufgabe **5**

5.5 Das Gravitationsfeld als Energiespeicher – das Gravitationspotenzial

Ein schwerer Gegenstand wird nach oben gezogen, Abb. 5.15. In dem Seil fließt außer Impuls noch Energie. Der Impuls kommt, wie wir wissen, aus der Erde über das Gravitationsfeld in den Körper. Man kann sich das Feld als eine unsichtbare Feder vorstellen, die an dem Körper zieht. Genauso, wie man beim Spannen einer Feder Energie in der Feder speichert, so wird Energie im Gravitationsfeld gespeichert, wenn man einen Gegenstand hebt. Lässt man den Gegenstand wieder herunter, so bekommt man die Energie aus dem Feld zurück.

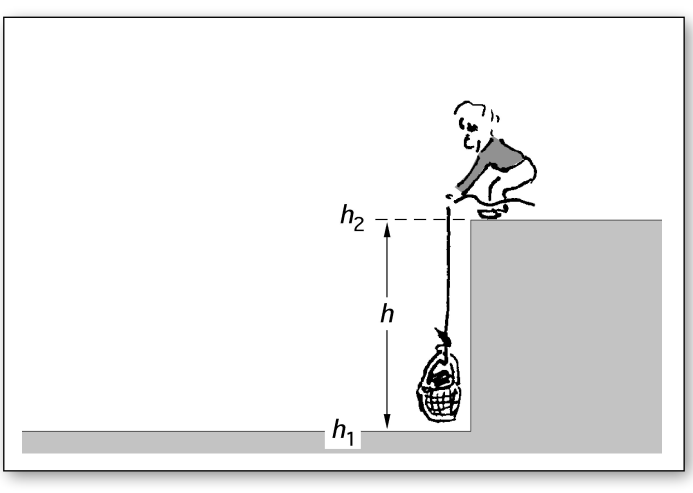


Abb. 5.15
Beim Hochziehen des Korbes wird Energie im Gravitationsfeld gespeichert.

Zum Heben eines schweren Gegenstandes braucht man mehr Energie als zum Heben eines leichten. Man speichert also im Feld um so mehr Energie, je größer die Masse des Gegenstandes ist. Und man braucht um so mehr Energie, je größer die Höhendifferenz $h = h_2 - h_1$ ist, um die man ihn hebt.

Wir berechnen die Energie E_{grav}, die im Gravitationsfeld gespeichert wird, als Funktion von m und h. Wir gehen wieder aus von der Gleichung

$$P = v \cdot F$$

für den Energiestrom. Da wir den Körper mit konstanter Geschwindigkeit nach oben bewegen, können wir setzen:

$$v = \frac{h}{t_0}.$$

t_0 ist die Zeit, die der ganze Vorgang dauert. Für den Impulsstrom setzen wir:

$$F = m \cdot g.$$

Der Impulsstrom ist zeitlich konstant. Wir brauchen also nicht den Mittelwert zu berechnen, wie im Fall der Feder. Der Energiestrom während des Ziehens ergibt sich damit zu:

$$P = v \cdot F = \frac{h}{t_0} \cdot m \cdot g.$$

Die gespeicherte Energie bekommen wir als Energiestromstärke mal Zeit:

$$E_{grav} = P \cdot t_0,$$

also

$$E_{grav} = m \cdot g \cdot h = m \cdot g \cdot (h_2 - h_1).$$

> Wenn die Höhe eines Körpers auf der Erde zunimmt, wird Energie im Gravitationsfeld gespeichert:
> $E_{grav} = m \cdot g \cdot (h_2 - h_1)$.
> Nimmt die Höhe des Körpers wieder ab, so bekommt man die Energie zurück.

Wir führen eine neue Größe ein, die die Beschreibung vereinfacht, das Gravitationspotenzial ψ (psi):

$$\psi = g \cdot h.$$

Das Gravitationspotenzial hat auf der Erde weiter oben einen größeren Wert als weiter unten. Der Potenzialunterschied zwischen zwei Orten, die sich in der Höhe um 2 m unterscheiden ist auf der Erde größer als auf dem Mond.

Eine Differenz des Gravitationspotenzials kann man sich vorstellen als Antrieb für einen Massenstrom. Alle Körper fallen von oben nach unten, vom hohen zum niedrigen Gravitationspotenzial. Mit dem Fahrrad rollt man ohne zu treten den Berg hinunter. Wasser fließt (weil es eine Masse hat) von Stellen hohen zu Stellen niedrigen Gravitationspotenzials. Alle diese Bewegungen oder Ströme kommen zustande, weil der entsprechende Körper oder die Flüssigkeit eine Masse hat.

> Eine Differenz des Gravitationspotenzials ist ein Antrieb für einen Massenstrom.

Wir können jetzt die Energie, die im Gravitationsfeld gespeichert wird, kürzer schreiben:

> Bringt man einen Körper vom Gravitationspotenzial ψ_1 zum höheren Potenzial ψ_2, so wird die Energie:
> $E_{grav} = (\psi_2 - \psi_1) \cdot m$
> im Gravitationsfeld gespeichert.

Die Energie des Gravitationsfeldes wird in Wasserkraftwerken nutzbar gemacht, Abb. 5.16.

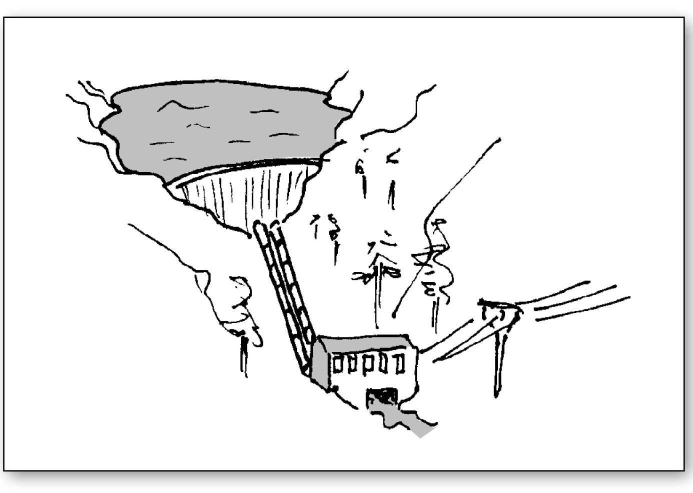


Abb. 5.16
Wasserkraftwerk. Das Wasser fließt in den Rohren hinunter und nimmt dabei Energie aus dem Gravitationsfeld auf.

An hohen Stellen eines Gebirges wird Wasser von Bächen und Flüssen gesammelt und durch Rohre nach unten geleitet. Beim Hinunterfließen nimmt das Wasser Energie aus dem Schwerefeld auf. Es strömt dann durch die Turbine des Kraftwerks und gibt hier seine Energie wieder ab. Die Turbine treibt über eine Welle einen Generator an, d.h. die Energie geht mit dem Drehimpuls von der Turbine zum Generator.

Ein besondere Art von Wasserkraftwerken sind die Pumpspeicherwerke. Ein Pumpspeicherwerk dient als Energiespeicher für das elektrische Netz. Es kann Energie aus dem Netz aufnehmen und wieder an das Netz abgeben. Solche Anlagen werden gebraucht, da die meisten anderen Kraftwerke nicht auf die unterschiedliche Nachfrage reagieren können. Kohlekraftwerke, Kernkraftwerke und Laufwasserkraftwerke (Wasserkraftwerke, die das Gefälle eines Flusses ausnutzen), können ihre Energieabgabe nur sehr langsam oder gar nicht ändern. Windkraftwerke liefern Energie wenn der Wind weht, und ihre Energieabgabe stimmt auch nicht mit der Nachfrage überein. Es wird daher ein Speicher gebraucht, der elektrizitätsgetragene Energie schnell aufnehmen und schnell wieder abgeben kann – ähnlich wie eine Autobatterie, nur sehr viel größer.

Zu einem Pumpspeicherwerk gehören zwei große Wasserreservoire auf unterschiedlicher Höhe. Wenn elektrizitätsgetragene Energie gebraucht wird (wenn die Energie teuer ist), lässt man Wasser vom hohen Reservoir über eine Turbine ins niedrige fließen. Die Turbine treibt einen Generator an. Wenn Energie im Netz übrig ist (wenn die Energie billig ist), lässt man den Generator als Elektromotor arbeiten und die Turbine als Pumpe, und man pumpt das Wasser wieder hinauf.

Aufgaben

1. Zeichne das Flussbild eines Pumpspeicherwerks für seine beiden Funktionsarten.

Das Pumpspeicherwerk Goldisthal (Thüringisches Schiefergebirge) hat ein „Oberbecken“ auf 880 Höhe über NN und ein „Unterbecken“ auf 550 m. Wie groß ist das Gravitationspotenzial oben und unten (bezogen auf NN)? Die nutzbare Wassermenge beträgt 12 Millionen m^3. Wie viel Energie kann gespeichert werden?

Die Generatoren können einen Energiestrom von maximal 1060 MW liefern. Wie lange reicht der Energievorrat?

2. Das Itaipú-Wasserkraftwerk am Paraná-Fluss liegt auf der Grenze zwischen Brasilien und Paraguay. Es ist das größte Wasserkraftwerk der Welt. Es hat 20 Turbinen und 20 Generatoren. Der Höhenunterschied zwischen Eingang und Ausgang des Wassers beträgt 120 m, der Wasserstrom ist durchschnittlich 12 000 m^3/s (also 12 mal der des Rheins bei Karlsruhe). Wie viel Energie liefert das Kraftwerk?

3. Das Wasser tritt aus der Düse eines Springbrunnens mit einer Geschwindigkeit von 5 m/s aus. Wie hoch spritzt es?

4. Ein Stein wird senkrecht nach oben geworfen. Skizziere den Weg von Energie und Impuls
(a) während der Stein abgeworfen wird;
(b) während er hinauffliegt;
(c) während er wieder herunterkommt.

5. Ein Hohlzylinder (r = 10 cm, m = 2 kg) wird angeschubst, so dass er mit einer Geschwindigkeit von 0,8 m/s auf einer zunächst ebenen Fläche rollt, Abb. 5.17. Die Fläche geht dann über in einen ansteigenden Teil. Wie hoch rollt der Zylinder?

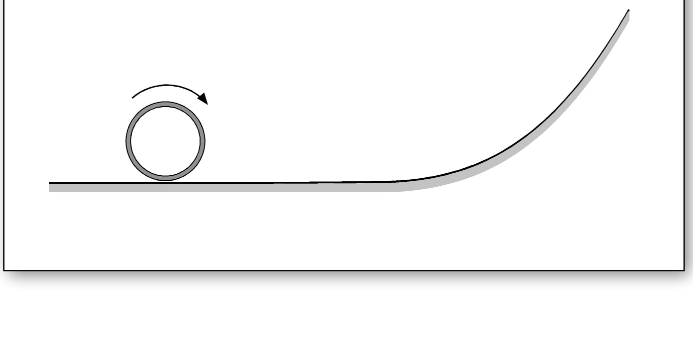


Abb. 5.17
Zu Aufgabe **5**

5.6 Flaschenzug, Zahnradgetriebe, Ketten- und Riemenantrieb

Der Flaschenzug

Um eine Last zu heben, benutzt man oft einen Flaschenzug: eine Anordnung aus Seilen und Umlenkrollen. Abbildung 5.18 zeigt einen besonders einfachen Flaschenzug. Welche Vorteile bringt das?

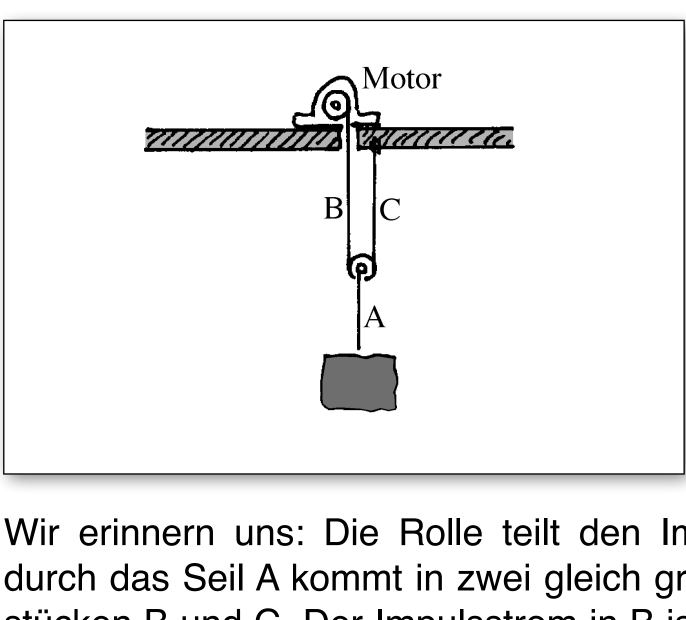


Abb. 5.18
Einfacher Flaschenzug

Wir erinnern uns: Die Rolle teilt den Impulsstrom, der von unten durch das Seil A kommt in zwei gleich große Teilströme in den Seilstücken B und C. Der Impulsstrom in B ist also nur halb so groß wie der in A.

Nehmen wir an, die Masse der Last sei 200 kg. Der Impulsstrom in A ist dann

$F_A = m \cdot g = 200 \text{ kg} \cdot 10 \text{ N/kg} = 2000 \text{ N}.$

Der in Seil B ergibt sich zu

$F_B = F_A/2 = 1000 \text{ N}.$

Der Motor (die „Impulspumpe") braucht also nur einen Impulsstrom von 1000 N zu erzeugen, und nicht 2000 N, wie es ohne Umlenkrolle der Fall wäre. Man hat fast das Gefühl, man bekäme hier etwas umsonst. Dass das nicht so ist, sehen wir, wenn wir die Energieströme

$P = v \cdot F$

in den Seilstücken A und B vergleichen. Während der Impulsstrom in B halb so groß ist, wie der in A, ist die Geschwindigkeit von B doppelt so groß wie die von A:

$F_B = F_A/2$

$v_B = 2v_A$.

Damit folgt:

$v_A \cdot F_A = v_B \cdot F_B$.

Die Energieströme in A und in B sind also gleich. Das hätte man auch so sehen können: Durch Seil C fließt keine Energie, da $v_C = 0$ ist. Also muss die ganze Energie, die über Seil B vom Motor kommt, durch Seil A weiter zur Last fließen. Wir können also schließen:

> *Flaschenzug:*
> Der eine Faktor in der Gleichung $P = v \cdot F$ verändert sich auf Kosten des anderen.

Vielleicht kommt dir dieses Ergebnis bekannt vor. Eine ähnliche Situation war uns schon beim elektrischen Transformator begegnet. Für einen elektrischen Energietransport gilt die Gleichung

$P = U \cdot I$

(Energiestrom gleich elektrische Spannung mal elektrischer Strom.) Der Energiestrom, der in den Transformator mit dem Energieträger elektrische Ladung hineinfließt (Index A), ist gleich dem herausfließenden (Index B)

$U_A \cdot I_A = U_B \cdot I_B$.

Ein Flaschenzug kann also auch als „Impulsstromtransformator" aufgefasst werden.

Zahnradgetriebe

Abb. 5.19 zeigt ein Foto eines einfachen Zahnradgetriebes.

Abb. 5.19
Zahnradgetriebe

In Abb. 5.20 ist ein solches Getriebe schematisch dargestellt. Die Energie kommt über die linke Welle (A) und verlässt das Getriebe über die rechte (B). Der Energieträger der ankommenden und der wegfließenden Energie ist der Drehimpuls. Der Zusammenhang zwischen Energiestrom und Drehimpulsstrom ist

$P = \omega \cdot M$.

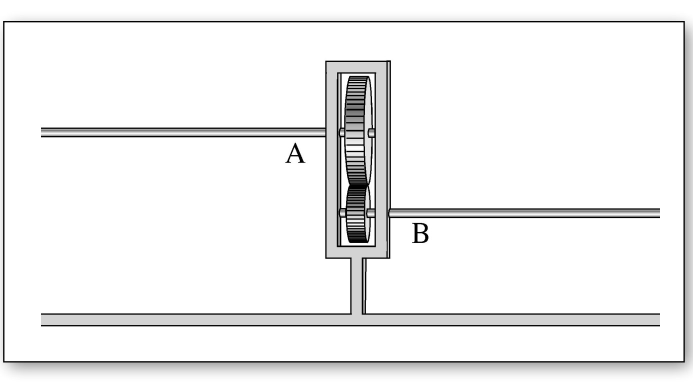


Abb. 5.20
Einfaches Zahnradgetriebe

Da alle Energie, die über A ankommt, auch über B weggeht, muss gelten:

$\omega_A \cdot M_A = \omega_B \cdot M_B$.

Wir dividieren noch beide Seiten der Gleichung durch ω_A und M_B

$$\frac{M_A}{M_B} = \frac{\omega_B}{\omega_A}. \qquad (5)$$

Das Verhältnis ω_A/ω_B der Winkelgeschwindigkeiten, das Übersetzungsverhältnis, lässt sich leicht feststellen: Wenn Zahnrad A doppelt so viele Zähne hat wie Zahnrad B, so dreht sich Zahnrad B doppelt so schnell wie A. Es gilt also

$$\frac{M_A}{M_B} = \frac{z_A}{z_B}.$$

Hier sind z_A und z_B die Anzahl der Zähne der beiden Zahnräder.

Wir fassen zusammen.

> *Getriebe:*
> Der eine Faktor in der Gleichung $P = \omega \cdot M$ verändert sich auf Kosten des anderen.

Ein Getriebe kann als „Drehimpulsstromtransformator" aufgefasst werden.

Beim Wechselgetriebe des Autos, der „Gangschaltung", kann man das Übersetzungsverhältnis ändern.

Wir wollen uns beim Getriebe den Verlauf der Drehimpulsströme noch etwas genauer ansehen, Abb. 5.21.

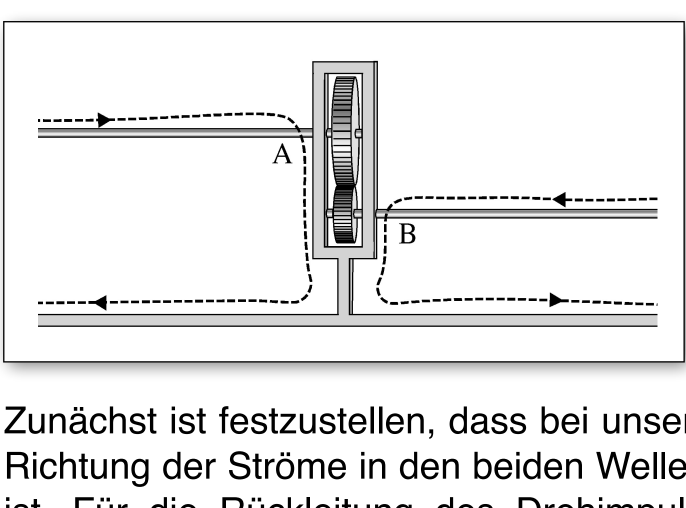


Abb. 5.21
Der Drehimpuls in der Wellen A und B fließt in entgegengesetzte Richtungen.

Zunächst ist festzustellen, dass bei unserem einfachen Getriebe die Richtung der Ströme in den beiden Wellen A und B entgegengesetzt ist. Für die Rückleitung des Drehimpulses sorgt wieder die Halterung, das Fundament oder das Chassis. Der Verlauf des Drehimpulsstroms innerhalb des Getriebes ist hier nur schematisch dargestellt. Der Strom läuft sowohl über die Zahnräder als auch über die senkrechten Halterungen.

Ketten- und Riemenantrieb

Den Kettenantrieb kennst du vom Fahrrad. Ein Riemenantrieb, Abb. 5.22, ist im Wesentlichen dasselbe, nur benutzt man statt der Kette aus Stahlgliedern ein flexibles Band, oft mit Zähnen versehen.

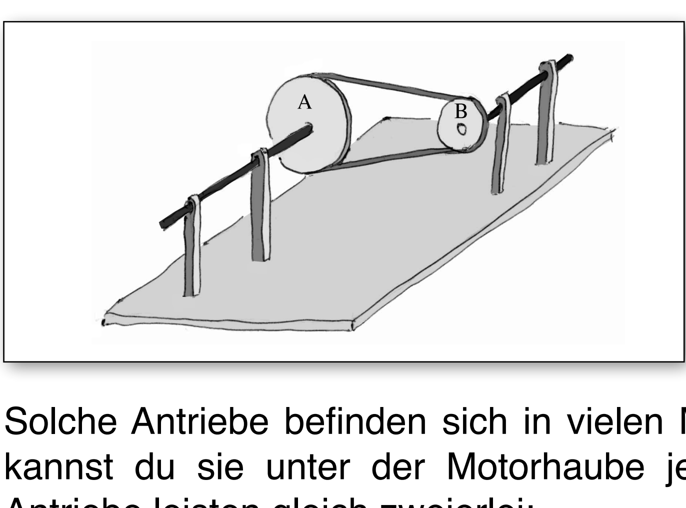


Abb. 5.22
Riemenantrieb. Rad B dreht sich schneller als Rad A.

Solche Antriebe befinden sich in vielen Maschinen. Unter anderem kannst du sie unter der Motorhaube jedes Autos finden. Solche Antriebe leisten gleich zweierlei:

- Sie transportieren Energie (mit dem Energieträger Impuls) von einem Ort A zu einem anderen B.
- Wenn die beiden Kettenräder (oder Riemenscheiben) verschiedene Durchmesser haben, wirken sie als Drehimpulstransformator.

Die Energie gelangt zu Rad A mit dem Energieträger Drehimpuls, und sie fließt von Rad B mit Drehimpuls weg.

Für die entsprechenden Stromstärken gilt wieder die Gleichung

$\omega_A \cdot M_A = \omega_B \cdot M_B$.

Bei einem Fahrrad mit Kettenschaltung kann man das Übersetzungsverhältnis ändern, Abb. 5.23.

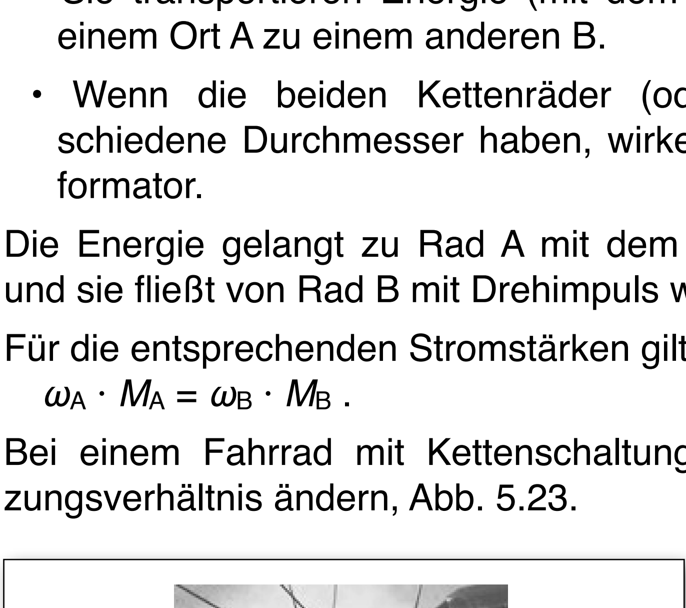


Abb. 5.23
Kettenschaltung beim Fahrrad

Aufgaben

1. Zeichne den Weg des Impulses für den Flaschenzug in Abb. 5.24 ein. Um welchen Faktor ist der Impulsstrom an der Stelle A kleiner als an der Stelle B?

2. Zeichne den Weg des Impulses für den Flaschenzug in Abb. 5.25 ein. Um welchen Faktor ist der Impulsstrom an der Stelle A kleiner als an der Stelle B?

3. Wie ist das Übersetzungsverhältnis für den Kettenantrieb deines Fahrrades? Falls das Fahrrad eine Kettenschaltung hat: Wie ist das Übersetzungsverhältnis für die verschiedenen Gänge? Falls es eine Nabenschaltung hat: Versuche die Übersetzungsverhältnisse der Nabenschaltung möglichst genau zu bestimmen.

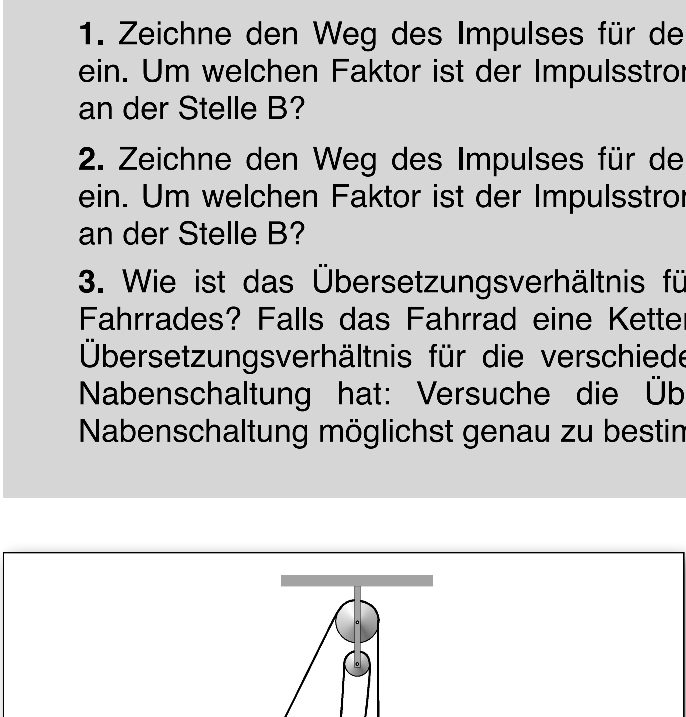


Abb. 5.24
Zu Aufgabe **1**

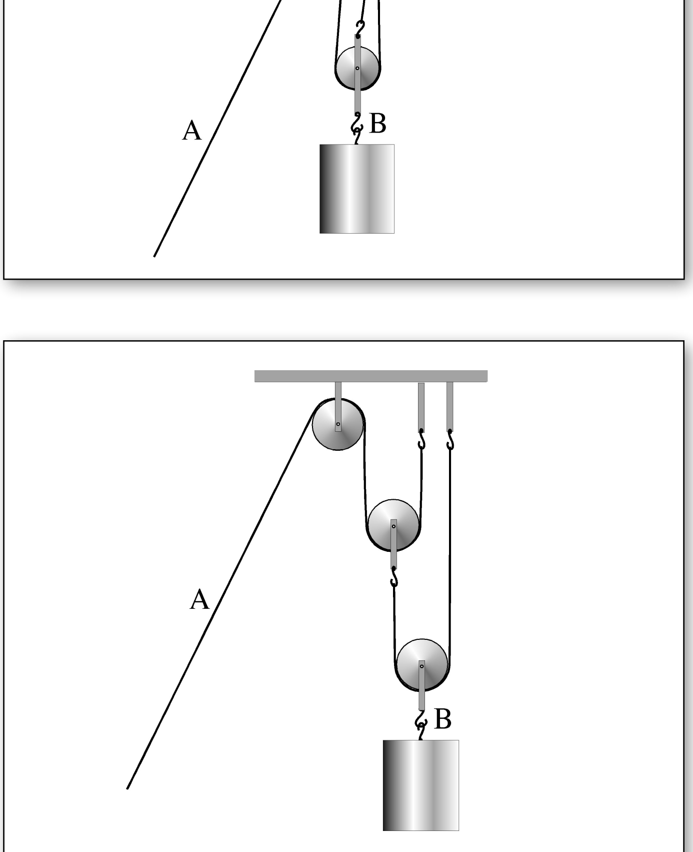


Abb. 5.25
Zu Aufgabe **2**

5.7 Reibung

Bei einem Reibungsvorgang fließt Impuls von einer Stelle höherer zu einer Stelle niedrigerer Geschwindigkeit. Die beiden „Stellen“ können auch zwei Punkte innerhalb einer Flüssigkeit oder eines Gases sein. Uns interessiert hier der Fall, dass es zwei Körper sind. Wir nennen sie A und B, Abb. 5.26.

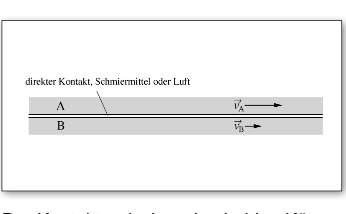


Abb. 5.26
Bei dem Reibungsvorgang fließt *x*-Impuls von Körper A zu Körper B. (Positive *x*-Richtung nach rechts)

Der Kontakt zwischen den beiden Körpern kann sehr unterschiedlich sein:

- Sie können sich direkt berühren. Beispiel: Du schiebst ein Buch über die Tischplatte oder einen Stuhl über den Fußboden.
- Zwischen A und B befindet sich ein Schmiermittel. Beispiel: Eine rotierende Achse in einem Lager. Ohne Schmierung läge Fall 1 vor. Das Schmiermittel wird benutzt, um die Reibung zu vermindern.
- Zwischen A und B befindet sich ein Gas, meist Luft. Beispiel: Die Luftreibung beim fahrenden Auto oder Fahrrad.

Bei einem Reibungsprozess scheint die Energiebilanz nicht zu stimmen. Es geht Energie verloren. Wir nennen die Geschwindigkeit des einen Körpers v_A, die des anderen v_B und die Impulsstromstärke, wie immer, F.

Der Impuls ist ein Energieträger. In Körper A, auf seinem Weg zur reibenden Fläche, trägt er den Energiestrom

$$P_A = v_A \cdot F.$$

In Körper B, wo er von der reibenden Fläche wieder wegfließt, trägt er den Energiestrom

$$P_B = v_B \cdot F.$$

Da $v_A > v_B$ ist, fließt mehr Energie zum Ort der Reibung hin als wieder weg. Was passiert mit der Differenz

$$P = P_A - P_B = (v_A - v_B) \cdot F\ ?$$

Bei jedem Reibungsvorgang wird Entropie erzeugt (die wir als Wärme wahrnehmen). Auch die Entropie ist ein Energieträger. Die bei der Reibung erzeugte Entropie trägt zwangsläufig Energie mit sich weg. Der entsprechende Energiestrom lässt sich schreiben:

$$P = T \cdot I_S.$$

Hier ist T die absolute (in Kelvin gemessene) Temperatur und I_S die Entropiestromstärke.

Für den Reibungsvorgang ist also:

$$T \cdot I_S = (v_A - v_B) \cdot F = \Delta v \cdot F.$$

Wir haben hier $(v_A - v_B)$ durch Δv abgekürzt.

> Bei einem Reibungsvorgang wird Entropie erzeugt. Mit der erzeugten Entropie verschwindet auch Energie in die Umgebung.

Reibung ist ein Vorgang, der oft unerwünscht ist – wegen des mit ihm verbundenen Energieverlustes. Die Luftreibung von Autos oder die Reibung in den Lagern einer rotierenden Welle würde man gern loswerden.

Manche technischen Vorrichtungen beruhen aber gerade auf der Reibung. Hier wird sie also gebraucht. Beispiele sind Bremse, Kupplung und Stoßdämpfer von Autos.

Noch einmal: Bei einem Reibungsvorgang fließt Impuls von einem Körper A zu einem Körper B. A und B haben verschiedene Geschwindigkeiten. Für den Reibungsvorgang kommt es nicht auf die Absolutwerte der beiden Geschwindigkeiten an, sondern nur auf die Geschwindigkeitsdifferenz Δv. Die Stärke F des Impulsstroms zwischen A und B hängt also von Δv ab.

Je nachdem, wie die Körper aneinander reiben, ist dieser Zusammenhang ein anderer. Um die verschiedenen Reibungsvorgänge zu verstehen, müssen wir uns mit den verschiedenen Δv-F-Zusammenhängen befassen. Wir werden F über Δv in einem Diagramm darstellen. Den entsprechenden Graphen nennt man die Kennlinie des Reibungsvorgangs.

Reibungskennlinien können die verschiedensten Formen haben. Man kann aber drei Grundmuster ausmachen.

Viskose Reibung

Wenn sich zwischen den Körpern A und B ein zähflüssiges Medium befindet, z.B. Schmieröl, Abb. 5.27, so ist die Kennlinie besonders einfach.

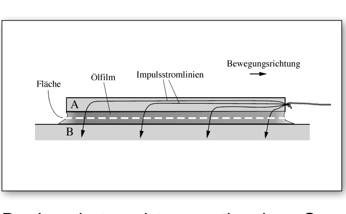


Abb. 5.27
Zwischen der Platte A und der Unterlage B befindet sich ein Ölfilm. A wird nach rechts bewegt. Durch den Ölfilm fließt ein Strom von *x*-Impuls von oben nach unten.

Der Impulsstrom ist proportional zur Geschwindigkeitsdifferenz:

$$F \sim \Delta v\text{, oder}$$

$$F = k \cdot \Delta v.$$

Abb. 5.28 zeigt den entsprechenden Graphen.

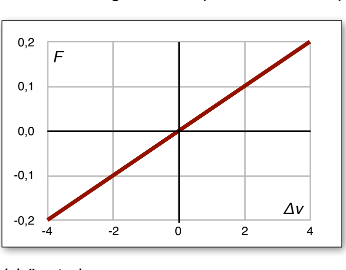


Abb. 5.28
Kennlinie bei viskoser Reibung: Der Impulsstrom ist proportional zur Differenz der Geschwindigkeiten der beteiligten Körper.

k hängt ab:

- Von der Viskosität (der Zähigkeit) der Flüssigkeit. Je zäher oder dickflüssiger sie ist, desto größer ist k und das heißt, desto größer ist die Impulsstromstärke.
- Von der Geometrie der Anordnung. Wenn A und B so aneinander vorbeigleiten wie in Abb. 5.27, so ist k proportional zur Fläche des Ölfilms und umgekehrt proportional zum Abstand zwischen A und B.

> *Viskose Reibung:*
> $F = k \cdot \Delta v$

Vielleicht kommt dir das bekannt vor. Es verhält sich ganz ähnlich wie bei einem elektrischen Strom, der durch einen Widerstand fließt. Hier ist die elektrische Stromstärke proportional zur Potenzialdifferenz:

$$I \sim \Delta\phi\text{, oder}$$

$$I = G \cdot \Delta\phi.$$

Der Proportionalitätsfaktor ist der elektrische Leitwert (der Kehrwert des elektrischen Widerstandes), und der hängt ab 1. vom Material (von der elektrischen Leitfähigkeit) und 2. von den geometrischen Maßen des elektrischen Widerstandes, nämlich von Querschnittsfläche und Länge.

Zurück zur viskosen Reibung. Wo tritt sie auf?

Schmierung von Maschinenteilen

Maschinen enthalten Teile, die sich berühren und gegeneinander bewegen. Um das Abfließen von Impuls oder Drehimpuls zu vermindern und um Energieverluste zu vermeiden, werden diese Teile „geschmiert“: Man bringt einen dünnen Film Schmieröl dazwischen, wie in Abb. 5.27. Die Schmierung ist noch aus anderen Gründen notwendig: Der Materialverschleiß wird vermindert und es entstehen weniger Geräusche. Sicher hast du schon die Scharniere einer Tür quietschen gehört.

Stoßdämpfer

Ein Auto hat an jedem Rad eine Feder, damit die Unebenheiten der Straße die Passagiere nicht durchschütteln, Abb. 5.29. Neben (oder in) der Feder befindet ein Stoßdämpfer. Ohne Stoßdämpfer würde das Auto lange anhaltende Schwingungen ausführen. Außerdem würden die Räder auf der Straße hüpfen, so dass das Auto den Kontakt zur Straße verliert. Es könnte nicht mehr ordentlich gelenkt und gebremst werden. Beim Stoßdämpfer ist also der Energie-„Verlust“ erwünscht.

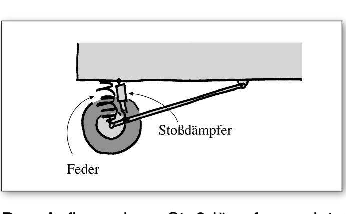


Abb. 5.29
Radaufhängung mit Feder und Stoßdämpfer, vereinfacht.

Den Aufbau eines Stoßdämpfers zeigt Abb. 5.30. Wenn man die beiden „Anschlüsse“ rechts und links gegeneinander bewegt, muss die Flüssigkeit durch ein kleines Loch im Kolben strömen. An dieser Stelle findet die Reibung statt. Wie ein Stoßdämpfer wirkt, versteht man am besten, wenn man ihn selbst in die Hand nimmt und an den Anschlüssen zieht oder drückt. Je schneller man sie bewegt, desto schwerer geht es.

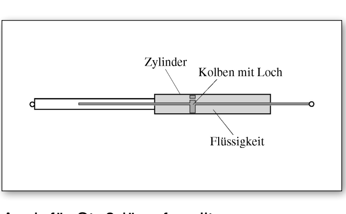


Abb. 5.30
Stoßdämpfer. Wenn die beiden Anschlüsse gegeneinander bewegt werden, wird die Flüssigkeit durch das Loch im Kolben gepresst.

Auch für Stoßdämpfer gilt

$$F = k \cdot \Delta v.$$

Δv ist die Differenz der Geschwindigkeiten der beiden Anschlüsse des Stoßdämpfers.

Reibung zwischen zwei festen Körpern

Ein Holzklotz rutscht über eine waagrechte, ebene Holzplatte. Das lässt sich besonders bequem realisieren, indem man es macht wie Willy in Abb. 5.31: Man hält den Klotz fest und sorgt dafür, dass sich die Unterlage unter ihm hinwegbewegt. Dabei fließt ein Impulsstrom von der rotierenden Tischplatte in den Klotz.

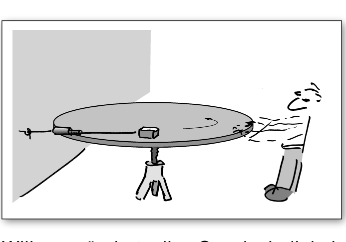


Abb. 5.31
Willy versetzt den Tisch in Drehung. Der Impulsstrom zwischen Klotz und Tisch ist unabhängig von der Geschwindigkeitsdifferenz.

Willy verändert die Geschwindigkeit der Drehung. Der Impulsstrommesser zeigt aber immer denselben Impulsstrom an. Diese Beobachtung gilt auch für andere feste Körper, die aneinander reiben:

> Wenn zwei feste Körper aneinander reiben, ist der Impulsstrom, der vom einen zum anderen fließt, unabhängig von der Geschwindigkeitsdifferenz.

Die Δv-F-Kennlinie zeigt Abb. 5.32. Hier wurde die Geschwindigkeitsdifferenz positiv angenommen.

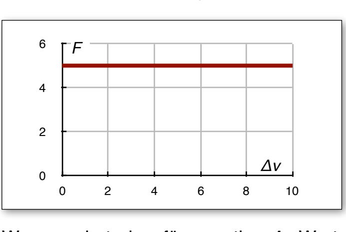


Abb. 5.32
Positiver Teil der Δv-F-Kennlinie für die Reibung zwischen zwei festen Körpern

Was passiert aber für negative Δv-Werte? Willy muss den Tisch in die andere Richtung drehen. Vorher muss aber der Klotz auf der anderen Seite, also an der rechten Wand, festgehängt werden (denn unser Impulsstrommesser ist in eine Schnur eingebaut, und diese lässt den Impulsstrom nur in einer Richtung durch). Das Ergebnis des Experiments ist nicht überraschend: Es passiert dasselbe wie vorher: Der Impulsstrom ist unabhängig von der Geschwindigkeit, allerdings fließt er jetzt in die entgegengesetzte Richtung wie vorher. Die Δv-F-Kennlinie für positive und negative Δv-Werte zeigt Abb. 5.33.

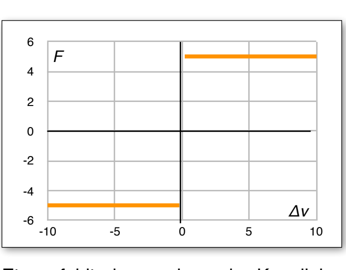


Abb. 5.33
Positiver und negativer Teil der Δv-F-Kennlinie für die Reibung zwischen zwei festen Körpern

Etwas fehlt aber noch an der Kennlinie. Welchen Wert hat F wenn die Geschwindigkeitsdifferenz gleich null ist? Wir ziehen mit Hilfe eines Impulsstrommessers an einem Klotz, der auf einem (festen) Tisch liegt und stellen fest, dass man den Impulsstrom von null an auf einen bestimmten Wert vergrößern kann, ohne dass sich der Klotz in Bewegung setzt. Es ist so, als klebte er an der Tischplatte fest. Erst wenn der Impulsstrom diesen Grenzwert überschreitet, löst sich der Klotz und fängt an, sich zu bewegen. Dabei ist dieser Grenzimpulsstrom größer als der, der fließt, wenn sich der Körper bewegt.

Wir können diesen Sachverhalt in unserer Kennlinie berücksichtigen, Abb. 5.34. Diese Erscheinung ist dir sicher bekannt: Wenn du ein schweres Möbelstück, z.B. einen Schrank, verschieben willst, musst du zunächst sehr stark ziehen oder schieben, bis du den Grenzwert des Impulsstroms erreicht hast. Sobald sich der Schrank bewegt, geht es leichter.

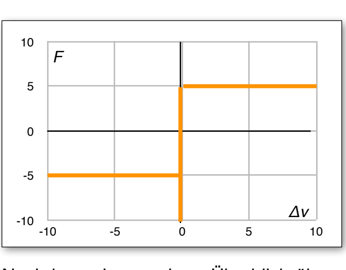


Abb. 5.34
Für $\Delta v = 0$ hat die Kennlinie eine Unstetigkeit.

Nachdem wir uns einen Überblick über die gesamte Kennlinie verschafft haben, betrachten wir noch einmal Willy mit seinem rotierenden Tisch und den positiven Teil der Kennlinie von Abb. 5.32. Wir nennen den Impulsstrom, der aus dem Tisch in den Klotz und vom Klotz über die Schnur nach links abfließt F_R (R wie Reibung), Abb. 5.35. Es handelt sich dabei um reinen *x*-Impuls. Wir hatten gesehen, dass dieser *x*-Impulsstrom unabhängig von der Geschwindigkeitsdifferenz ist.

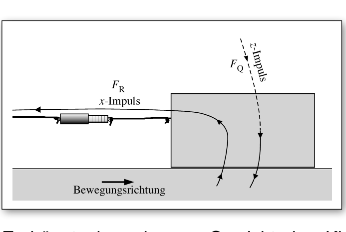


Abb. 5.35
Der *x*-Impulsstrom durch die Schnur ist proportional zum *z*-Impulsstrom, der über das Gravitationsfeld kommt.

Er hängt aber ab vom Gewicht des Klotzes, und das heißt: von einem anderen Impulsstrom F_Q (Q wie quer). Dieser kommt von der Erde, fließt über das Gravitationsfeld in den Klotz, dann weiter in den Tisch und von dort zurück in die Erde. Der Querimpulsstrom F_Q ist ein reiner *z*-Impulsstrom.

Der Zusammenhang zwischen F_R und F_Q ist einfach. Es ist:

$$F_R = \mu \cdot F_Q$$

> Je größer der Querimpulsstrom, desto stärker die Reibung.

In Worten:

Der Proportionalitätsfaktor μ hängt von der Natur der beiden Oberflächen ab. Abb. 5.36 zeigt die Kennlinie für einen Reibungsvorgang für 3 verschiedene Werte des Querimpulsstroms.

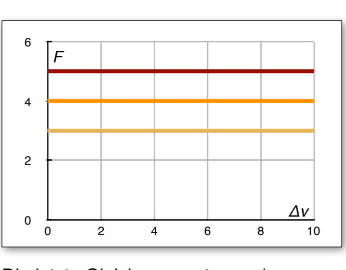


Abb. 5.36
Δv-F-Kennlinien für drei verschiedene Werte des Querimpulsstroms

Die letzte Gleichung sagt uns, dass man einen Impulsstrom mit Hilfe eines anderen steuern kann: Wenn man F_Q verändert, ändert sich auch F_R. Diese Tatsache wird technisch genutzt.

Bremsen

Abb. 5.37 zeigt schematisch die Scheibenbremse eines Autos, und zwar von oben gesehen. (Es könnte auch die Felgenbremse eines Fahrrads sein.) Die Scheibe dreht sich zwischen zwei Klötzen hindurch. Tritt man auf das Bremspedal, so werden die Klötze mehr oder weniger stark gegen die Bremsscheibe gedrückt, d.h. es wird ein z-Impulsstrom durch die Bremsscheibe hindurch erzeugt. Dieser bewirkt einen mehr oder weniger starken x-Impulsstrom aus der Bremsscheibe heraus.

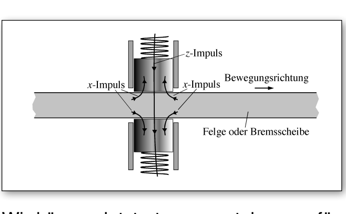


Abb. 5.37
Scheibenbremse oder Felgenbremse. Zum Bremsen schickt man einen *z*-Impulsstrom durch die Bremsscheibe von oben nach unten hindurch. Das bewirkt, dass *x*-Impuls aus der Scheibe herausfließt.

Wir können jetzt etwas verstehen, wofür man als Autofahrer ein zuverlässiges Gefühl hat: Die Impulsabnahme des Autos beim Bremsen hängt nicht davon ab, wie schnell das Auto fährt, sondern nur davon, wie stark man auf das Bremspedal tritt. In anderen Worten: Die Bremse wirkt bei hoher Geschwindigkeit genau so gut (oder schlecht) wie bei niedriger. Das ist keine Selbstverständlichkeit. Es gibt Bremsen, deren Wirkung geschwindigkeitsabhängig sind. So wirken Wirbelstrombremsen um so stärker, je größer Δv ist. Man findet solche Bremsen in Straßenbahnen, im ICE3, bei der Achterbahn oder beim Freefall-Tower.

Die Kupplung

Wir hatten sie früher schon kennen gelernt. Sie ist dazu da, eine Verbindung für einen Drehimpulsstrom zu unterbrechen und wieder herzustellen, siehe Abb. 3.18 und Abb. 3.19. Wenn man beim Auto das Kupplungspedal (das linke Pedal) getreten hält, so ist die Verbindung zwischen Motor und Getriebe unterbrochen. Zum Einkuppeln lässt man das Pedal langsam kommen. Dabei werden die beiden Kupplungsscheiben mehr und mehr gegeneinander gedrückt, und es fließt ein Drehimpulsstrom. Dieser hängt nicht von der Differenz der Winkelgeschwindigkeiten der Scheiben ab, sondern nur davon, wie weit man das Kupplungspedal zurückgenommen hat. Bei halb eingekuppeltem Motor ist daher der Drehimpulsstrom unabhängig davon, wie schnell der Motor läuft. Das kann man leicht feststellen: Für das Anfahren spielt es keine Rolle, ob man viel oder wenig Gas gibt. Erst wenn ganz eingekuppelt ist, d.h. wenn die Kupplungsscheiben nicht mehr gegeneinander reiben, wirkt sich die Stellung des Gaspedals auf die Impulsänderung des Autos aus.

Turbulente Reibung

Ein dritter Reibungstyp ist die turbulente Reibung. Wenn sich ein Körper durch ein dünnflüssiges Medium bewegt, z.B. durch die Luft, so wird dieses in turbulente Bewegung versetzt. Es bekommt Impuls und trägt diesen konvektiv weg.

Für diesen Impulsstrom spielt die Viskosität keine Rolle mehr. Er hängt aber davon ab, wie träge das Medium ist, d.h. von seiner Massendichte.

Außerdem wächst er nicht mehr proportional zur Geschwindigkeitsdifferenz, sondern er ist proportional zum Quadrat von Δv, Abb. 5.38.

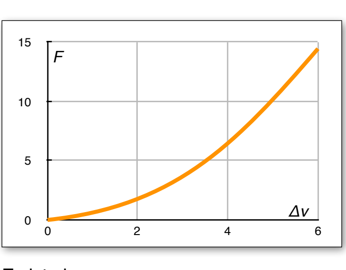


Abb. 5.38
Δv-F-Kennlinie für turbulente Reibung

Es ist also:

$$F \sim \Delta v^2.$$

Der Impulsverlust eines Autos bei höheren Geschwindigkeiten ist von dieser Art. Wir können daraus lernen, wie man Auto fahren muss, wenn man Benzin, und damit Energie sparen will. Man könnte zunächst denken: Ich fahre lieber mit 120 km/h statt mit 60 km/h. Der Motor braucht dann zwar mehr Benzin pro Sekunde, aber die Fahrt dauert nur die halbe Zeit. Wenn der Impulsverlust proportional zu Δv wäre, würden sich die beiden Effekte gerade aufheben. So ist es aber nicht. Da der Impulsverlust mit dem Quadrat der Geschwindigkeit zunimmt, ist der Benzinverbrauch pro Sekunde bei 120 km/h mehr als doppelt so groß wie bei 60 km/h.

Dieses Argument gilt nicht mehr bei niedrigen Geschwindigkeiten, weil dann die turbulente Reibung nicht mehr stark ins Gewicht fällt gegenüber den anderen Reibungsarten. Ein Auto braucht unnötig viel Energie ab etwa 80 km/h.

Aufgaben

1. Ein Auto wird bei konstant gehaltenem Bremspedal von 80 km/h beginnend bis zum Stillstand gebremst. Stelle in einem einzigen Graphen als Funktion der Zeit dar: den Impuls des Autos, den Impulsstrom aus dem Auto heraus, die kinetische Energie des Autos, den Energiestrom aus dem Auto heraus.

Die Masse des Autos ist 1,2 t, der Brems-Impulsstrom 3600 N.

2. Es gibt Bremsen, bei denen der Impulsstrom nicht konstant, sondern proportional zur Geschwindigkeit des zu bremsenden Fahrzeugs ist. Welches Problem ergibt sich? Wie kann man es lösen?

6

Bezugssysteme

6.1 Bezugssystem und Nullpunkt einer Größe

Der Mann, der in einem Boot den Rhein hinuntertreibt, sagt, die Landschaft ziehe an ihm vorbei, Abb. 6.1, während wir am Ufer sagen, das Boot mit dem Mann zieht an uns vorbei.

Abb. 6.1
Der Mann im Boot wählt als Bezugskörper das Boot. In seinem Bezugssystem bewegt sich das Ufer. Im Bezugssystem des Mannes am Ufer bewegt sich das Boot.

Hier wird die Welt in verschiedenen Bezugssystemen beschrieben oder betrachtet.

Wir wollen die Bewegung eines Körpers K beschreiben: Wie schnell bewegt er sich? In welche Richtung bewegt er sich? Wir können auf diese Fragen keine Antwort geben, solange wir nicht festgelegt haben, worauf sich die Bewegung bezieht.

Du gehst in einem fahrenden Zug durch den Gang nach vorn. In Bezug auf den Eisenbahnwagen bewegst du dich mit 3 km/h, in Bezug auf die Erde vielleicht mit 203 km/h.

Wenn man von einer Bewegung spricht, muss also immer klar sein, auf welchen anderen Körper sich die Bewegung bezieht. Man nennt diesen anderen Körper den Bezugskörper. Nun kommt es aber auf die meisten Eigenschaften und Besonderheiten des Bezugskörpers gar nicht an. Wir können ihn uns daher ersetzt denken durch ein Koordinatensystem, das wir an ihm befestigen. Wir nennen dieses Koordinatensystem das *Bezugssystem*.

Der Bezugskörper ruht in seinem eigenen Bezugssystem. Wenn wir die Erde als Bezugskörper nehmen, so nennen wir das entsprechende Bezugssystem „das Bezugssystem der Erde“ oder wenn wir einen Zug als Bezugskörper nehmen, so sprechen wir vom „Bezugssystem des Zuges“.

Der Mann im Boot von Abb. 6.1 hat als Bezugskörper das Boot gewählt, bzw. ein Koordinatensystem, das am Boot befestigt ist. Das Boot selbst ruht in diesem Bezugssystem, seine Geschwindigkeit ist 0 km/h, während sich das Ufer (und damit die Erde) mit –20 km/h bewegt. Man sagt auch, das Ufer bewege sich *relativ zum Boot* oder gegen das Boot mit –20 km/h. Jemand der am Ufer steht, wird als Bezugssystem die Erde wählen. Für ihn hat die Erde die Geschwindigkeit 0 km/h, das Boot dagegen 20 km/h. Das Boot bewegt sich relativ zur Erde mit 20 km/h.

Uns werden später Bezugssysteme interessieren, in denen Schwerelosigkeit herrscht. Wir hatten gesehen, dass das bei frei fallenden Körpern zutrifft. Wir betrachten einen Apfel, der gerade vom Baum fällt, Abb. 6.2.

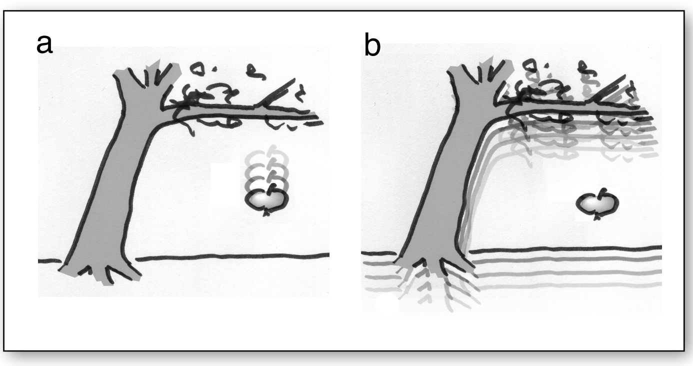


Abb. 6.2
(a) Von der Erde aus gesehen bewegt sich der Apfel beschleunigt nach unten.
(b) Im Bezugssystem des Apfels bewegen sich Erde und Baum beschleunigt nach oben.

Wir nehmen als Bezugssystem zunächst die Erde. Die Erde selbst ist dann nicht beschleunigt. Es ist also

$a_{\text{Erde}} = 0\ \text{m/s}^2 \qquad a_{\text{Apfel}} = 9{,}81\ \text{m/s}^2.$

Wenn der Bezugskörper der Apfel ist, so wird

$a_{\text{Erde}} = -9{,}81\ \text{m/s}^2 \qquad a_{\text{Apfel}} = 0\ \text{m/s}^2.$

Die Festlegung kann auch komplizierter sein, z. B.: Das Bezugssystem ist am Schwerpunkt des Sonnensystems „befestigt“, die *x*-Achse weist in Richtung Polarstern, die *y*-Achse in Richtung ... usw.

> Um einen Bewegungsvorgang zu beschreiben, muss man ein Bezugssystem wählen: ein Koordinatensystem, das man sich an einem Bezugskörper befestigt denkt.

Dass man ein Bezugssystem wählen muss, kann man auch so sehen: Man muss festlegen, wie man die Nullpunkte von Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung wählt.

Vielleicht erinnerst du dich, dass man auch für andere physikalische Größen den Nullpunkt festlegen muss. So hat die Angabe eines elektrischen Potenzialwertes oder auch einer Temperatur solange keinen Sinn, wie man nicht weiß, wie der Nullpunkt festgelegt ist.

Ein Wechsel des Bezugssystems bedeutet, dass man den Nullpunkt von Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung neu festlegt.

> *Wechsel des Bezugssystems:*
> Verschiebung des Nullpunkts von Ort, Geschwindigkeit oder Beschleunigung

Es geht im Folgenden um die Frage, wie sich die Beschreibung der Welt ändert, wenn man das Bezugssystem wechselt; wenn man sie statt im Bezugssystem S in einem anderen Bezugssystem S' beschreibt.

Interessant ist vor allem ein Wechsel der Nullpunkte von Geschwindigkeit und Beschleunigung. Um den Ortsnullpunkt werden wir uns nicht kümmern.

6.2 Erscheinungen in unterschiedlichen Bezugssystemen

Wenn man das Bezugssystem wechselt, ändern sich die Werte von Geschwindigkeit oder Beschleunigung. Das ist aber längst nicht alles. Viele andere Größen ändern ihre Werte auch, und es gibt Erscheinungen, die nach einem Bezugssystemwechsel ganz neu interpretiert werden müssen. Die Welt sieht nach einem Bezugssystemwechsel anders aus.

Wir nehmen im Folgenden zunächst an, eines der Bezugssysteme, nämlich S, sei die Erde, und ein anderes Bezugssystem S' bewegt sich gegen S mit einer konstanten Geschwindigkeit v_0.

In Abschnitt 6.3 wird sich dann S' mit einer konstanten Beschleunigung gegen S bewegen.

Geschwindigkeit, Impuls und kinetische Energie

Wir betrachten geradlinige, horizontale Bewegungen. Die Bewegungsrichtung ist die *x*-Richtung. Wir brauchen also nur die *x*-Komponente des Geschwindigkeitsvektors zu berücksichtigen, und bezeichnen sie mit v.

Ein Auto bewege sich mit der Geschwindigkeit v relativ zur Erde (Bezugssystem S). In einem Bezugssystem S', das sich gegen die Erde mit der Geschwindigkeit v_0 bewegt, ist die Geschwindigkeit des Autos

$$v' = v - v_0 .$$

Wir können auch sagen, wir haben den Nullpunkt der Geschwindigkeit um v_0 verschoben, Abb. 6.3.

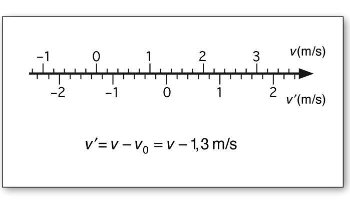


Abb. 6.3
Im Bezugssystem S hat das Auto die Geschwindigkeit v, in S' die Geschwindigkeit $v - v_0$.

Wir fragen nun nach den Werten weiterer Größen. Zunächst der Impuls. In S haben wir:

$$p = m \cdot v,$$

und in S':

$$p' = m \cdot v' = m(v - v_0).$$

Und die kinetische Energie. In S beträgt sie:

$$E_{kin} = \frac{m}{2} v^2,$$

und in S':

$$E'_{kin} = \frac{m}{2} v'^2 = \frac{m}{2} (v - v_0)^2.$$

> Die Werte von Impuls und kinetischer Energie sind bezugssystemabhängig.

Wir sehen:

Man könnte befürchten, dass die Naturgesetze, die wir kennen, in S' nicht mehr gelten. Wir untersuchen die Auswirkungen eines Bezugssystemwechsels auf den Impulserhaltungssatz und den Energieerhaltungssatz.

Zwei Körper A und B (Masse je 2 kg) bewegen sich reibungsfrei aufeinander zu und stoßen zusammen, Abb. 6.4. A ist mit einem Federpuffer versehen. Die Geschwindigkeiten sind am Anfang 3 m/s bzw. –3 m/s.

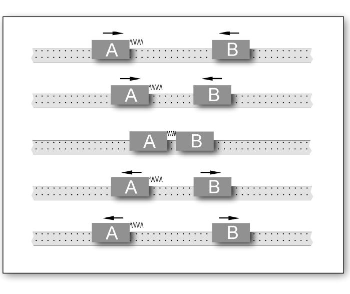


Abb. 6.4
Impuls und kinetische Energie ändern sich beim Stoß nicht.

Tabelle 6.1 enthält Geschwindigkeit, Impuls und kinetische Energie für beide Körper vor und nach dem Stoß. Rechne nach!

	A	B	zusammen
vorher			
v	3 m/s	–3 m/s	
p	6 Hy	–6 Hy	0 Hy
E_{kin}	9 J	9 J	18 J
nachher			
v	–3 m/s	3 m/s	
p	–6 Hy	6 Hy	0 Hy
E_{kin}	9 J	9 J	18 J

Tabelle 6.1
Die Werte von Geschwindigkeit, Impuls und kinetischer Energie in Bezugssystem S (Erde)

Der Gesamtimpuls vor dem Stoß ist 0 Hy, und nach dem Stoß ist er auch 0 Hy. Für die gesamte kinetische Energie vor und nach dem Stoß erhält man 18 J.

Wir beschreiben den Vorgang nun in einem Bezugssystem, das sich mit v_0 = 3 m/s nach rechts bewegt, Abb. 6.5.

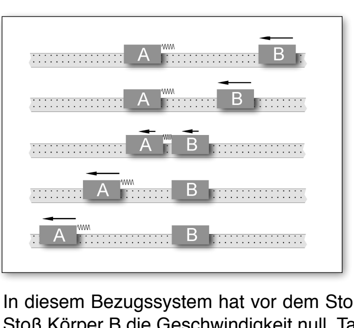


Abb. 6.5
Derselbe Vorgang wie in Abb. 6.3, aber in einem anderen Bezugssystem. Nach wie vor gilt Impuls- und Energieerhaltung

In diesem Bezugssystem hat vor dem Stoß Körper A und nach dem Stoß Körper B die Geschwindigkeit null, Tabelle 6.2.

	A	B	zusammen
vorher			
v'	0 m/s	–6 m/s	
p'	0 Hy	–12 Hy	–12 Hy
E'_{kin}	0 J	36 J	36 J
nachher			
v'	–6 m/s	0 m/s	
p'	–12 Hy	0 Hy	–12 Hy
E'_{kin}	36 J	0 J	36 J

Tabelle 6.2
Die Werte von Geschwindigkeit, Impuls und kinetischer Energie in Bezugssystem S'

Die Werte aller Größen sind jetzt anders als in unserem ursprünglichen Bezugssystem, aber es gilt auch hier, dass sich Gesamtenergie und Gesamtimpuls während des Stoßvorgangs nicht ändern. Das Ergebnis bestätigt eine Regel, die allgemein gilt:

> S' bewegt sich gegen S mit v_0:
> Der Bezugssystemwechsel ändert nichts an der Gültigkeit des Energie- und des Impulserhaltungssatzes.

Die Wasserstromstärke

In einem Rohr fließt ein Wasserstrom der Stärke 5 Liter pro Minute. Wir nehmen an, dass das Wasser überall im Rohr dieselbe Geschwindigkeit hat.

Wir nehmen nun das Wasser als Bezugskörper. In dem entsprechenden Bezugssystem bewegt sich das Wasser nicht, dafür aber das Rohr. Die Wasserstromstärke ist jetzt null Liter pro Minute.

Der Wert der Wasserstromstärke ist also bezugssystemabhängig.

Die elektrische Stromstärke

Wir beginnen mit einem etwas ungewöhnlichen elektrischen Strom. Wir betrachten den Elektronenstrahl in einer alten Fernsehröhre. Die Elektronen des Elektronenstrahls bewegen sich mit einer Geschwindigkeit von etwa 10^8 m/s – in Bezug auf die Erde. Da die Elektronen geladen sind, ist mit dem Elektronenstrahl ein elektrischer Strom verbunden, und dieser bildet um sich herum ein magnetisches Feld, Abb. 6.6.

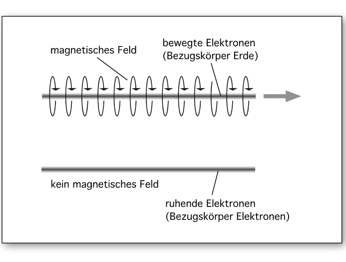


Abb. 6.6
In dem Bezugssystem, in dem die Elektronen ruhen, ist die magnetische Feldstärke null.

Wir wechseln nun das Bezugssystem. Wir beschreiben die Situation in einem Bezugssystem, das sich mit den Elektronen mitbewegt. In anderen Worten: In unserem neuen Bezugssystem S' bewegen sich die Elektronen nicht. Es gibt also keinen elektrischen Strom, und folglich auch kein magnetisches Feld. Wir schließen daraus, dass die elektrische Stromstärke in einem Strom geladener Teilchen bezugssystemabhängig ist. Wir erfahren aber außerdem etwas, was viel interessanter ist: magnetische Felder sind bezugssystemabhängig.

Du wirst später lernen, dass man magnetische Felder quantitativ durch die *magnetische Feldstärke* beschreibt.

> S' bewegt sich gegen S mit v_0:
> Die magnetische Feldstärke ist bezugssystemabhängig.

Wir betrachten nun noch einen normalen elektrischen Strom in einem Kupferdraht. Hier bewegen sich die Ladungsträger viel, viel langsamer. Man könnte also denken, dass es hier viel leichter ist, das magnetische Feld durch einen Bezugssystemwechsel wegzubekommen. Das ist aber nicht der Fall.

Jedes Atom des Kupferdrahtes hat ein Elektron, das nicht fest an den Atomkern gebunden ist. Wenn ein elektrischer Strom durch den Draht fließt, schieben sich diese beweglichen Elektronen an dem positiven Rest des Atome vorbei.

In einem Bezugssystem, in dem der Draht ruht, bewirken die beweglichen Elektronen einen elektrischen Strom. Geht man nun in das Bezugssystem, in dem die beweglichen Elektronen ruhen, so wird der entsprechende elektrische Strom null. Nun bewegt sich in diesem Bezugssystem aber der positive Rest. Und jetzt erzeugt dieser einen Strom. Für die Stromstärke ist es egal, ob sich positive Ladungsträger in die eine oder negative in die andere Richtung bewegen. Man kann also das Bezugssystem wechseln wie man will: elektrische Stromstärke und magnetisches Feld bleiben gleich.

> S' bewegt sich gegen S mit v_0:
> Bei Bezugssystemwechsel ändert sich die Stromstärke in einem Strahl geladener Teilchen. Sie ändert sich nicht in einem neutralen Leiter.

Die Fahrradkette

Wir beschreiben den Energietransport durch die Fahrradkette vom vorderen Kettenrad (bei den Pedalen) zum hinteren (am Hinterrad). Da nur im oberen Teil der Kette ein Impulsstrom fließt, brauchen wir auch nur diesen zu betrachten. Um konkret zu sein, nehmen wir an:

Geschwindigkeit des Fahrrades relativ zur Erde:
$v_{Fahrrad}$ = 18 km/h = 5 m/s

Geschwindigkeit des oberen Teils der Kette relativ zum Fahrrad:
v_{Kette} = 0,8 m/s

Impulsstrom im oberen Teil der Kette:

F = 80 N.

Wir beginnen mit der Beschreibung im Bezugssystem S des Fahrrades, Abb. 6.7. Das heißt, das Fahrrad ruht, die Erde bewegt sich mit 5 m/s nach links und die Kette mit 0,8 m/s nach rechts.

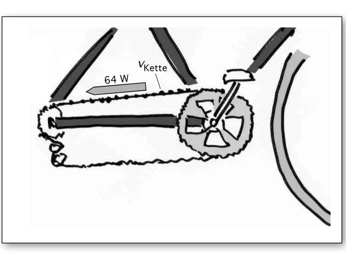


Abb. 6.7
Bezugskörper Fahrrad: Durch die Kette fließt ein Energiestrom von 64 W (grauer Pfeil) von rechts nach links.

Für den Energiestrom durch die Kette erhalten wir damit:

$$P = v_{Kette} \cdot F = 0{,}8 \text{ m/s} \cdot 80 \text{ N} = 64 \text{ W}$$

Wir gehen nun in das Bezugssystem S' der Erde, Abb. 6.8. Die Erde bewegt sich relativ zum Fahrrad mit

$$v_0 = -\, v_{Fahrrad} = -\, 5 \text{ m/s} .$$

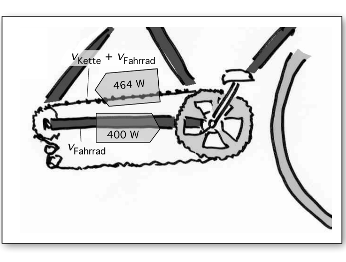


Abb. 6.8
Bezugskörper Erde: Durch die Kette fließt ein Energiestrom von 464 W nach links. Davon fließen 400 W durch den Fahrradrahmen wieder zurück nach rechts.

Für den Energiestrom in der Kette erhalten wir damit:

$$P = (v_{Kette} - v_0)\, F = (v_{Kette} + v_{Fahrrad})\, F$$
$$= (0{,}8 \text{ m/s} + 5 \text{ m/s}) \cdot 80 \text{ N} = 464 \text{ W}$$

Und damit haben wir ein Problem: Der Energiestrom ist zu groß. Eine radelnde Person kann mit den Muskeln einen solchen Energiestrom gar nicht erzeugen. Irgendetwas kann nicht stimmen. Tatsächlich haben wir noch etwas vergessen. Der Impulsstrom, der durch den oberen Teil der Fahrradkette fließt (Zugspannung, also von rechts nach links), muss ja wieder zurückfließen. Und das tut er auch – nämlich durch den Fahrradrahmen (im Wesentlichen durch die horizontale Verbindung zwischen hinterem und vorderem Kettenrad). Da sich das Fahrrad im Bezugssystem S' bewegt, ist mit diesem Impulsstrom ein Energiestrom verbunden, und zwar von hinten nach vorn. Es ist nicht schwer, diesen Energiestrom zu berechnen:

$$P = v_0 \cdot (-F) = -\,5 \text{ m/s} \cdot 80 \text{ N} = -\,400 \text{ W}.$$

(Den Impulsstrom von links nach rechts haben wir negativ gezählt.) Durch den Fahrradrahmen fließt ein Energiestrom von hinten nach vorn. Der Gesamtenergiestrom von Kette und Rahmen ergibt sich damit zu

$$P = 464 \text{ W} - 400 \text{ W} = 64 \text{ W}.$$

Was die radelnde Person aus den Muskeln abgibt, sind in jedem Fall 64 W, und die kommen auch hinten an. Welchen Weg der Energiestrom nimmt, hängt aber vom gewählten Bezugssystem ab.

> S' bewegt sich gegen S mit v_0:
> Mechanische Energieströme sind bezugssystemabhängig.

Wir könnten noch andere physikalische Größen untersuchen: Ändert sich ihr Wert bei Bezugssystemwechsel oder nicht? Dabei würden wir zunächst feststellen: einige sind bezugssystemabhängig, andere scheinen es nicht zu sein. So würden wir zunächst finden, dass sich die Werte der folgenden Größen nicht ändern, wenn man das Bezugssystem wechselt:

Länge, Zeitdauer, Masse, Druck, elektrische Ladung, Temperatur, Entropie…

Tatsächlich enthält diese Liste aber einige Größen, die nicht hineingehören. Wenn man nämlich einen Bezugssystemwechsel macht, bei dem v_0 sehr groß ist, stellt man fest, dass von der Liste nicht viele Kandidaten übrig bleiben.

So verändern sich die Werte von Längen, Zeitintervallen und Massen bei einem Bezugssystemwechsel. Übrig bleiben nur ganz wenige, darunter die elektrische Ladung und die Entropie.

Wir beschäftigen uns mit den Erscheinungen, die bei hohen Geschwindigkeiten auftreten im nächsten Kapitel. Sie sind Gegenstand der *Relativitätstheorie*.

Es sieht aus, als würde ein Bezugssystemwechsel die Welt verändern. Das trifft aber nicht zu. Die Welt bleibt, wie sie ist. Nur unsere Beschreibung, unser Standpunkt ändert sich und lässt uns die Welt anders erscheinen.

> Durch einen Bezugssystemwechsel wird die Welt nicht verändert. Es ändert sich nur unsere Beschreibung der Welt.

Aufgaben

1. Zwei Körper A und B (Masse je 2 kg) stoßen zusammen, ähnlich wie in Abb. 6.4 – nur haben sie nicht einen Federpuffer, sondern einen plastischen Puffer, sodass sie nach dem Stoß aneinander hängen. Die Anfangsgeschwindigkeiten sind wie in Abb. 6.4, also
v_A = 3m/s und v_B = – 3 m/s. Wie groß ist

der Impuls von Köper A
der Impuls von Körper B
der Gesamtimpuls

vor dem Stoß und nach dem Stoß.

Wie groß ist

die kinetische Energie von Köper A
die kinetische Energie von Körper B
die gesamte kinetische Energie

vor dem Stoß und nach dem Stoß.

Beschreibe den Vorgang in einem Bezugssystem, das sich gegen das vorher verwendete mit v_0 = 3 m/s bewegt.

2. Eine Lokomotive zieht 4 Wagen mit konstanter Geschwindigkeit auf ebener Strecke. Skizziere den Weg von Impuls und Energie (a) im Bezugssystem der Erde und (b) im Bezugssystem des Zuges.

6.3 Schwebende Bezugssysteme

Willy befindet sich in einem Aufzug, der nicht an einem Seil hängt, sondern frei nach unten fällt, Abb. 6.9. (Der Aufzug wird am Ende eine sanfte Landung machen.) Er bewegt sich beschleunigt: Seine Geschwindigkeit nimmt linear mit der Zeit zu.

Abb. 6.9
Willy: „Die Kugel schwebt vor mir. Die Gravitationsfeldstärke muss null sein." Lilly: „Die Gravitationsfeldstärke ist nicht null; Willy und die Kugel fallen gleich schnell."

Willy stellt fest, dass er schwerelos ist. Er experimentiert auch mit verschiedenen Gegenständen. Alles was er loslässt, bleibt einfach vor ihm in der Schwebe und fällt nicht zum Boden (des Aufzugs). Er schließt: Die Gravitationsfeldstärke ist null.

Lilly beobachtet von außen, und kommt zu einem anderen Schluss. Die Gravitationsfeldstärke ist durchaus nicht null. Die Gegenstände, die Willy loslässt, fallen beschleunigt zur Erde. Willy merkt nur nichts davon, weil er selbst auch fällt. Anschließend diskutieren Willy und Lilly über ihre Beobachtungen und einigen sich schließlich:

> S' bewegt sich mit konstanter Beschleunigung gegen S:
> Die Gravitationsfeldstärke ist bezugssystemabhängig.

Willy macht noch eine Fahrt oder einen Flug in seinem fallenden Aufzug. Währenddessen hält Lilly einen Federkraftmesser, an dem ein schwerer Klotz hängt, Abb. 6.10. Die Feder ist gedehnt, sie steht unter Zugspannung. Für Lilly ist klar: In den Klotz fließt über das Gravitationsfeld ein Impulsstrom, und der muss über die Feder abfließen. Das drückt man gewöhnlich so aus: Der Klotz ist schwer. Seine Masse ist ein Maß für das „Schwersein".

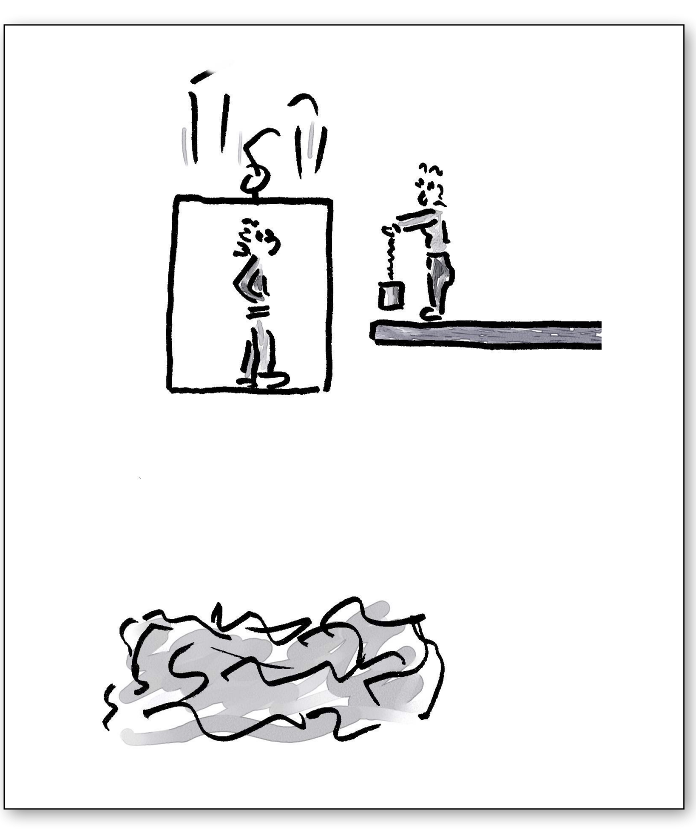


Abb. 6.10
Willy: „Die Feldstärke ist null. Die Feder ist gedehnt, weil in den Klotz Impuls hineinfließt, sodass er schneller wird." Lilly: „Der Klotz wird nicht schneller. In den Klotz fließt über das Gravitationsfeld ein Impulsstrom, und dieser fließt über die Feder wieder ab."

Aus Willys Sicht ist das anders: Die Feldstärke des Gravitationsfeldes ist null. Dass Lillys Feder gedehnt ist, erklärt er so: Der Klotz wird immer schneller, sein Impuls nimmt ständig zu. Er bekommt den Impuls über die Feder von Lilly (und Lilly bekommt ihn aus der Erde). Das drückt man auch so aus: Der Klotz widersetzt sich der Beschleunigung weil er träge ist. Seine Masse ist ein Maß für diese Trägheit.

Wir hatten früher (Abschnitt 4.2) festgestellt, dass ein Körper auf Grund seiner Masse zwei Eigenschaften hat: Er ist schwer und er ist träge. Wir hatten auch schon gesehen, dass die beiden Eigenschaften miteinander zusammenhängen. Wenn Körper A doppelt so schwer ist wie Körper B, so ist A auch doppelt so träge wie B. Wir sehen jetzt, dass das kein Zufall ist.

> Die Masse äußert sich je nach Bezugssystem anders:
> einmal als Schwere und einmal als Trägheit.

Die Gesetze der Physik gelten in beiden Bezugssystemen. Unterschiedlich sind aber die Zahlenwerte der physikalischen Größen, z.B. ist die Feldstärke einmal null und einmal nicht null. Und unterschiedlich ist auch die physikalische Deutung der Experimente: einmal ist die Feder gedehnt wegen des Gewichts des Körpers, der an ihr hängt, und einmal wegen seiner Trägheit.

Wenn wir eine Erscheinung physikalisch beschreiben, steht es uns immer frei, welches Koordinatensystem wir wählen. Nach unseren bisherigen Überlegungen sieht es so aus, als wäre es völlig egal wie wir es wählen. Die Physik gilt ja in jedem. Nun gibt es aber noch ein anderes Argument: Es könnte sein, dass die Beschreibung in einem Bezugssystem einfacher ist als in einem anderen – und so ist es auch.

In unserem Fall könnte man vielleicht glauben, das einfache Bezugssystem ist das von Lilly. Sie steht auf der Erde, auch wir stehen auf der Erde, und wir wissen, wie die Welt aussieht, wenn wir sie aus dieser Perspektive beschreiben. Wenn man sich die Sache genauer überlegt, kommt man aber zu einem anderen Schluss: Das Bezugssystem von Willy ist das bequemere, denn einfacher als bei Willy kann die Welt gar nicht sein: Wenn man einen Körper irgendwo hintut, dann bleibt er dort; er wird sich nicht in Bewegung setzen, und immer schneller werden, so wie wir Erdenbürger es ständig erleben. Bei Willy bleiben die Dinge entweder, wo sie sind, oder, wenn man sie in Bewegung versetzt, ihnen also Impuls gibt, bewegen sie sich mit konstanter Geschwindigkeit geradeaus. Einfacher geht es nicht.

Bezugssysteme, in denen sich Körper, die man sich selbst überlässt, mit konstanter Geschwindigkeit bewegen oder auch gar nicht bewegen, nennen wir frei schwebende Bezugssysteme, oder kurz *schwebende Bezugssysteme*.

> Schwebendes Bezugssystem:
> Ein Körper, der sich selbst überlassen ist, bewegt sich nicht oder bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit.
> In einem schwebenden Bezugssystem ist die Physik besonders einfach.

Eine Bewegung wie die von Willy mit seiner Aufzugskabine und den Gegenständen, die er noch bei sich hat, hatten wir früher einen „freien Fall" genannt. Normalerweise endet eine solche Bewegung nach kurzer Zeit.

Wir hatten aber in Abschnitt 4.6 gesehen, dass man den Zustand des freien Fallens auch dauerhaft aufrecht erhalten kann. Jeder Satellit, der um die Erde kreist, oder auch die Raumstation ISS befindet sich ständig im Zustand des Fallens.

Wir betrachten nun ein Raumschiff, das fern von allen Planeten und Sternen durch den Weltraum treibt. Willy und Lilly fühlen sich schwerelos. Auch diesem Raumschiff entspricht also ein schwebendes Bezugssystem, Abb. 6.11.

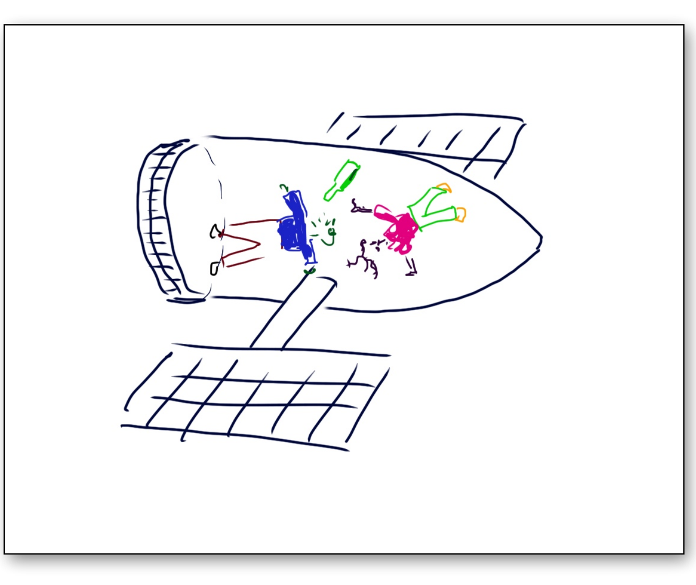


Abb. 6.11
Das Raumschiff treibt antriebslos im Weltraum. Willy, Lilly und alles andere im Raumschiff schweben. Das Bezugssystem des Raumschiffs ist ein schwebendes Bezugssystem.

Willy und Lilly sehnen sich nun nach der Erde – vor allem deshalb, weil sie dort das wunderbare Gefühl der Schwere haben. Da die Erde zu weit weg ist, um mal kurz hinzufahren, erzeugen sie sich das Gefühl auf andere Art: Sie schalten die Triebwerke ein, Abb. 6.12.

Abb. 6.12
Der Antrieb ist eingeschaltet. Willy, Lilly und die Flasche „stehen auf dem Boden". Das Bezugssystem des Raumschiffs ist kein schwebendes Bezugssystem.

Von außen gesehen (d.h. von einem schwebenden Bezugssystem aus) würde man sagen: Der Impuls des Raumschiffs nimmt zu, und auch der von Willy und Lilly. In die beiden fließt also ein Impulsstrom hinein. Willy und Lilly sehen das allerdings anders, denn sie beschreiben den Vorgang im Bezugssystem des Raumschiffs, das jetzt kein schwebendes Bezugssystem mehr ist. Sie stellen fest, dass sie schwer geworden sind. Sie „stehen" auf dem „Boden", und jeder Gegenstand, den sie loslassen „fällt" nach „unten".

Noch einmal zurück zum antriebslosen Raumschiff. Willy und Lilly schauen durch das Fenster und entdecken, dass sich in der Nähe ein anderes Raumschiff bewegt, und zwar auch ohne Antrieb. Allerdings fliegt es in eine andere Richtung, Abb. 6.13.

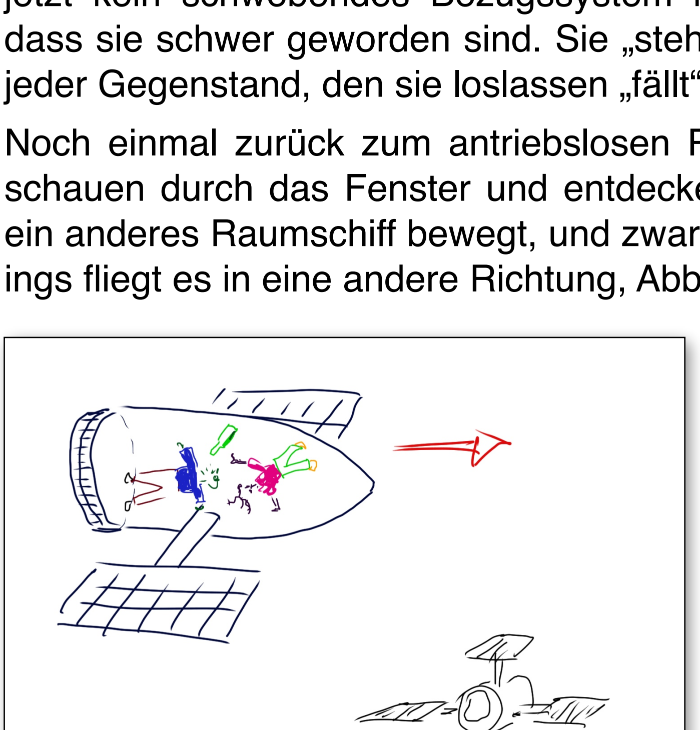


Abb. 6.13
Das Raumschiff von Willy und Lilly ist antriebslos, sein Bezugssystem ist ein schwebendes Bezugssystem. Aber auch das Bezugssystem des anderen Raumschiffs, das ebenfalls antriebslos ist und sich mit einer anderen Geschwindigkeit bewegt, ist schwebend.

Die Insassen des anderen Raumschiffs sind also auch schwerelos, und das heißt, dass auch durch das andere Raumschiff ein schwebendes Bezugssystem festgelegt wird. Es gibt also an einem Ort nicht nur ein schwebendes Bezugssystem. Wie viele gibt es? Zwei? Nein. Jedes Raumschiff, dass sich mit konstanter Geschwindigkeit gegen das von Willy und Lilly bewegt, definiert ein schwebendes Bezugssystem. Es gibt also unendlich viele schwebende Bezugssysteme.

> Jedes Bezugssystem, das sich mit konstanter Geschwindigkeit gegen ein schwebendes Bezugssystem bewegt, ist auch ein schwebendes Bezugssystem.

Aufgaben

1. An der Uni Bremen wurde für physikalische Experimente ein „Fallturm" gebaut, Abb. 6.14. In seinem Innern befindet sich eine über 100 m lange Röhre. Diese kann man zum Experimentieren luftleer pumpen. Willy steigt in eine Experimentierkapsel und wird in der Spitze des Fallturms losgelassen*. Eine dicke Schicht von Styroporkugeln am Boden des Turms sorgt für eine sanfte Landung. Der Fallvorgang dauert knapp 5 Sekunden. Lilly beobachtet das Experiment.

Welche maximale Geschwindigkeit hat sie für Willy gemessen?

Wie beschreibt Willy seine Bewegung?

Wie lässt sich die Dauer des „Fallvorgangs" verdoppeln?

2. Lilly steigt jetzt selbst in eine Kapsel und lässt sich im Fallturm mit einer Geschwindigkeit v = 50 m/s nach oben schleudern. Gleichzeitig wird Willy mit seiner Kapsel in der Turmspitze losgelassen. Willy und Lilly beobachten sich während des Experiments das 5 s dauert. Wie beschreiben sie die Bewegung des jeweils anderen? Alle Aussagen kannst du ohne zu rechnen machen.

3. Ein Fallschirmspringer schwebt auf seinen Landeplatz zu. Seine Geschwindigkeit ist konstant. Warum hat dieses Schweben nichts mit dem Schweben von Willy und Lilly im Fallturm zu tun?

* Den Fallturm gibt es wirklich. Die Geschichte mit Willy und Lilly dagegen ist frei erfunden.

Abb. 6.14
Fallturm der Universität Bremen

7

Die Grenzgeschwindigkeit

7.1 Masse gleich Energie

Manchmal entdeckte man in der Physik, dass zwei scheinbar verschiedene Dinge, gar nicht verschieden sind. Der spektakulärste Fall dieser Art, war die Entdeckung durch Albert Einstein (1879 - 1955), dass es sich bei den beiden altbekannten Größen Masse und Energie um ein und dieselbe Größe handelt, Abb. 7.1. Die Masse oder das Gewicht war schon im Altertum bekannt, und auch Vorläufer der Energie kann man schon bei Aristoteles erkennen. Dass es sich dabei um dieselbe Größe handelt, steht in Einsteins berühmter Veröffentlichung aus dem Jahr 1905: „Die Masse eines Körpers ist ein Maß für dessen Energieinhalt.“

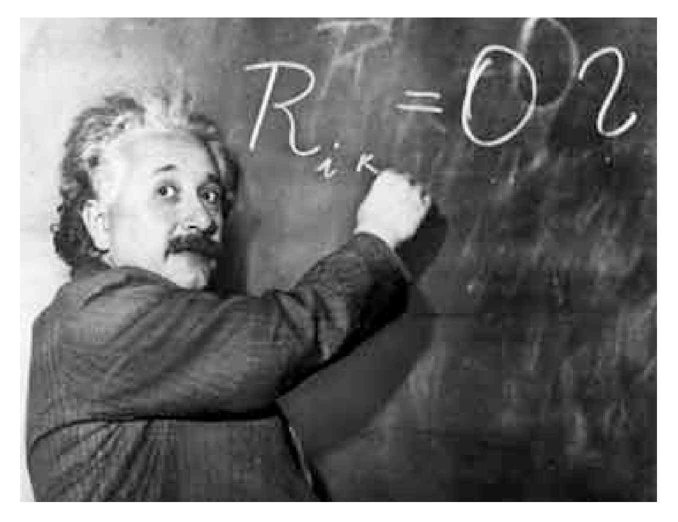


Abb. 7.1
Albert Einstein

Da die Masse in Kilogramm und die Energie in Joule gemessen wird, können wir nicht einfach schreiben: Masse = Energie, sondern es wird noch ein Umrechnungsfaktor k gebraucht:

$$E = k \cdot m,$$

wobei $k = 8{,}987 \cdot 10^{16}$ J/kg ist.

Mit dieser Gleichung kann man also eine Angabe in kg in eine Angabe in Joule umrechnen, so wie man eine Längenangabe von Kilometern in Meilen umrechnen kann. So wie sich eine Meter-Angabe und eine Meilen-Angabe auf dieselbe physikalische Größe beziehen, beziehen sich auch eine Angabe in Joule und eine in Kilogramm auf dieselbe Größe.

Eigentlich brauchte man auch nur noch ein einziges Symbol und einen einzigen Namen für die Größe Masse/Energie. Entsprechend der alten Gewohnheit nennt man sie aber Masse, wenn man sie in Kilogramm angibt und Energie, wenn man die Maßeinheit Joule verwendet.

Wenn wir im Folgenden den Umrechnungsfaktor k benutzen, genügt es meist, dass wir näherungsweise

$$k = 9 \cdot 10^{16} \text{ J/kg}$$

setzen.

> Masse und Energie sind dieselbe physikalische Größe.
> Wenn man sie in kg misst, nennt man sie Masse (m), wenn man sie in J misst, Energie (E).
>
> $E = k \cdot m$ $k = 8{,}987 \cdot 10^{16}$ J/kg

Wenn diese Behauptung wahr ist – und das ist sie –, müssen zweierlei Aussagen zutreffen:

1. Energie muss die Eigenschaften beschreiben, die wir bisher nur von der Masse kannten: Trägheit und Schwere. Wir betrachten eine Batterie: Sie müsste im geladenen Zustand (d.h. wenn sie mehr Energie enthält) schwerer sein, als im ungeladenen. Oder irgendein Körper, den wir erwärmen, müsste im warmen Zustand schwerer sein als im kalten.

2. Masse muss die Eigenschaften beschreiben, die wir bisher nur von der Energie kannten: Man muss mit ihr etwas antreiben können, etwa einen Generator. Wir nehmen also irgendein wertloses Material, Sand zum Beispiel. Man müsste mit dem Sand, nur weil er eine Masse hat, etwas antreiben können.

Beide Aussagen klingen zunächst unsinnig. Dass sie doch zutreffen, merkt man normalerweise nicht. Wir werden jetzt sehen warum.

7.2 Energie hat die Eigenschaften von Masse

Nach Einsteins Entdeckung hat Energie Gewicht. Wie viel Joules einem Kilogramm entsprechen, sagt uns die Gleichung $E = k \cdot m$.

Nach dieser Behauptung müsste zum Beispiel gelten (Abb. 7.2):

- Eine volle Batterie ist schwerer als eine leere.
- Warmes Wasser ist schwerer als kaltes.
- Zwei getrennte Magneten sind schwerer als zwei zusammenhängende.
- Ein Auto ist um so schwerer, je schneller es fährt.

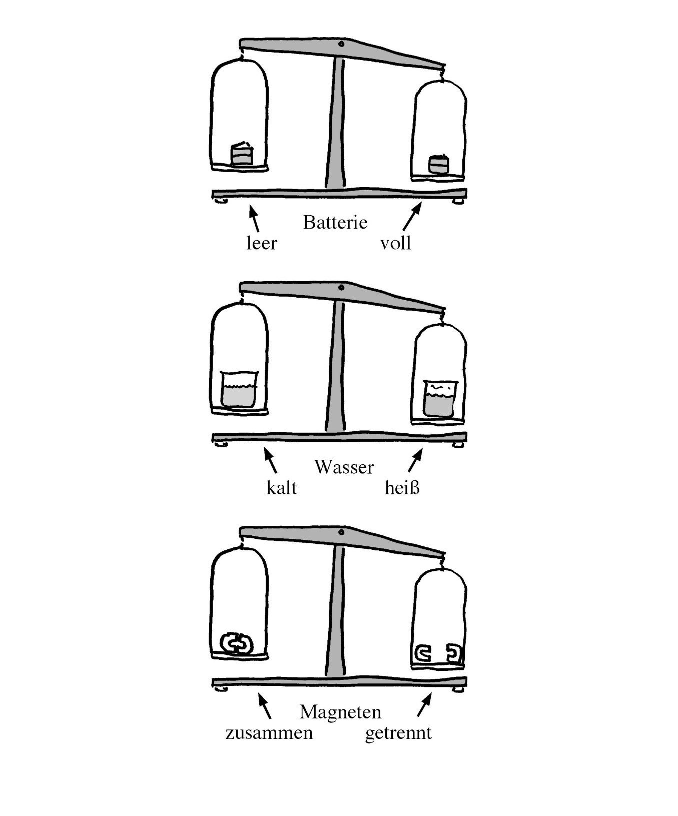


Abb. 7.2
Eine volle Batterie ist schwerer als eine leere, warmes Wasser ist schwerer als kaltes, getrennte Magneten sind schwerer als zusammenhängende.

Warum man hiervon gewöhnlich nichts merkt, siehst du sofort, wenn du nachrechnest, um wie viel Kilogramm sich die Masse der genannten Gegenstände ändert.

Wir betrachten als Beispiel eine Monozelle. Beim Entladen gibt sie eine Energiemenge von etwa 10 kJ ab. Um wie viel wird sie dabei leichter?

Wir berechnen

$$m = \frac{E}{k} = \frac{10\,\text{kJ}}{9 \cdot 10^{16}\,\text{J/kg}} = 1{,}1 \cdot 10^{-13}\,\text{kg}.$$

Die Masse der Batterie wird um einen Betrag geringer, der kleiner ist als die Masse eines Staubkörnchens. (Ein typisches Staubkörnchen wiegt etwa 10^{-12} kg.) Und das kann man mit einer gewöhnlichen Waage nicht feststellen.

Ähnlich kleine Werte findet man für den Massenunterschied zwischen einem langsamen und einem schnellen Auto oder zwischen dem kalten und dem warmen Wasser.

Die Erkenntnis, dass die Energie „Masseneigenschaften“ hat, scheint also gar keine praktischen Auswirkungen zu haben. Gibt es denn überhaupt eine Situation, bei der man die Massenänderung bemerkt? Andernfalls wäre die Behauptung ja gar nicht beweisbar. Tatsächlich gibt es solche Situationen, z.B.:

- wenn man Teilchen wie Elektronen oder Protonen in einem „Teilchenbeschleuniger“ mit sehr viel Impuls lädt;
- wenn man die Protonen eines Atomkern, die durch sehr starke Felder zusammengehalten werden, voneinander trennt.

Aufgaben

1. Der jährliche Verbrauch der Stadt Hamburg an elektrischer Energie beträgt etwa $5 \cdot 10^{16}$ J. Wie groß ist diese Energie in Masseneinheiten?

2. Die Sonne gibt mit dem Licht Energie ab. Um wie viel kg wird die Sonne dadurch pro Sekunde leichter? (Was du zur Berechnung brauchst: Mit dem Licht kommen am Ort der Erde pro Quadratmeter etwa 1400 W an. Der Abstand Erde - Sonne beträgt 150 Millionen Kilometer.)

3. Das Sonnenlicht, das pro Sekunde auf einen Quadratmeter (senkrecht zu den Sonnenstrahlen) fällt, transportiert eine Energiemenge von etwa 1400 Joule. Wie schwer ist die entsprechende Lichtmenge? Wie lange müsste man warten, bis auf den Quadratmeter 1 Gramm Licht gefallen ist?

4. Um ein Auto auf 100 km/h zu beschleunigen, braucht man eine Energiemenge von etwa 500 kJ. Um wie viel wird das Auto dadurch schwerer? Beim Beschleunigen verliert das Auto gleichzeitig Masse, weil es Benzin verbraucht. Schätze ab, ob das Auto insgesamt schwerer oder leichter wird.

7.3 Masse hat die Eigenschaften von Energie

Wenn Masse und Energie identisch sind, müsste man mit einem beliebigen Stoff, nur weil er eine Masse hat, all die nützlichen Dinge anstellen können, für die man Energie braucht, etwa Fahrzeuge und Maschinen antreiben oder Häuser heizen. Der Stoff brauchte nicht ein spezieller Brennstoff oder Treibstoff zu sein. Es müsste genügen, dass er Masse hat – und die hat schließlich jeder Stoff.

Man müsste also zum Beispiel Sand als Treibstoff benutzen können. Wir wollen nachrechnen, wie viel Sand man braucht, um ein Auto anzutreiben.

Die Gleichung

$$E = k \cdot m$$

sagt uns, dass 1 kg Sand (oder 1 kg eines beliebigen anderen Stoffes) die Energiemenge

$$E = 9 \cdot 10^{16}\ \text{J/kg} \cdot 1\ \text{kg} = 9 \cdot 10^{16}\ \text{J}$$

enthält. Beim Verbrennen in einem gewöhnlichen Motor gewinnt man aus 1 kg Benzin $4{,}3 \cdot 10^{7}$ J. Dem Kilogramm Sand entspricht eine zwei Milliarden mal größere Energiemenge, denn

$$2\,000\,000\,000 \cdot 4{,}3 \cdot 10^{7}\ \text{J} \approx 9 \cdot 10^{16}\ \text{J}.$$

Ist das denn möglich? Muss hier nicht ein Fehlschluss vorliegen?

Tatsächlich ist die Rechnung richtig. Falsch ist nur der Schluss, dass man mit dem Sand ein Auto antreiben kann. Dass Energie nicht immer brauchbar ist, um etwas anzutreiben, ist schließlich eine bekannte Tatsache.

Ein Beispiel, das dir sicher sofort einleuchtet: Um ein Haus zu heizen, reicht es nicht aus, dass man genügend Heizöl hat. Man braucht außerdem noch Sauerstoff für die Verbrennung des Heizöls. Gäbe es keinen Sauerstoff, so wäre das Heizöl wertlos. Wir wären nicht imstande, die Energie auf einen anderen Träger umzuladen – und darauf kommt es an. Wir brauchen also außer dem Heizöl noch einen geeigneten Reaktionspartner.

Ganz ähnlich verhält es sich mit den riesigen Energiemengen, die jeder Stoff auf Grund seiner Masse enthält. Auch um diese Energie zu nutzen, um sie auf einen anderen Energieträger umzuladen, braucht man einen geeigneten Reaktionspartner.

Der Reaktionspartner, den man hier braucht, ist so genannte *Antimaterie*. Antimaterie ist eine Form der Materie, die in der Natur fast nicht vorkommt.

Man kann Antimaterie künstlich herstellen, braucht dazu aber sehr viel Energie: genauso viel Energie wie es der Masse der hergestellten Antimaterie entspricht. Man gewinnt dabei also nichts.

Es ist außerdem praktisch unmöglich, Antimaterie länger als Bruchteile einer Sekunde aufzubewahren. Sie reagiert sehr, sehr schnell mit gewöhnlicher Materie.

Es gab Spekulationen, ob Teile des Weltalls, die weit von uns entfernt sind, aus Antimaterie bestehen. Diese haben sich aber nicht bestätigt.

7.4 Ruhmasse und Ruhenergie

Die Identität von Masse und Energie hat Konsequenzen für die ganze Physik. Es stellt sich heraus, dass viele altbekannte Gleichungen durch neue ersetzt werden müssen.

Aber wie kann das sein? Hatten sich die alten Gleichungen denn nicht bewährt? Hatten sie die Welt nicht korrekt beschrieben? Wenn sie falsch sind – hätte man das nicht von Anfang an merken müssen? Es ist wie bei den Erscheinungen, die wir im vorangehenden Abschnitt diskutiert haben. Dass die Gleichungen nicht stimmen, merkt man nur unter extremen Bedingungen: wenn man sehr, sehr genau misst, oder wenn die Geschwindigkeit der Körper sehr, sehr hoch ist. Die alten, „klassischen“ Gleichungen sind also unter normalen Umständen gute Näherungen der korrekteren „relativistischen“ Gleichungen.

Besonders merkwürdige Konsequenzen ergeben sich für die Mechanik. Um diese geht es im Folgenden.

Aus der „nichtrelativistischen“ oder „klassischen“ Mechanik kennen wir den Zusammenhang zwischen kinetischer Energie und Geschwindigkeit:

$$E_{\mathrm{kin}}(v) = \frac{m_0}{2} v^2 .$$

Du weißt aber, dass die kinetische Energie nur ein Teil der gesamten Energie eines Körpers ist. Die Gesamtenergie müsste man so schreiben:

$$E(v) = \frac{m_0}{2} v^2 + E_0 . \qquad (1)$$

Hier ist E_0 die Energie, die der betrachtete Körper hat wenn seine Geschwindigkeit und sein Impuls null sind, seine *Ruhenergie*. Wie groß E_0 ist, sagt uns aber die klassische Physik nicht. Sie sagt uns darum auch nicht, wie groß die Gesamtenergie E eines Systems ist. Dieser Mangel war dir bisher sicher gar nicht aufgefallen.

Wenn man nun

$$E = k \cdot m$$

berücksichtigt, verschwindet dieser Mangel. Die Energie bei $v = 0$ ist bis auf den Faktor k gleich der Masse bei $v = 0$, und die kennen wir natürlich. Man nennt die Masse bei $v = 0$ die *Ruhmasse* m_0 des Körpers.

Ruhenergie E_0: Energie bei $v = 0$
Ruhmasse m_0: Masse bei $v = 0$

$$E_0 = k \cdot m_0$$

Lass dich durch das Wort Ruhenergie nicht täuschen. Mit $v = 0$ ist gemeint, dass die Geschwindigkeit des Schwerpunkts null ist. Ein System, dessen Schwerpunkt ruht, kann aus Teilen oder Teilchen bestehen, die sich bewegen. Das ist zum Beispiel der Fall beim Sonnensystem. Sonne, Planeten und Monde drehen sich um die eigene Achse und umeinander. Das bedeutet, dass die Ruhenergie des ganzen Sonnensystems größer ist als die Summe der Ruhenergien seiner Teile. Für das Sonnensystem ist dieser Unterschied allerdings so winzig, dass er praktisch keine Rolle spielt. Trotzdem bezeichnet man der Klarheit wegen die Ruhenergie manchmal auch als *innere Energie*.

7.5 Wie die Geschwindigkeit vom Impuls abhängt

Wir wollen nun die Auswirkungen der Identität von Masse und Energie auf den Zusammenhang zwischen Impuls und Geschwindigkeit untersuchen:

$$p = m \cdot v.$$

Was passiert, sieht man besser, wenn man die Gleichung umformt:

$$v = \frac{p}{m}. \qquad (2)$$

Nach unseren alten, klassischen Vorstellungen sagt die Gleichung: Wenn man einem Körper Impuls zuführt, nimmt seine Geschwindigkeit zu. Ist m klein, so nimmt die Geschwindigkeit stark zu, ist m groß, so nimmt sie nur wenig zu.

Wir laden nun einen Körper mit Impuls, am besten portionsweise: eine Impulsportion nach der anderen. Mit jeder Impulsportion nimmt auch die Energie des Körpers zu. Damit wächst aber die Masse im Nenner von Gleichung (2). Der Körper wird also träger. Je größer aber m wird, desto kleiner wird die Geschwindigkeitszunahme mit jeder Impulsportion. Wenn wir sehr, sehr viel Impuls zugeführt haben, nimmt die Geschwindigkeit schließlich gar nicht mehr zu. In anderen Worten: Bei Impulszufuhr nähert sich die Geschwindigkeit „asymptotisch" einer *Grenzgeschwindigkeit*. Diese Grenzgeschwindigkeit hat für alle Körper, Teilchen oder sonstigen Objekte denselben Wert, nämlich

$$v_{\text{grenz}} = \sqrt{k}.$$

Wie auch k, ist die Grenzgeschwindigkeit eine universelle Naturkonstante. Man bezeichnet sie mit dem Symbol c. Es ist:

$$v_{\text{grenz}} = c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}.$$

Der mathematische Zusammenhang zwischen v und p ist:

$$v(p) = \frac{p}{\sqrt{m_0^2 + \left(\frac{p}{c}\right)^2}}. \qquad (3)$$

Er ist in Abb. 7.3 für 3 Körper dargestellt, die sich in ihrer Ruhmasse unterscheiden.

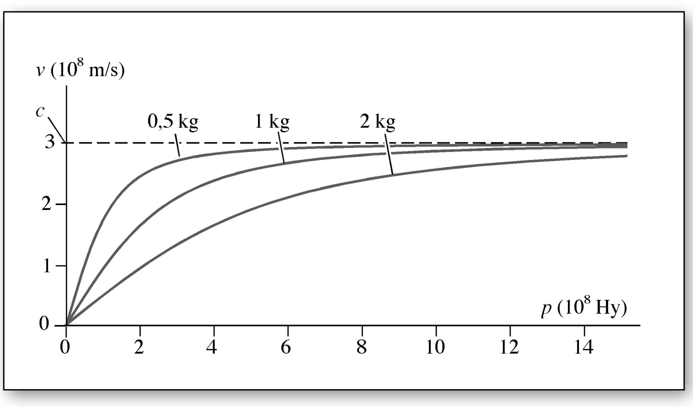


Abb. 7.3
Abhängigkeit der Geschwindigkeit vom Impuls für Körper mit den Ruhmassen 0,5 kg, 1 kg und 2 kg. Für große Impulswerte geht die Geschwindigkeit aller Körper gegen die Grenzgeschwindigkeit c.

Du siehst, dass die Geschwindigkeit für sehr große Impulswerte in jedem der drei Fälle gegen c geht. Das sieht man auch Gleichung (3) an. Bei großen Werten von p kann man den ersten Summanden unter der Wurzel gegen den zweiten vernachlässigen. Es wird also:

$$v(p) \approx \frac{p}{\sqrt{\left(\frac{p}{c}\right)^2}} = c.$$

Für Bewegungen, die wir aus unserer normalen Erfahrung kennen, ist die Geschwindigkeit sehr viel kleiner als c, also $v c$. Selbst Geschwindigkeiten, die uns als groß erscheinen, wie die eines ICE, oder sogar die Geschwindigkeit der Erde auf ihrer Umlaufbahn um die Sonne, sind, verglichen mit c noch winzig. Die Erde bewegt sich mit 110 000 km/h ≈ 30 000 m/s um die Sonne. Das ist nur ein Zehntausendstel der Grenzgeschwindigkeit. In Abb. 7.3 ist der entsprechende Punkt vom Nullpunkt des Graphen gar nicht zu unterscheiden. Wenn wir Gleichung (3) auf solche Bewegungen anwenden, können wir unter der Wurzel den ersten Summanden gegen den zweiten vernachlässigen, und der v-p-Zusammenhang wird:

$$v(p) \approx \frac{p}{m_0}.$$

Der relativistische Zusammenhang geht also für Geschwindigkeiten $v \ll c$ in den klassischen Zusammenhang über.

Man sieht das auch an dem Graphen der Abbildung 7.3: In unmittelbarer Nähe des Nullpunktes sehen die Kurven aus wie Geraden mit unterschiedlichen Steigungen. Abb. 7.4 zeigt einen 100 000 mal vergrößerten Ausschnitt. (Beachte, dass die Achsen anders geeicht sind.)

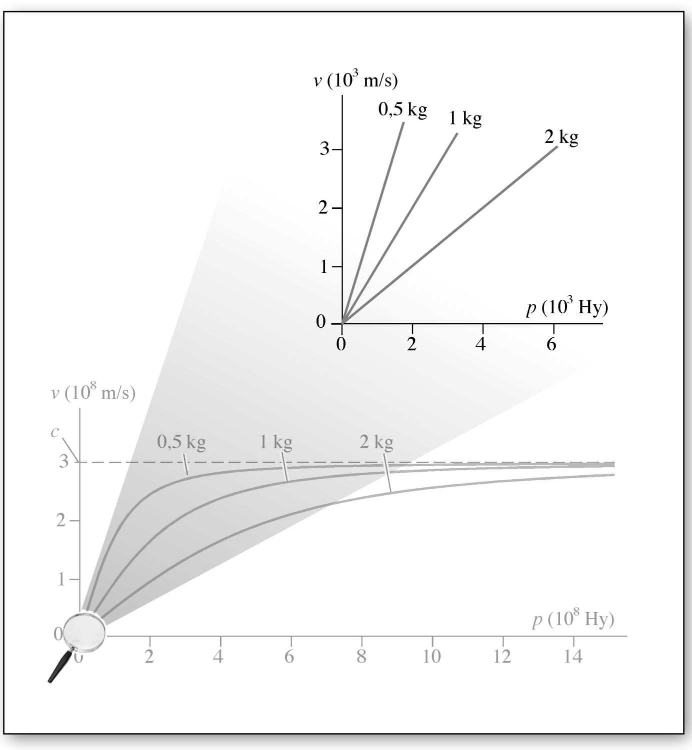


Abb. 7.4
Abhängigkeit der Geschwindigkeit vom Impuls. Der Ausschnitt zeigt den Anfang der Kurven sehr stark vergrößert. Hier ist die Geschwindigkeit zum Impuls proportional.

$$v(p) = \frac{p}{\sqrt{m_0^2 + \left(\frac{p}{c}\right)^2}}$$

Große Werte des Impulses:

Geschwindigkeit ist unabhängig vom Impuls

$v \approx c.$

Kleine Werte des Impulses:

Geschwindigkeit ist proportional zum Impuls

$$v(p) \approx \frac{p}{m_0}.$$

7.6 Die Geschwindigkeit bei Bezugssystemwechsel

Wir kommen zurück zur Gleichung

$$E = k \cdot m .$$

Aus ihr folgt, dass es eine Grenzgeschwindigkeit

$$v_{\text{grenz}} = \sqrt{k} = c$$

gibt. Mit dieser Grenzgeschwindigkeit bekommen wir nun ein Problem.

Wir stellen uns vor: Ein Auto fährt auf einem langen und breiten Transportband, Abb. 7.5. Es fährt relativ zum Transportband mit 15 m/s, und das Transportband läuft mit 8 m/s in dieselbe Richtung.

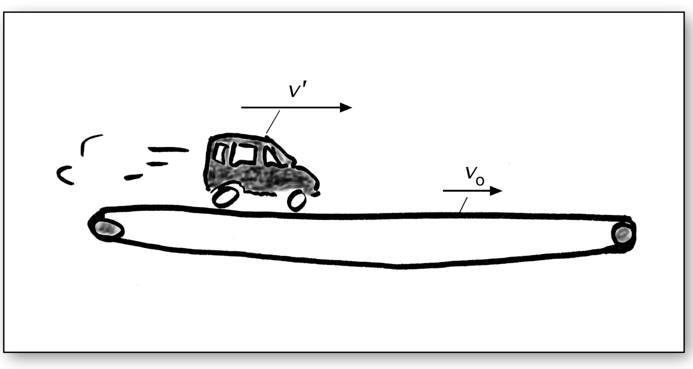


Abb. 7.5
Die Geschwindigkeit des Autos relativ zur Erde ist gleich der Geschwindigkeit des Autos relativ zum Transportband v' plus die Geschwindigkeit des Transportbandes v_0, aber nur näherungsweise.

Wir stehen daneben und schauen zu, und sehen, dass sich das Auto relativ zu uns mit 23 m/s bewegt. Das können wir auch so ausdrücken: Im Bezugssystem des Transportbandes bewegt sich das Auto mit der Geschwindigkeit

$$v' = 15 \text{ m/s}.$$

Im Bezugssystem der Erde bewegt sich das Transportband mit

$$v_0 = 8 \text{ m/s}$$

und das Auto mit

$$v = v' + v_0 = 15 \text{ m/s} + 8 \text{ m/s} = 23 \text{ m/s}.$$

So weit ist alles schön und gut. Wir lassen nun aber (in Gedanken) unser Auto mit der Geschwindigkeit 0,6c relativ zum Transportband fahren. Dagegen ist nichts einzuwenden, denn die Geschwindigkeit ist kleiner als die Grenzgeschwindigkeit. Wir lassen aber auch das Transportband schneller laufen, nämlich mit 0,8c. Auch das kann nicht verboten sein, denn es ist weniger als c. Das Problem bekommen wir, wenn wir nach der Geschwindigkeit des Autos relativ zur Erde fragen. Nach unserer alten Gleichung

$$v = v'' + v_0 \qquad (4)$$

bekommen wir 1,4c heraus – und das darf nicht sein. Wenn wir nicht daran zweifeln wollen, dass c die Grenzgeschwindigkeit ist, so bleibt nur, dass Gleichung (4) falsch sein muss. Und das ist sie auch. Die richtige Gleichung kann aus der Forderung, dass c die Grenzgeschwindigkeit ist, hergeleitet werden. Da die Herleitung mühsam ist, betrachten wir gleich das Ergebnis und prüfen, ob es die erwarteten Geschwindigkeitswerte liefert. Statt (4) gilt

$$v = \frac{v' + v_0}{1 + \frac{v' v_0}{c^2}} .$$

Wir gehen verschiedene Spezialfälle durch, bei denen wir das Ergebnis schon im Voraus wissen.

$v' \ll c$ und $v_0 \ll c$

Wenn sowohl v' als auch v_0 sehr klein ist im Vergleich zu c, so wird der Term

$$\frac{v' v_0}{c^2}$$

im Nenner viel kleiner als 1 und wir können ihn gegenüber der eins vernachlässigen. Wir bekommen damit

$$v = v' + v_0 ,$$

d.h. unsere alte Formel für „nichtrelativistische“ Geschwindigkeiten.

$v' \approx c$ und $v_0 < c$

Wir lassen nun das Auto relativ zum Transportband mit fast Grenzgeschwindigkeit fahren: $v' \approx c$, das Transportband bewege sich mit einer Geschwindigkeit $v_0 < c$. Wir bekommen

$$v = \frac{v' + v_0}{1 + \frac{v' v_0}{c^2}} = \frac{c + v_0}{1 + \frac{c v_0}{c^2}} = \frac{c + v_0}{1 + \frac{v_0}{c}} = \frac{c \cdot (c + v_0)}{c + v_0} = c .$$

d.h. von der Erde aus gesehen fährt das Auto auch nur mit der Grenzgeschwindigkeit. Die Grenzgeschwindigkeit wird nicht überschritten.

$v' \approx c$ und $v_0 \approx c$

Schließlich lassen wir auch das Transportband mit fast Grenzgeschwindigkeit laufen. Wir bekommen

$$v = \frac{v' + v_0}{1 + \frac{v' v_0}{c^2}} = \frac{c + c}{1 + \frac{cc}{c^2}} = \frac{c + c}{2} = c .$$

Wieder bewegt sich das Auto im Bezugssystem der Erde nur mit der Geschwindigkeit c.

Unser Gedankenexperiment können wir auch so beschreiben: Wir setzen die Bewegung des Autos relativ zur Erde zusammen aus einer Bewegung des Autos relativ zum Transportband und der Bewegung des Transportbandes relativ zur Erde.

> Bei der Zusammensetzung von Bewegungen werden die Geschwindigkeiten v' und v_0 nicht addiert, sondern es gilt:
>
> $$v = \frac{v' + v_0}{1 + \frac{v' v_0}{c^2}} .$$

Aufgaben

1. Das Raumschiff Uranus fliegt mit 0,9c relativ zur Erde. Ihm kommt Wostok entgegen. Wostok hat relativ zur Erde eine Geschwindigkeit von 0,5c. Wie schnell erscheint Wostok der Uranus-Besatzung? Uranus überholt Shenzhou, das mit 0,5c in die gleiche Richtung fliegt wie Uranus. Wie schnell ist Shenzhou relativ zu Uranus?

2. Ein Auto fährt mit v' = 140 km/h, zufälligerweise gerade in dieselbe Richtung, in der die Erde (mit v_0 = 30 km/s) um die Sonne läuft. Um wie viel ist das Auto von außerhalb der Erde gesehen schneller als die Erde? Die Lösung wird einfacher, wenn du zunächst $v - v_0$ berechnest ohne Zahlen einzusetzen und Summanden, die nicht ins Gewicht fallen rechtzeitig vernachlässigst.

7.7 Wie die Energie vom Impuls abhängt

Für den Zusammenhang zwischen Energie und Geschwindigkeit hatten wir gefunden (Gleichung (1)):

$$E(v) = \frac{m}{2}v^2 + E_0.$$

Wir formen die Gleichung mit Hilfe von $p = m \cdot v$ um und erhalten:

$$E(p) = \frac{p^2}{2m} + E_0\,. \qquad (5)$$

Auch diese Gleichung gilt nur in klassischer Näherung, d.h. für Impulswerte, die nicht zu groß sind. Der relativistische Zusammenhang lautet:

$$E(p) = \sqrt{c^2 \cdot p^2 + E_0^2} \qquad (6)$$

Wieder wollen wir untersuchen, wie sich die relativistische Gleichung mit der klassischen verträgt.

Abb. 7.6 zeigt den Funktionsgraphen von Gleichung (6) für drei verschiedene Ruhmassen: 1 kg, 2 kg und 3 kg.

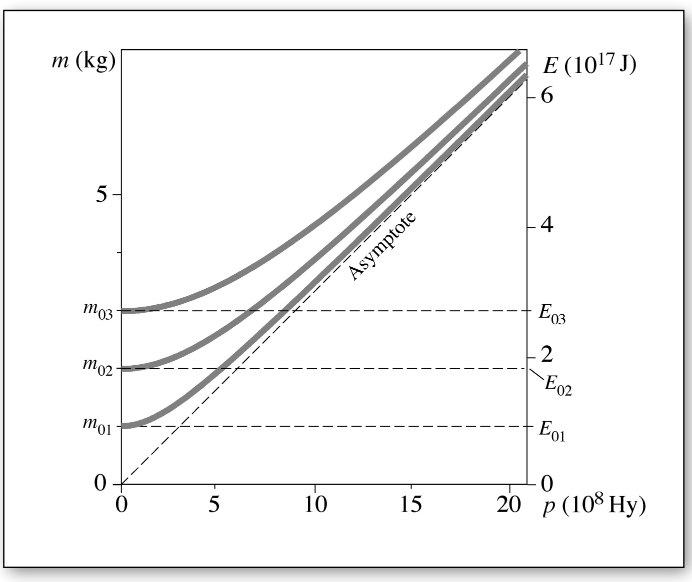


Abb. 7.6
Zusammenhang zwischen Energie und Impuls für Körper mit den Ruhmassen 1 kg, 2 kg und 3 kg. Alle drei Kurven nähern sich der Asymptote $E = c \cdot p$.

Die Hochachse ist die Masse/Energie, links in der Einheit Kilogramm und rechts in Joule. Die Querachse geht bis zu sehr großen Impulswerten.

Wir betrachten wieder die beiden Grenzfälle: sehr großer Impuls und kleiner Impuls.

Für große Impulswerte können wir in Gleichung (5) E_0 gegen $c \cdot p$ vernachlässigen, und wir erhalten

$$E(p) \approx c \cdot p\,.$$

Die Gleichung der Asymptote ist

$$E(p) = c \cdot p\,.$$

Die Kurve nähert sich also für große p-Werte der Asymptote. In anderen Worten: Für große p-Werte ist die Energie zum Impuls proportional.

Nun zu den kleinen Impulswerten. Abb. 7.7 zeigt den klassischen und den relativistischen Energie-Impuls-Zusammenhang, also die Graphen der Funktionen (5) und (6).

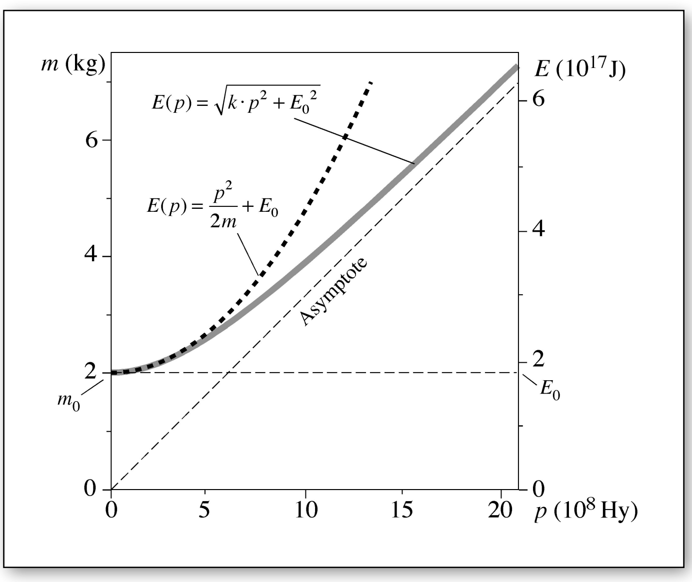


Abb. 7.7
Für kleine Impulswerte wird die relativistische Kurve durch die klassische gut angenähert.

Man sieht, dass die Funktionen für kleine Impulswerte nahezu deckungsgleich sind. Die klassische Formel (4) ist für kleine Geschwindigkeiten, also für $v \ll c$ eine gute Näherung.

$$E(p) = \sqrt{c^2 \cdot p^2 + E_0^2}$$

Große Werte des Impulses:

Energie ist proportional zum Impuls

$E(p) \approx c \cdot p$

Kleine Werte des Impulses:

Energie ändert sich quadratisch mit dem Impuls

$$E(p) = \frac{p^2}{2m} + E_0$$

Aufgaben

1. Berechne aus den Ausdrücken für $v(p)$ und $E(p)$ den Zusammenhang $E(v)$. Stelle den Zusammenhang graphisch dar. Interpretiere den Funktionsverlauf. Bei welcher Geschwindigkeit ist ein Körper doppelt so schwer wie im Zustand der Ruhe?

2. Ein Teilchen (z.B. ein Elektron) wird mit Hilfe eines elektrischen Feldes gleichmäßig mit Impuls geladen. (Es geht ein konstanter Impulsstrom in das Teilchen hinein.) Stelle graphisch dar: $p(t)$, $E(t)$ und $v(t)$.

7.8 Teilchenbeschleuniger

Wozu Teilchenbeschleuniger?

Die Materie besteht aus Molekülen, die Moleküle bestehen aus Atomen, die Atome aus Protonen, Neutronen und Elektronen, die Protonen und die Neutronen aus Quarks. Es gibt also eine Hierarchie von Bausteinen oder Teilchen. Außer den hier aufgezählten Teilchen gibt es noch andere, von denen man aber normalerweise kaum etwas merkt.

Von manchen Teilchen merkt man nichts, weil sie in der Natur sehr selten sind, etwa Myonen, Antielektronen, Antiprotonen oder Antineutronen. Man kann diese Teilchen aber in größeren Mengen künstlich erzeugen. Von anderen Teilchen merkt man nichts, weil sie mit der uns vertrauten Materie fast nicht „wechselwirken“: Sie fliegen durch die Materie fast ungehindert hindurch. Hierzu gehören die Neutrinos, die von der Sonne kommen, und die Teilchen der dunklen Materie, über die man noch nicht viel weiß.

Ein wichtiges Gerät zur Erforschung der Bausteine der Materie ist der Teilchenbeschleuniger. Man belädt Teilchen – meist Elektronen oder Protonen – mit sehr viel Impuls und Energie und schießt sie auf ein *Target*, d.h. irgendwelche ruhende Materie, oder noch besser, man schießt Teilchen entgegengesetzten Impulses aufeinander. Dabei entstehen neue Teilchen, und zwar sehr viele. Manche dieser neuen Teilchen haben nur eine extrem kurze Lebenszeit und zerfallen in andere Teilchen. Es findet also eine Folge von Teilchenumwandlungen statt. Die neu entstehenden Teilchen werden nun untersucht: Man misst ihre Energie, ihren Impuls und ihre elektrische Ladung, und man sieht nach, mit welcher Häufigkeit sie in einer Reaktion auftreten.

Zum Aufbau einer Beschleunigeranlage

Die Teilchen (Protonen oder Elektronen) bewegen sich in einem evakuierten (= luftleeren) Rohr. Da sie elektrisch geladen sind, können sie in einem elektrischen Feld Impuls aufnehmen – und damit auch Energie (genauso wie ein Körper auf Grund seiner Masse im Gravitationsfeld Impuls und Energie aufnimmt).

In größeren Beschleunigern bilden die Teilchen nicht einen durchgehenden Strahl, sondern sie bewegen sich bündelweise durch die Maschine. Bei jedem Umlauf durchläuft ein Bündel mehrere Beschleunigungsstrecken, d.h. Bereiche mit einem elektrischen Feld. Auf jeder Beschleunigungsstrecke bekommt das Bündel einen „Kick“, d.h. eine Portion Impuls und eine Portion Energie.

(Das elektrische Feld muss dabei immer ein- und wieder ausgeschaltet werden. Mit einem konstanten elektrischen Feld kann man die Teilchen auf einer Kreisbahn nicht beschleunigen. Denn dann würden sie bei einem Teil des Umlaufs durch das Feld beschleunigt und auf einem anderen Teil wieder gebremst.)

Damit die Teilchen nicht geradeaus, sondern auf einer gekrümmten Bahn fliegen, braucht man magnetische Felder. Bei einem Ringbeschleuniger befinden sich daher auf den ganzen Ring verteilt Elektromagnete.

Der LHC

Eine große Protonen-Beschleuniger-Anlage befindet sich beim CERN in Genf. Der Hauptring ist der LHC-Ring (*Large Hadron Collider*). Ihm sind vier kleinere Beschleuniger vorgeschaltet. Der erste davon ist ein Linearbeschleuniger („Linac“).

Abb. 7.8 zeigt einen Aufriss der Anlage. Sie befindet sich in etwa 100 m Tiefe unter der Erde. Dargestellt ist der Weg, den die Protonen durch die 5 Beschleuniger nehmen. Der Hauptring hat einen Umfang von 27 km. Vom vorletzten Beschleunigerring werden die Protonen in entgegengesetzte Richtungen in den LHC eingeleitet. In der Abbildung steht auch, auf welche Energie die Teilchen in den einzelnen Beschleunigern gebracht werden. Der „Proton-Synchrotron-Booster“ bringt sie auf das 1,5-fache ihrer Ruhmasse m_0, das „Proton-Synchrotron“ bringt sie auf 20 m_0, das „Super-Proton-Synchrotron“ auf 400 m_0 und der LHC schließlich auf 7000 m_0.

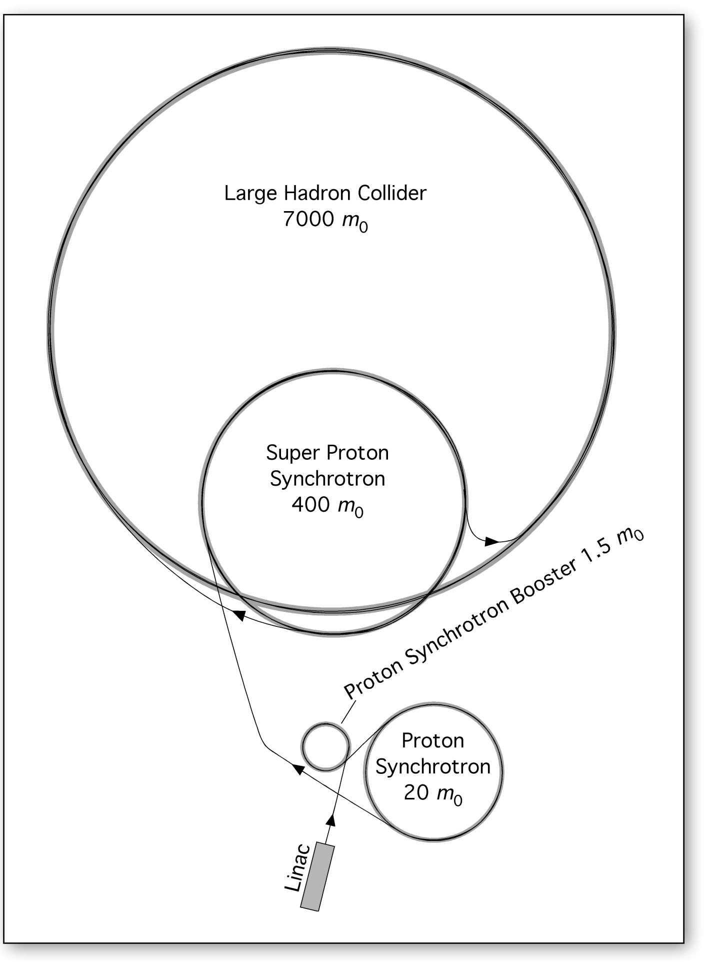


Abb. 7.8
LHC-Beschleunigeranlage am CERN. Der große Ring hat einen Umfang von 27 km. Die Anlage befindet sich in einem Tunnel unter der Erde.
Nicht dargestellt sind:
- die Magneten, die den Strahl auf die nahezu kreisförmige Bahn zwingen;
- die Beschleunigerstrecken, die über die Ringe verteilt sind;
- die Detektoren.

Die Protonenbündel werden im LHC in etwa 20 Minuten auf ihre Endenergie von 7000 · E_0 gebracht. Sie zirkulieren dann für mehrere Stunden im Ring herum. Es befinden sich immer 2808 Bündel gleichzeitig im LHC-Ring. Jedes Bündel enthält am Anfang etwa 10^{11} Protonen.

An einigen Stellen kreuzen gegeneinander laufende Bündel ihren Weg. Hier können aus gegenläufigen Protonen neue Teilchen entstehen, und hier stehen daher riesige *Detektoren,* mit denen diese Teilchen nachgewiesen und ausgemessen werden.

Teilchenbeschleuniger-Anlage

Teilchen werden mit Energie und Impuls geladen und zum Zusammenstoß gebracht. Es entstehen neue Teilchen, darunter auch solche mit einer viel höheren Ruhenergie als die der Ausgangsteilchen.

Welche Reaktionen möglich sind

Auch ohne die Einzelheiten der Teilchenreaktionen zu kennen, können wir etwas über solche Vorgänge aussagen: Es müssen die allgemeinen Erhaltungssätze erfüllt sein. Energie, Impuls und elektrische Ladung von Ausgangsteilchen und Produkt-Teilchen müssen gleich sein. Daneben gelten noch andere Erhaltungssätze.

Da jedes der beiden zusammenstoßenden Protonen eine Energie von 7000 · E_0 mitbringt, steht für die Reaktion 14 000 · E_0 zur Verfügung. Es können also Teilchen erzeugt werden, deren Ruhmasse sehr viel größer ist als die des Protons.

Noch etwas zu dem Namen „Beschleuniger“. Wir haben ihn benutzt, weil es eine historische Gewohnheit ist, aber eigentlich passt er nicht recht. Wenn die Protonen aus der dritten Beschleunigerstufe herauskommen, haben sie eine Masse von 20 m_0. Ihre Geschwindigkeit ist damit fast gleich der Grenzgeschwindigkeit. Sie werden also in den beiden folgenden „Beschleunigerstufen“ kaum noch schneller.

Beim LHC kommt noch hinzu, dass die Protonen nur für 20 Minuten mit Energie geladen werden und dann stundenlang nur noch mit konstanter Energie im Kreis herumlaufen. Daher nennt man einen Ring wie den LHC auch einen *Speicherring*. Hier werden hochenergetische Teilchen gespeichert.

Aufgaben

Welche Geschwindigkeit haben die Protonen nach der 2., 3., 4. und 5. Beschleunigerstufe der LHC-Anlage? Es wird das Ergebnis von Aufgabe **1**, Abschnitt 7.7 gebraucht. Gib das Ergebnis in Einheiten *c* an, d.h. wie viel mal *c* ist die jeweilige Geschwindigkeit?

7.9 Licht

Es gibt Teilchen, deren Ruhmasse null ist: die Photonen, d.h. die Teilchen, aus denen das Licht besteht. Wenn wir in Gleichung (3) $m_0 = 0$ setzen, erhalten wir:

$$v = c.$$

Photonen bewegen sich also immer mit der Grenzgeschwindigkeit.

Ruhmasse oder Ruhenergie null bedeutet aber nicht, dass die Photonen keine Energie haben. Man sieht dem Licht die Energie seiner Photonen sogar gut an: Je größer die Frequenz f des Lichts, desto größer ist die Energie der entsprechenden Photonen:

$$E = h \cdot f\,.$$

h ist eine universelle Naturkonstante, die *Planck-Konstante*. Es ist

$$h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}\ \text{Js}.$$

Die Photonen von violettem Licht (hohe Frequenz) haben also mehr Energie als die des roten Lichts.

Der Energie-Impuls-Zusammenhang der Photonen ist sehr einfach. Mit $E_0 = 0$ wird aus Gleichung (6)

$$E(p) = c \cdot p\,.$$

Als Masse ausgedrückt haben wir:

$$m \cdot c^2 = c \cdot p\,,$$

oder

$$m = \frac{p}{c}\,.$$

Die Erscheinung, die wir jetzt diskutieren, sieht zunächst recht harmlos aus. Es wird sich aber herausstellen, dass sie merkwürdige Konsequenzen hat.

Wenn man einen Körper im Gravitationsfeld der Erde nach oben bewegt, also auf ein höheres Gravitationspotenzial bringt, muss man dem Körper Energie zuführen. Die Energie behält der Körper nicht. Er gibt sie gleich weiter an das Gravitationsfeld.

Du hattest die Formel

$$\Delta E = m \cdot (\psi_2 - \psi_1)$$

kennengelernt. m ist die Masse des Körpers und

$$\psi = g \cdot h$$

das Gravitationspotenzial (g = Feldstärke, h = Höhe).

Nun können wir aber die Masse mithilfe unserer neuen Gleichung $E = k \cdot m$ ersetzen:

$$\Delta E = \frac{E}{k} \cdot \Delta\psi\,.$$

Umgeformt ergibt sich die „relative Energieänderung“, d.h. die Energieänderung dividiert durch die Gesamtenergie:

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta\psi}{k}\,. \qquad (7)$$

Wir wenden die Gleichung auf das Licht an. Wir wissen, dass die Energie der Photonen mit der Frequenz des Lichts zusammenhängt:

$$E = h \cdot f\,.$$

Damit gilt auch

$$\Delta E = h \cdot \Delta f\,,$$

und wir können Gleichung (7) umformen:

$$\frac{\Delta f}{f} = \frac{\Delta\psi}{k}\,.$$

Das Ergebnis ist zunächst nicht aufregend. Wir betrachten ein Beispiel: das Licht einer Straßenlaterne. Die Laterne befinde sich in 4 m Höhe. Auf seinem Weg nach unten nimmt nach unserer Formel die Frequenz zu. Wir wollen berechnen um wie viel. Mit Δh = 4 m und g = 10 N/kg wird die Differenz des Gravitationspotenzials:

$$\Delta\psi = 40\ \text{Nm/kg} = 40\ \text{J/kg}.$$

Mit $k = 9 \cdot 10^{16}$ J/kg erhalten wir:

$$\frac{\Delta f}{f} = 4{,}4 \cdot 10^{-16}\,,$$

$$\Delta f = 4{,}4 \cdot 10^{-16}\, f.$$

Die Frequenz nimmt um einen winzigen Bruchteil der ursprünglichen Frequenz f zu. Immerhin konnte man diesen Effekt experimentell bestätigen, allerdings nicht mit dem Licht einer Straßenlaterne.

7.10 Uhren im Gravitationsfeld

Um besser zu verstehen, was für merkwürdige Folgen dieser Effekt hat, wollen wir uns vorstellen, die Frequenzänderung sei größer als sie in Wirklichkeit ist. Willy wohnt im obersten Stockwerk eines Hochhauses, Lilly im Erdgeschoss, Abb. 7.9.

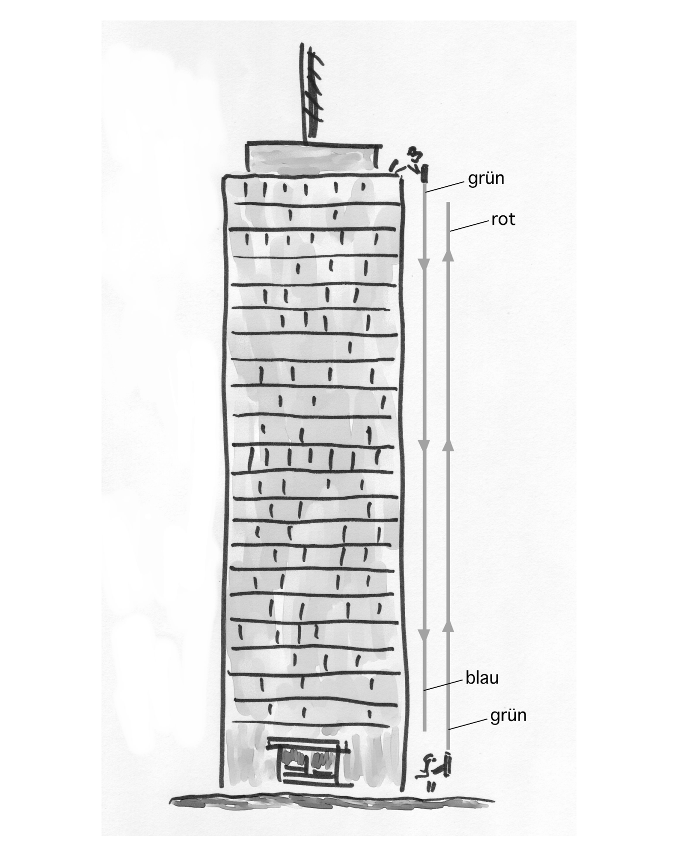


Abb. 7.9
Die Energie (und die Frequenz) des Lichts, das nach oben läuft nimmt ab. Die des Lichts, das nach unten läuft, nimmt zu. Lilly hat den Eindruck, dass Willys Zeit schneller vergeht, und Willy hat den Eindruck, dass Lillys Zeit langsamer läuft.

Willy und Lilly wollen in einem Experiment feststellen, ob die Formel für die Frequenzänderung des Lichts richtig ist.

Willy leuchtet mit einem grünen Laser nach unten. Auf seinem Weg nimmt die Energie des Lichts, und damit die Frequenz zu, und unten bei Lilly kommt blaues Licht (höhere Frequenz) an. Auch Lilly hat einen grünen Laser und sie leuchtet nach oben. Dieses Licht verliert beim Aufsteigen Energie, seine Frequenz nimmt ab. Wenn es bei Willy ankommt ist es rot.

Nun hat Willy eine Uhr, deren Gang durch die Frequenz des Lichts gesteuert wird. Und auch Lilly hat eine solche Uhr. Willy (oben) schließt daher, dass Lillys Uhr langsamer geht als seine eigene. Und Lilly (unten) kommt zu demselben Schluss: Willys Uhr geht schneller. Man will prüfen, ob diese Schlussfolgerung stimmt. Willy und Lilly treffen sich auf halber Höhe und gleichen ihre Uhren ab, d.h. stellen sie so, dass beide die gleiche Zeit anzeigen. Dann geht Willy wieder nach oben und Lilly nach unten. Nach einer Weile treffen sie sich wieder in der Mitte und vergleichen die Uhren. Wie es auf Grund unserer Formel zu erwarten war, zeigen die Uhren nicht mehr dasselbe an. Willys Uhr geht im Vergleich zu Lillys Uhr vor. Der Grund dafür ist nicht etwa, dass die Uhren einen Defekt haben. Bei Willy ist die mehr Zeit vergangen als bei Lilly. Nehmen wir an, Willy und Lilly seien Zwillinge, also zur gleichen Zeit geboren. Willy, der im Hochhaus oben wohnt, würde, von Lilly aus gesehen, schneller altern als Lilly, oder Lilly würde im Vergleich zu Willy langsamer altern.

Diese Erscheinung ist bekannt unter dem Namen *Zwillingsparadoxon* (meist wird eine etwas andere Rahmengeschichte dazu erzählt). Unter einem *Paradoxon* versteht man eine Behauptung, die widersprüchlich zu sein scheint, es aber tatsächlich nicht ist.

Zurück zur Realität. Das Einzige, was an unserer Geschichte nicht stimmt ist, dass der Effekt so groß ist.

Also wieder einer der relativistischen Effekte, die zwar amüsant sind, aber nirgends eine Rolle spielen? Nicht ganz. Auf der Erde spielt er dort eine Rolle, wo es auf sehr genaue Frequenzmessungen ankommt, und das ist beim GPS der Fall. Bei der Positionsberechnung mit dem GPS muss dieser Effekt berücksichtigt werden.

Es gibt aber auch Orte in der Welt, wo der unterschiedliche Gang von Uhren im Gravitationsfeld sehr groß ist: in der Umgebung von schwarzen Löchern. Schwarze Löcher sind Himmelskörper mit sehr ungewöhnlichen Eigenschaften. Bevor wir uns mit Zeiteffekten in der Umgebung schwarzer Löcher beschäftigen, wollen wir uns einen Überblick über die wichtigsten Himmelskörper beschaffen.

Zwei Personen trennen sich, gehen an Stellen verschiedenen Gravitationspotenzials und treffen sich wieder. Für die Person, die auf dem hohen Gravitationspotenzial war, ist mehr Zeit vergangen.

Aufgaben

1. Das Hochhaus ist 400 m hoch. Willy und Lilly leben dort zwei Jahre lang. Um wie viel ist Willy in dieser Zeit mehr gealtert als Lilly.

2. Nimm an, dass der Effekt des Schnelleralterns viel größer ist: Willy altert zweimal so schnell wie Lilly. Wie wirkt sich das auf das alltägliche Leben von Willy und Lilly aus?

7.11 Himmelskörper

Einzelobjekte

Es gibt Himmelskörper von sehr unterschiedlicher Größe, Masse, Zusammensetzung und Temperatur. Von einer gewissen Masse an ist jeder Himmelskörper nahezu kugelrund. Jede größere Abweichung von der Kugelgestalt würde zerfließen, so wie auf der Erde ein „Berg“ aus Wasser zerfließt: Das Wasser fließt dahin, wo das Gravitationspotenzial niedriger ist, Abb. 7.10. Die Gebirge, die auf der Erde ständig neu entstehen, bringen es auch nur auf eine Höhe von weniger als 10 km. Auch sie fließen (sehr langsam) zum niedrigeren Gravitationspotenzial.

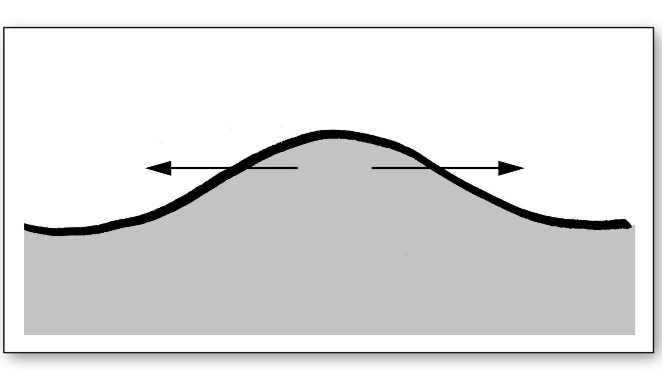


Abb. 7.10
Das Wasser fließt zu Stellen niedrigeren Gravitationspotenzials.

Die meisten Himmelskörper, die man nachts mit bloßem Auge sieht, sind Sterne. Keine Sterne sind der Mond und die Planeten.

Planeten

Die acht Planeten Merkur, Venus, Erde, Mars, Jupiter, Saturn, Uranus und Neptun (Aufzählung von innen nach außen) bewegen sich auf nahezu kreisförmigen Bahnen um die Sonne. Im Innern eines Planeten wird so gut wie keine Wärme produziert. An seiner Oberfläche ist er relativ kalt. Die Oberfläche der Venus hat im Mittel etwa 500 °C, die von Neptun –200 °C. 500 °C ist im Vergleich zur Temperatur an der Oberfläche der Sonne ein niedriger Wert.

Die Massen der Planeten sind sehr klein im Vergleich zur Masse eines typischen Sterns (siehe die Tabelle in Abschnitt 4.7). Auch andere Sterne haben Planeten, aber deren Beobachtung ist schwierig, weil sie so klein sind und weil sie nicht selbst leuchten.

Monde sind den Planeten ähnliche Himmelskörper. Ein Mond umkreist immer einen Planeten.

Planet:
- umkreist die Sonne
- ist klein im Vergleich zur Sonne
- ist relativ kalt

Sonnenartige Sterne

Ein typisches Beispiel für einen Stern ist die Sonne. Dass wir sie viel größer und heller sehen als die anderen Sterne, liegt einfach daran, dass sie uns viel näher ist. Die Massen der Sterne liegen etwa im Bereich von 1/100 bis 100 mal die Sonnenmasse.

Der weitaus größte Teil der Masse eines Sterns befindet sich in einem kleinen inneren Bereich. Bei der Sonne befinden sich 90 % der Masse innerhalb des halben Sonnenradius. Man kann also fast sagen, „die Sonne sieht größer aus als sie ist“.

In einem noch kleineren inneren Kern der Sonne läuft bei einer Temperatur von 16 Millionen Kelvin eine Kernreaktion: Wasserstoff verwandelt sich sehr langsam in Helium. Später entstehen aus dem Helium auch höhere Elemente. Die bei der Reaktion produzierte Entropie fließt mit der zugehörigen Energie nach außen: von der hohen Temperatur der Reaktionszone zur „niedrigen“ Temperatur (etwa 5800 K) an der Oberfläche. Auf dem Weg nach außen wird weitere Entropie erzeugt. Von der Oberfläche aus verlassen Entropie und Energie die Sonne mit dem Licht. Wegen ihrer hohen Temperatur ist das Material der Sonne, auch im Innern, gasförmig.

Sonnenartiger Stern:
- ist gasförmig
- im Innern läuft eine Kernreaktion ab

Weiße Zwerge

Sie entstehen aus nicht zu schweren sonnenartigen Sternen, wenn deren „Kernbrennstoff“ nicht mehr reicht, um die Kernreaktion aufrecht zu erhalten, wenn sie also „ausgebrannt“ sind. Sie sind nicht gasförmig, sondern befinden sich in einem Zustand, der eher dem der Erde ähnelt, nur ist die Materie „durch das eigene Gewicht“, d.h. durch das Gravitationsfeld sehr stark komprimiert. Ihre Dichte ist etwa 10^3 kg/cm^3.

Die Massen der weißen Zwerge liegen etwa zwischen 0,5 und 0,7 Sonnenmassen, ihre Durchmesser betragen einige Tausend Kilometer. Sie leuchten noch, aber nur dadurch, dass sie sich abkühlen. Wegen ihrer Kleinheit kann man weiße Zwerge mit bloßem Auge am Nachthimmel nicht sehen. Ein weißer Zwerg besteht aus Kohlenstoff und Sauerstoff, den Reaktionsprodukten der Reaktion in dem Stern, aus dem er entstanden ist.
Für weiße Zwerge gilt ein ungewöhnlicher Zusammenhang: Je größer die Masse eines weißen Zwerges, desto kleiner ist sein Durchmesser.

Weißer Zwerg:
- ist ein ausgebrannter Stern
- Materie ist durch das Gravitationsfeld stark komprimiert
- leuchtet, indem er sich abkühlt
- je größer die Masse, desto kleiner der Durchmesser

Rote Riesen

Sie stellen ein Zwischenstadium dar auf dem Weg der Entwicklung eines sonnenartigen Sterns zum weißen Zwerg. Der Durchmesser eines roten Riesen ist etwa hundert mal so groß wie der des Sterns, aus dem er entstanden ist. Seine Größe kommt nur dadurch zustande, dass sich die ohnehin schon leichte Hülle des Ausgangssterns stark vergrößert. Verursacht wird diese Ausdehnung durch den starken Lichtstrom, der von dem kleinen Kern ausgeht. Diese Strahlung bläst die Hülle regelrecht auf, und bläst sie schließlich ganz weg, sodass nur noch der Kern, der inzwischen ein weißer Zwerg geworden ist, übrig bleibt. Für einen roten Riesen gilt also noch mehr, dass er eigentlich „viel größer aussieht als er ist“.

Roter Riese:
- Hülle ist durch Strahlung stark aufgeblasen
- Zwischenstadium auf dem Weg zum weißen Zwerg

Neutronensterne

Ein sonnenartiger Stern, dem der Kernbrennstoff ausgeht, schrumpft zusammen. Wir hatten gesehen, dass dabei ein weißer Zwerg entstehen kann. Wenn nun der Ausgangsstern sehr schwer ist, wird der Druck so hoch, dass kein stabiler weißer Zwerg entstehen kann. Bei hinreichend hohen Drücken reagieren die Elektronen mit den Protonen der Atomkerne zu Neutronen und Neutrinos:

Proton + Elektron → Neutron + Neutrino

Normalerweise, d.h. bei niedrigeren Drücken entstehen aus Protonen und Elektronen keine Neutronen. Im Gegenteil: Neutronen zerfallen spontan in Protonen und Elektronen und Antineutrinos. (Neutrinos und Antineutrinos sind sehr leichte und flüchtige Teilchen.)

Die Neutronen, die aus den Protonen und Elektronen entstanden sind, nehmen viel weniger Platz ein als die Elektronen und Protonen. Es entsteht also viel Platz und der Stern fällt in sich zusammen bis die Neutronen dicht an dicht liegen. Er wird zum *Neutronenstern.* Der Neutronenstern hat einen Durchmesser von nur etwa 20 km, und das bei einer Masse von 1,3 bis 2 Sonnenmassen. Er hat also eine sehr hohe Dichte: etwa 10^{12} kg/cm^3.

Beim Einsturz des Sterns liefert das Gravitationsfeld eine riesige Menge Energie – mehr als die Ruhenergie der Sonne – und es findet eine gewaltige Explosion statt, eine *Supernova*. Dabei wird ein Teil der Materie des ursprünglichen Sterns nach außen weggeschleudert. Eine Supernova ist ein Vorgang, der nicht lange dauert und daher nur selten zu beobachten ist. In unserer Galaxie, der Milchstraße ereignen sich etwa 20 Supernovae pro 1000 Jahre.

Eine Supernova kann noch auf eine andere Art zustande kommen. Ein weißer Zwerg bildet mit einem roten Riesen ein Doppelsternsystem. Nun gelangt vom roten Riesen ständig Materie zum weißen Zwerg. Dadurch nimmt die Masse des weißen Zwerges zu, und damit auch der Druck im Innern. Schließlich wird der Druck so hoch, dass die Reaktion

Proton + Elektron → Neutron + Neutrino

einsetzt und der weiße Zwerg „zusammenbricht“, ähnlich wie ein Haus, das man immer höher und höher baut, bis es schließlich sein eigenes Gewicht nicht mehr aushält und einstürzt.

Neutronenstern:
- ist ein ausgebrannter Stern größerer Masse
- aus Protonen und Elektronen sind Neutronen entstanden
- bei seiner Entstehung findet eine Supernovaexplosion statt

Schwarze Löcher

Wenn die Masse des Sterns, dessen Kernbrennstoff zu Ende geht, noch größer ist, halten auch die Neutronen den hohen Druck nicht aus. Es gibt nun nichts mehr, was den weiteren Einsturz der Materie noch aufhält. Das Endstadium des Sterns ist ein *schwarzes Loch*. Seine Masse ist etwa 5 bis 15 Sonnenmassen.

Von außen, aus großer Entfernung gesehen, erscheint ein schwarzes Loch als eine Kugel von etwa 10 bis 20 km Durchmesser, von der keinerlei Strahlung ausgeht. Wie kommt das? Wenn man sich von außen her dem schwarzen Loch nähert, nimmt das Gravitationspotenzial ab. Von außen gesehen läuft eine Uhr um so langsamer, je näher sie dem Mittelpunkt des schwarzen Loches kommt. In einem bestimmten Abstand vom Mittelpunkt steht sie schließlich ganz. Die entsprechenden Kugelfläche nennt man den *Ereignishorizont.* Uns Außenstehenden erscheint es so, als ob die Zeit am Ereignishorizont stillsteht. Wenn wir einen Gegenstand in das schwarze Loch hineinfallen lassen würden, so würden wir feststellen, dass sich der Gegenstand immer langsamer bewegt, und dass er den Ereignishorizont nie erreicht.

Eine Folge davon ist auch, dass uns nichts – kein Licht und keine Materie – vom Ereignishorizont aus erreichen kann, und schon gar nicht von noch weiter innen.

Schwarzes Loch:
- Masse ist so groß, dass auch die Neutronen den Druck nicht aushalten
- Ein Objekt, das in ein schwarzes Loch hineinfällt, erreicht den Ereignishorizont von außen gesehen nie.

Was wir hier beschrieben haben, nennt man *stellares schwarzes Loch*. Es gibt noch eine andere Klasse schwarzer Löcher. Im Zentrum jeder Galaxis befindet sich ein schwarzes Loch, dass sehr viel größer und schwerer ist als ein stellares schwarzes Loch. Die Masse beträgt 10^6 bis 10^{10} Sonnenmassen.

Sternsysteme

Doppelsternsystem

Doppelsternsystem:
- zwei Sterne kreisen umeinander herum

Zwei Sterne bewegen sich auf geschlossenen Bahnen umeinander herum. Etwa die Hälfte aller Sterne sind Partner in einem Doppelsternsystem. Die Sonne gehört nicht dazu. Die beiden Partner eines Doppelsternsystems können unterschiedlicher Natur sein, also zum Beispiel: der eine ist ein normaler Stern und der andere ein weißer Zwerg, oder der eine ist roter Riese und der andere ein Neutronenstern.

Galaxien und Galaxienhaufen

Die Sterne sind im Weltall nicht gleichmäßig verteilt, sondern in *Galaxien* konzentriert.

Galaxien haben sehr unterschiedliche Größen. Die Galaxie, zu der unser Sonnensystem gehört, ist das Milchstraßensystem. Es erscheint uns nachts als helles Band, das sich über den Himmel zieht, die *Milchstraße*. Von außen würde man sehen, dass sie ungefähr scheibenförmig ist. Sie besteht aus etwa $3 \cdot 10^{11}$ Sternen und hat einen Durchmesser von ungefähr 100 000 Lichtjahren.

Unser nächster Nachbar in etwa 2,5 Millionen Lichtjahren Entfernung ist die Andromeda-Galaxie. Sie ist mit bloßem Auge schwach sichtbar.

Galaxie:
- Ansammlung von vielen Sternen

Quasar:
- Galaxie, die ein schweres schwarzes Loch enthält, in welches Materie hineinstürzt;
- emittiert sehr viel Strahlung

Es gibt Galaxien, von denen sehr viel mehr elektromagnetische Strahlung kommt als von den anderen, normalen Galaxien: die *Quasare*. Die Strahlung kommt vorwiegend aus dem Zentrum des Quasars, in dem sich ein sehr schweres schwarzes Loch befindet, in welches ständig Materie hineinstürzt. Was ein schwarzes Loch ist, werden wir später diskutieren.

Auch die Galaxien sind nicht gleichmäßig im Universum verteilt. Auch sie treten geklumpt auf, in so genannten *Galaxienhaufen*.

Weitere Bestandteile des Universums

Zwei wichtige Bestandteile des Universums, die nicht in unsere bisherige Einteilung passen, müssen noch erwähnt werden.

Die kosmische Hintergrundstrahlung

Wenn man die Teilchenzahlen der verschiedenen Bestandteile des Kosmos betrachtet, stellt man fest, dass den mit Abstand größten Beitrag die Photonen liefern, also die Teilchen des Lichts. Der ganze Raum ist gefüllt mit elektromagnetischer Strahlung im Mikrowellenbereich, d.h. mit Wellenlängen von einigen Millimetern bis Zentimetern (also dieselbe Strahlung, die für Mobiltelefone verwendet wird). Die Anzahl der Photonen ist etwa 10^{10} mal so groß wie die der Materieteilchen, also der Protonen und Neutronen im Universum. Man nennt diese Strahlung die kosmische Hintergrundstrahlung.

Kosmische Hintergrundstrahlung:
- Mikrowellenstrahlung
- 10^{10} mal so viele Photonen wie Materieteilchen

Ihr Beitrag zur Masse der Kosmos ist aber im Vergleich zu dem der Materie sehr gering.

Die dunkle Materie

Dunkle Materie:
- Gesamtmasse ist etwa sechsmal so groß wie die der normalen Materie
- äußert sich durch ihr Gravitationsfeld

Aber auch die Materie, aus der die sichtbaren und unsichtbaren Sterne bestehen, liefert nicht den größten Beitrag zur Gesamtmasse des Universums. Ein etwa sechsmal größerer Beitrag kommt von der *dunklen Materie*. Sie besteht aus Teilchen, die mit den „normalen“ Teilchen, also Protonen, Neutronen, Elektronen und Photonen fast gar nicht wechselwirken. Man spürt sie deutlich nur über ihr Gravitationsfeld.

8

Die Raumzeit

Raum bedeutet so viel wie „Platz für etwas“. Er kann ausgefüllt oder leer sein. Wir können seine Menge angeben. Wir nennen sie Volumen und messen sie in m^3. Wir können einen Punkt im Raum beschreiben durch drei Koordinaten; wir sprechen dann vom Ort.

Auch für die Zeit können wir einen „Punkt“ auf einer Zeitskala angeben, und eine Art Zeitmenge durch ein Intervall auf der Zeitskala. Wir nennen es gewöhnlich Dauer. Gemessen werden Zeitpunkte und -intervalle in Sekunden.

So stellen sich die Begriffe Raum und Zeit in der Alltagswelt dar. Wir werden im Folgenden sehen, dass die moderne, d.h. relativistische Physik uns lehrt, dass Raum und Zeit mehr sind als nur die Bühne, auf der die physikalischen Vorgänge ablaufen.

Wir werden sehen, dass

- Raum und Zeit zusammenhängen und eine Einheit bilden, die *Raumzeit*. Diese ist Gegenstand der so genannten *Speziellen Relativitätstheorie*.
- die Raumzeit Eigenschaften hat, die von Ort zu Ort unterschiedlich sind. Das ist Gegenstand der *Allgemeinen Relativitätstheorie.*

Beide Theorien, oder Beschreibungen der Natur stammen von Einstein.

8.1 Darstellungsfragen, Bezeichnungen

Wir wollen die Bewegung eines Körpers im Raum grafisch darstellen, etwa eines Hubschraubers, eines Vogels oder einer Portion Wasser in der verwirbelten Strömung eines Flusses. Dazu gibt es mehrere Möglichkeiten.

Abbildung 8.1 zeigt die *Bahnkurve* des Körpers. Wir erfahren hier etwas über die Bewegung: nämlich an welchen Orten sich der Körper befunden hat, und in welcher Reihenfolge er diese Orte durchlaufen hat.

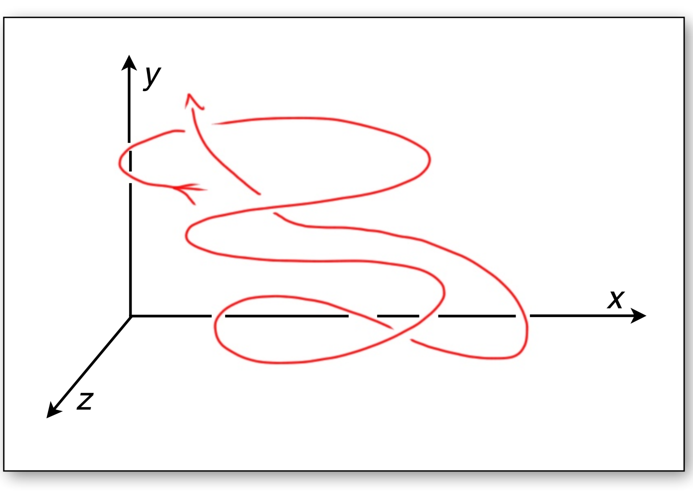


Abb. 8.1
Bahnkurve eines Körpers

Aber damit wissen wir noch nicht alles über die Bewegung. Wir wissen nicht zu welchen Zeiten er an den verschiedenen Orten war. Diesem Mangel können wir abhelfen, Abb. 8.2.

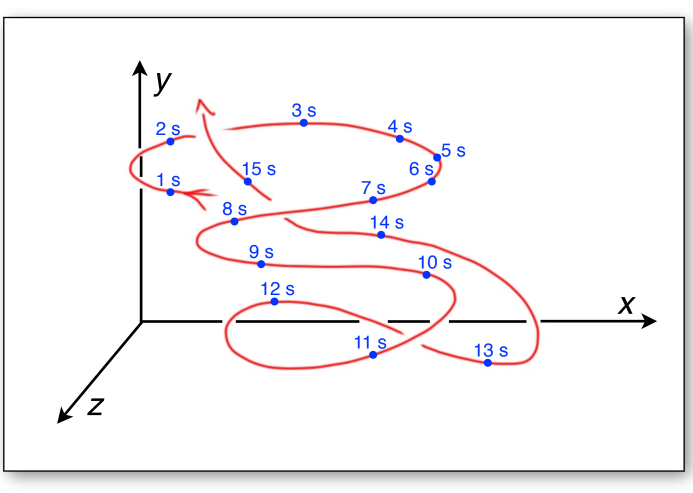


Abb. 8.2
Bahnkurve eines Körpers mit Zeitangaben

Das Bild sagt uns zu welchem Zeitpunkt sich der Körper an welchem Ort befindet. Zu jedem Punkt auf der roten Kurve gehören jetzt 4 Zahlenwerte: drei Ortskoordinaten und eine Zeitangabe. Um die drei Ortskoordinaten darzustellen, haben wir einen Trick angewendet: die perspektivische Darstellung. Du kannst dir vorstellen, dass man die Kurve auch in einem echten dreidimensionalen Koordinatensystem darstellt.

Eigentlich wäre es schön, wenn wir auch die Zeit auf einer Koordinatenachse auftragen könnten. Dazu brauchten wir eine vierte Dimension, und die haben wir nicht. Nun haben wir es aber oft mit Bewegungen in einer Ebene zu tun. Das heißt, dass wir für die Bahnkurve nur zwei Dimensionen brauchen. In diesem Fall können wir die dritte Achse für die Zeit verwenden.

Noch einfacher wird es, wenn die Bewegung nur in einer Richtung erfolgt, so wie etwa bei einem Auto, das auf einer langen geraden Straße fährt – wobei sich seine Geschwindigkeit aber beliebig ändern darf. Dann können wir die Bewegung in einem zweidimensionalen Koordinatensystem darstellen.

Abbildung 8.3 zeigt die Bewegung (und auch den Stillstand) eines Autos. Kannst du die Bewegung in Worten beschreiben?

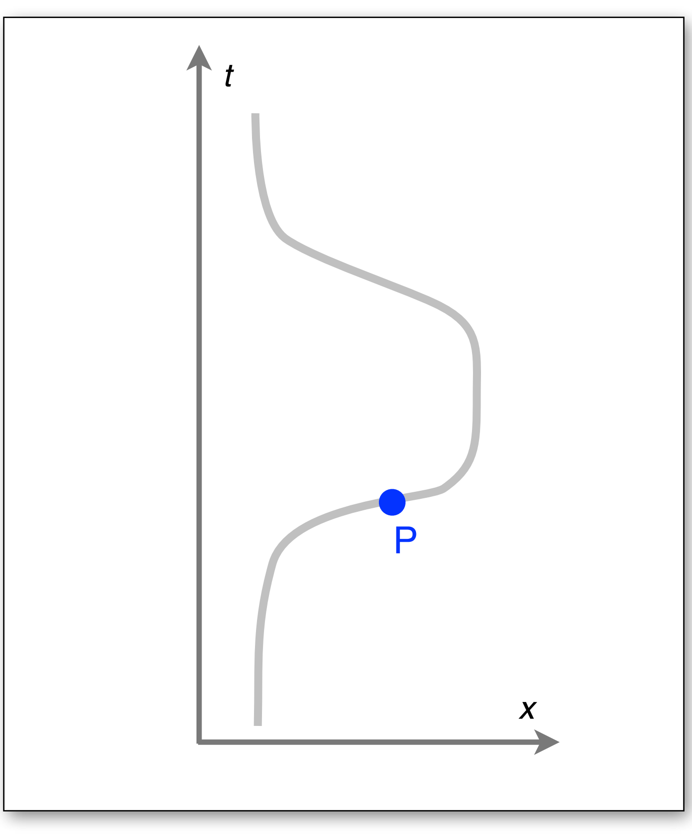


Abb. 8.3
Weltlinie eines bewegten Körpers

Vielleicht fragst du dich, warum die Zeitachse als Hochachse und die Ortsachse als Rechtsachse genommen wurde. Bisher hast du es sicher immer umgekehrt gesehen. Es hat keinen tieferen Grund; es ist in der Raumzeit-Physik, um die es im Folgenden geht, einfach so üblich.

Die graue Linie, die die Bewegung des Autos beschreibt, ist nicht die Bahnkurve des Autos, vergleiche mit oben. Wir brauchen für sie eine neue Bezeichnung. Man nennt sie die *Weltlinie* des Autos.

Einen Punkt auf der Weltlinie, etwa den Punkt P, nennen wir *Raumzeit-Punkt*. Er ist bei uns durch 2 Zahlenwerte charakterisiert: eine Ortsangabe und eine Zeitangabe.

Im Allgemeinen, wenn man dreidimensionale Bewegungen betrachtet, braucht man 4 Zahlenwerte: 3 Ortskoordinaten und eine Zeitkoordinate. Eine Weltlinie wäre damit eine Linie in einem vierdimensionalen Koordinatensystem.

Eine Weltlinie beschreibt die Bewegung eines Körpers. Sie sagt uns, an welchem Ort sich ein Körper zu verschiedenen Zeitpunkten befindet.

Mit der Angabe der räumlichen und zeitlichen Koordinaten, also mit der Angabe des Raumzeit-Punktes, kann man beschreiben, wann und wo ein „Ereignis“ stattfindet.

Willy und Lilly verabreden sich: Sie wollen sich um 11 h vor der Mensa treffen. Das Ereignis ist: „Willy und Lilly treffen sich.“ Der Raumzeit-Punkt ist:

t = 11 h
x = vor der Mensa.

Aufgaben

1. Eine Modelleisenbahn fährt im Kreis herum. Der Radius ist 1 m. Die Lokomotive braucht für eine Runde 10 Sekunden. Eine weitere Lokomotive fährt doppelt so schnell. Zeichne die beiden zugehörigen Weltlinien in einem gemeinsamen Koordinatensystem.

2. Ein Baufahrzeug fährt auf einer geraden Strecke. Wie es fährt, erkennst du an der Bahnkurve mit den Zeitangaben, Abb. 8.4. Zeichne in einem geeigneten Raumzeit-Diagramm die Weltlinie des Fahrzeuges. Trage einige Raumzeit-Punkte ein.

3. In das *t*-*x*-Diagramm von Abb. 8.5 sind vier Weltlinien eingezeichnet. Sie zeigen die Geschichte von 4 Körpern. Zwei der Körper bewegen sich mit konstanter Geschwindigkeit. Welcher ist der schnellere? Von den beiden anderen wird einer schneller, der andere langsamer. Ordne zu.

4. Bei einem Parabelflug erprobt Lilly die Schwerelosigkeit. Sie schwebt. Sie hat ihr Handy nicht richtig festgehalten. Es bekommt einen kleinen Schubs und bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit von Lilly aus gesehen nach oben. Zeichne die Weltlinien von Lilly und ihrem Handy in ein gemeinsames Raumzeit-Diagramm. In diesem Diagramm soll Lilly in Ruhe bleiben.

5. Lilly möchte Frühsport machen und fährt um 8:00 Uhr mit dem Fahrrad los. Sie fährt auf einer geraden Strecke mit einer Geschwindigkeit von 15 km/h. Sie kehrt so um, dass sie den zuhause gebliebenen Willy um 9:00 Uhr trifft.

(a) Zeichne in ein geeignet gewähltes Koordinatensystem die Weltlinien von Lilly und Willy ein.

(b) Gib die Koordinaten der Raumzeitpunkte folgender Ereignisse an:

- Lilly kehrt um.
- Willy und Lilly treffen sich wieder.

6. Abbildung 8.6 zeigt zwei Weltlinien. Erfinde eine Geschichte dazu.

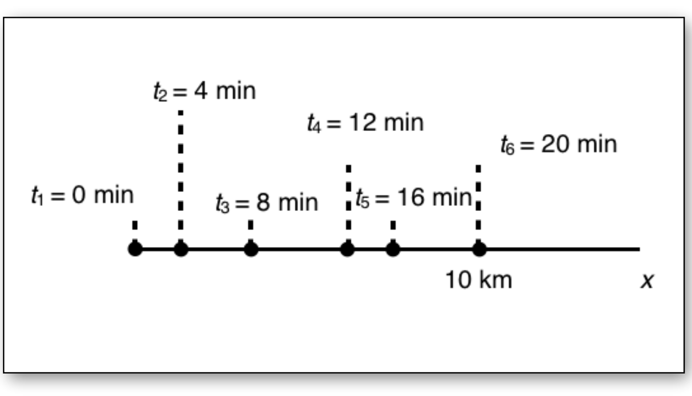


Abb. 8.4
Zu Aufgabe **2**

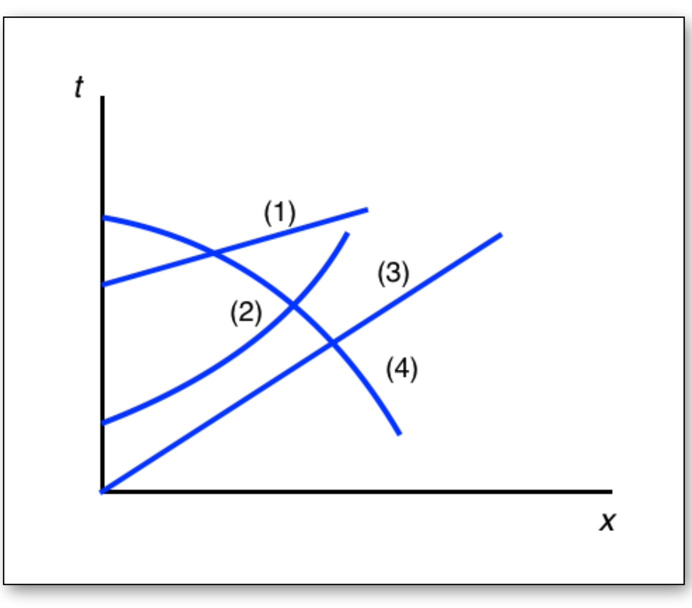


Abb. 8.5
Zu Aufgabe **3**

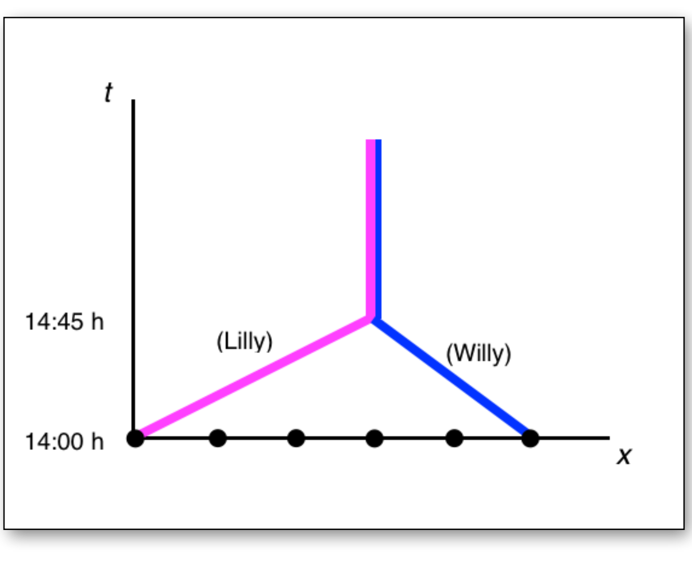


Abb. 8.6
Zu Aufgabe **6**

8.2 Der zeitliche Abstand zwischen zwei Raumzeit-Punkten

Raum und Zeit sind für den Normalbürger unabhängig voneinander. Das sieht man so:

Willy und Lilly haben je eine Stoppuhr. Sie starten ihre Uhren gleichzeitig, trennen sich für eine längere Zeit und treffen sich dann wieder, um zu vergleichen was ihre Uhren anzeigen. Sie zeigen dasselbe an – selbstverständlich, wirst du sagen. So ist eben die Zeit; sie läuft für alle gleich.

Das Merkwürdige ist, dass diese banale Behauptung nicht korrekt ist. Hier, was Willy und Lilly feststellen würden, wenn sie sehr viel genauer messen würden:

Sie starten ihre Uhren gleichzeitig, trennen sich für eine längere Zeit und treffen sich dann wieder, um zu vergleichen was ihre Uhren anzeigen. Die Uhren zeigen etwas Unterschiedliches an. Je nachdem, wie sich die beiden in der Zwischenzeit bewegt haben, zeigt Willys Uhr etwas mehr oder etwas weniger an als Lillys.

Wir wollen der Sache nachgehen.

Wir beschreiben den Vorgang mit Hilfe von Weltlinien.

Damit es nicht zu kompliziert wird, stellen wir uns vor, dass sich Willy und Lilly in einer Gegend des Universums bewegen, in der es keine Himmelskörper gibt, also weit entfernt von Sternen und Planeten. Das Koordinatensystem, das wir benutzen, ist ein frei schwebendes.

Also noch einmal: Willy und Lilly ruhen in ihrem frei schwebenden Koordinatensystem und starten ihre Stoppuhren.

Wir nehmen nun an, Lilly entferne sich in einem Raumschiff; sie fliegt in der Gegend herum, während Willy etwas faul ist; er bleibt wo er ist.

Die Weltlinien von Willy und Lilly zeigt Abbildung 8.7. Da sich Willy nicht von der Stelle bewegt, bleibt seine Ortskoordinate die ganze Zeit konstant: $x = x_0$. Es stellt sich nun heraus, dass Lillys Stoppuhr weniger anzeigt als Willys.

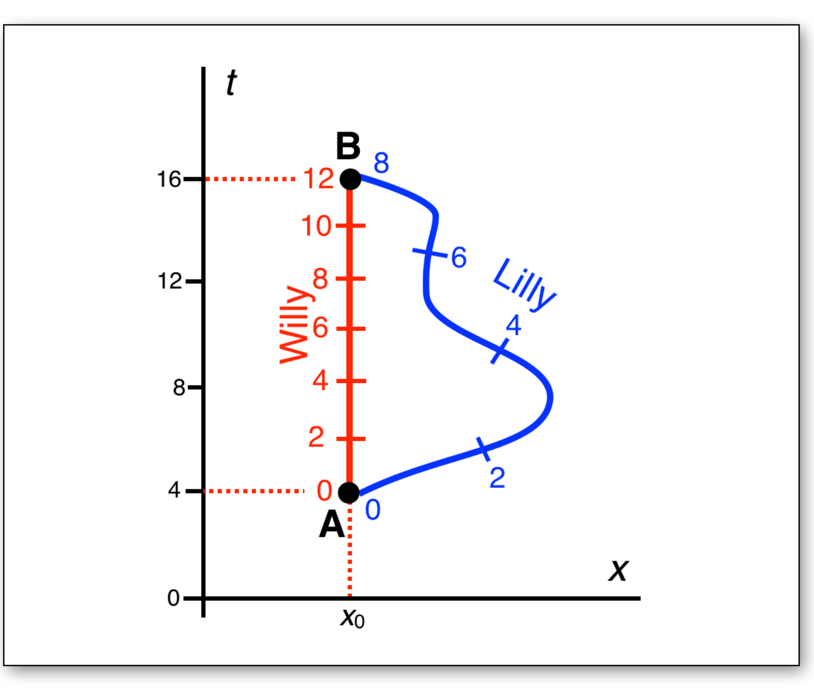


Abb. 8.7
Lillys Stoppuhr zeigt weniger an als Willys.

Sie machen das Experiment noch einmal, und noch viele Male, um herauszufinden, wie man es anstellen muss, damit die Stoppuhr möglichst viel anzeigt, und wie man es erreicht, dass sie möglichst wenig anzeigt. Das Ergebnis ist für beide überraschend. Die längste Zeit ergibt sich, wenn man sich gar nicht bewegt, so wie Willy, Abb. 8.8.

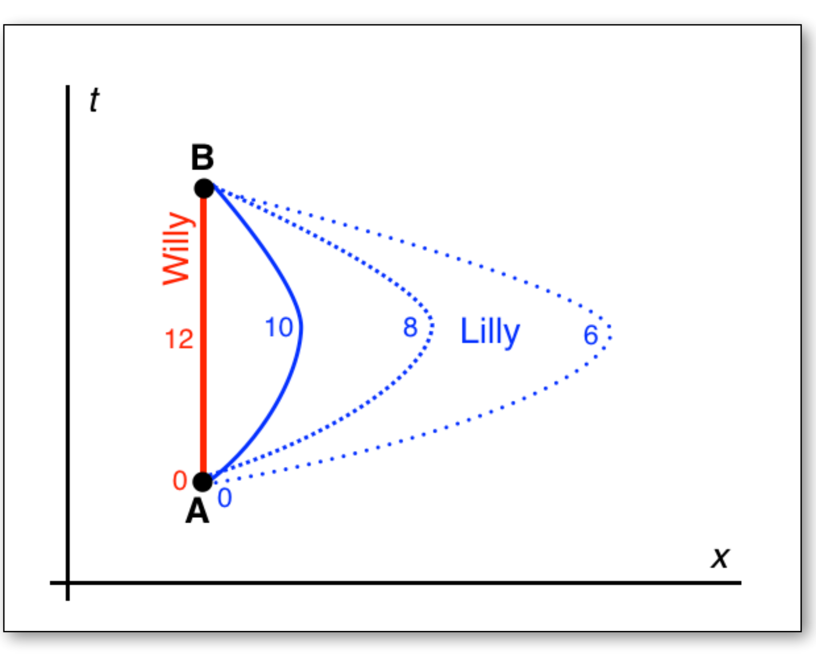


Abb. 8.8
Auf der geraden Weltlinie zeigt die Stoppuhr das Meiste an.

Lillys Uhr zeigt jedes Mal weniger an als Willys, und je schneller sie sich bewegt während sie sich von Willy entfernt und wieder zurückkommt, desto weniger zeigt die Uhr an. Sie schafft es schließlich, sich mit fast der Grenzgeschwindigkeit weg- und wieder zurück zu bewegen, und es stellt sich heraus, dass ihre Uhr dann fast null anzeigt, Abb. 8.9. Dabei hatte sie sich, da sie so schnell war, auch noch sehr weit von Willy entfernt.

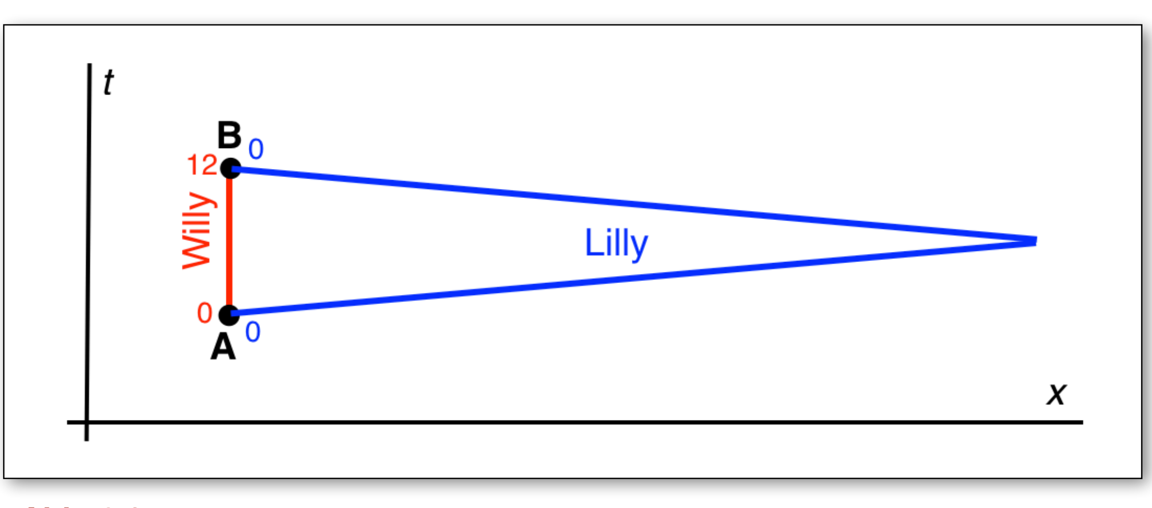


Abb. 8.9
Wenn sich Lilly mit (fast) der Grenzgeschwindigkeit bewegt, altert sie (fast) gar nicht.

Lass dich durch die Abbildung nich täuschen: Die senkrechte Zeitachse entspricht Willys Zeit, weil der sich die ganze Zeit in einem schwebenden Bezugssystem befindet.

Wir haben hier immer von den Werten gesprochen, die eine Stoppuhr anzeigt. Lillys Uhr zeigt weniger an als Willys. Es geht hier aber nicht einfach nur um die Zeigerstellung von zwei Uhren. Für Lillys Uhr vergeht weniger Zeit weil sich die Uhr bewegt. Aber nicht nur die Uhr bewegt sich, sondern auch Lilly selbst und ihr Raumschiff bewegen sich. Auch für Lilly und ihr Raumschiff vergeht also weniger Zeit. Und das heißt auch, dass Lilly zwischen den Raumzeit-Punkten A und B weniger altert als Willy.

Wir können die Beobachtungen zusammenfassen:

> Wenn sich zwei Personen mit ihren Uhren trennen (Ereignis A) und später wieder treffen (Ereignis B), so zeigen die Uhren unterschiedliche Zeiten an.
>
> Für diejenige Person (Uhr), die sich gar nicht bewegt, vergeht die meiste Zeit. Für eine Person (Uhr), die mit (fast) der Grenzgeschwindigkeit von A nach B gelangt, vergeht (fast) keine Zeit.

Noch eine Verallgemeinerung: Willys Uhr zeigt das meiste nicht nur dann, wenn er sich gar nicht bewegt, sondern auch wenn er sich frei schwebend bewegt. Dann liegen die Raumzeit-Punkte im Weltliniendiagramm nicht mehr übereinander, Abb. 8.10.

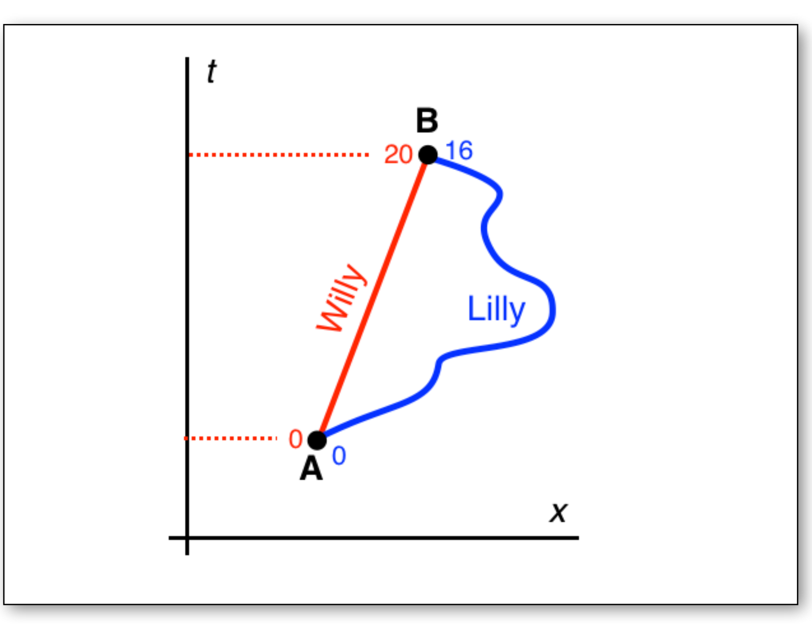


Abb. 8.10
Auf der geraden Weltlinie zeigt die Stoppuhr das Meiste an.

Willys Weltlinie ist nach wie vor eine Gerade, aber diese Gerade ist jetzt gegen die t-Achse geneigt. Es gilt also allgemeiner:

> Für diejenige Person (Uhr), die sich frei schwebend bewegt, vergeht die meiste Zeit. Für eine Person (Uhr), die mit (fast) der Grenzgeschwindigkeit von A nach B gelangt, vergeht (fast) keine Zeit.

Oder etwas griffiger formuliert:

> Auf der geraden Weltlinie vergeht die meiste Zeit.

In dieser einfachen Form gelten die Regeln allerdings nur, solange keine Gravitationsfelder vorhanden sind, die von schweren Körpern, d.h. Sternen oder Planeten verursacht werden.

Dass die Uhren, nachdem sie sich eine Weile auf unterschiedlichen Wegen mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten bewegt haben, unterschiedliche Werte anzeigen, entspricht nicht unserer normalen Erfahrung. Und vielleicht findest du, dass das schwer zu verstehen ist. Eine ähnliche Erscheinung ist dir aber sehr vertraut. Vielleicht macht sie die Uhrengeschichte etwas plausibler.

Bisher ging es darum, dass sich zwei Personen mit je einer Uhr an einem *Raumzeit-Punkt* A trennen, und an einem anderen *Raumzeit-Punkt* B wieder treffen.

Unsere andere Geschichte geht so: Willy und Lilly trennen sich an einem *Ort* A und treffen sich wieder an einem *Ort* B, Abb. 8.11. Achtung: A und B stehen jetzt nicht für Raumzeit-Punkte, sondern für Orte im gewöhnlichen Raum – etwa zwei Städte. Beide, Willy und Lilly, fahren mit je einem Auto von A nach B, aber auf verschiedenen Wegen.

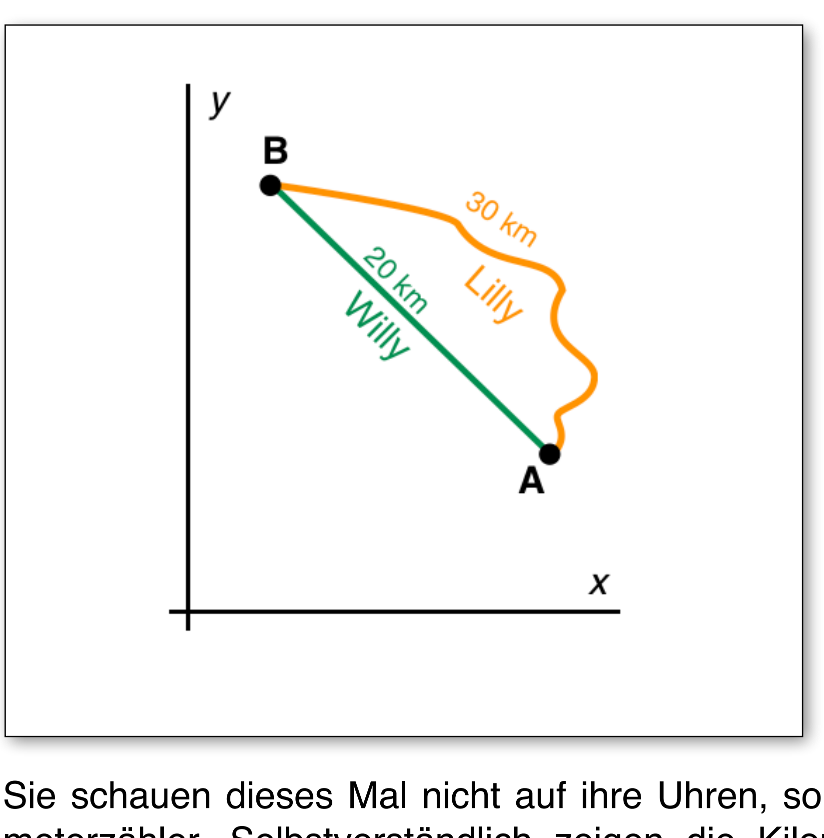


Abb. 8.11
Auf der geraden Linie zeigt der Kilometerzähler das Wenigste an.

Sie schauen dieses Mal nicht auf ihre Uhren, sondern auf die Kilometerzähler. Selbstverständlich zeigen die Kilometerzähler, wenn Willy und Lilly bei B angekommen sind, unterschiedliche Entfernungen an. Sie können auch die verschiedensten Verbindungen ausprobieren, und stellen fest: Jedes mal zeigt der Kilometerzähler etwas anderes an. Auch hier gibt es aber eine ausgezeichnete Verbindung: nämlich die Straße, die zwischen A und B völlig gerade verläuft. Für sie ist die Entfernung am kleinsten. Alle anderen Wege sind länger. Der längste Weg, den man sich denken kann, wäre unendlich lang. Wir könnten also die folgende Regel formulieren:

> Wenn sich zwei Personen mit ihren Kilometerzählern trennen (Ort A) und später wieder treffen (Ort B) so zeigen ihre Kilometerzähler unterschiedliche Weglängen an.
>
> Für diejenige Person (Kilometerzähler), die sich geradeaus bewegt, ist die Länge am kleinsten.

Wir haben es also mit einer „Analogie“ zu tun, Tabelle 8.1.

normaler Ortsraum	Raumzeit
Ort (Raumpunkt)	Raumzeit-Punkt
Kilometerzähler	Uhr
Bewegung auf einer Gerade: kleinste Entfernung	frei schwebende Bewegung: größter zeitlicher Abstand

Tabelle 8.1
Analogie zwischen Bahnkurve im Raum und Weltlinie in der Raumzeit

Aufgaben

1. Fünf verschiedene Weltlinien beschreiben 5 „Reisen“, Abb. 8.12. Alle starten zum Zeitpunkt t_1 an einem gemeinsamen Ort und treffen sich zum Zeitpunkt t_2 wieder am selben Ort. Die gestrichelte Linie ist die Weltlinie eines Körpers der sich mit nahezu Grenzgeschwindigkeit bewegt.

(a) Welche Weltlinien sind physikalisch erlaubt, welche nicht?

(b) Ordne alle erlaubten Weltlilien nach der Zeit, die für die Reisenden vergeht.

2. Um die Mondbahn genau zu vermessen, werden Laserpulse von der Erde zum Mond geschickt, dort von einem bei einer Mondlandung 1969 aufgestellten Spiegel reflektiert und wieder auf der Erde empfangen. Willy misst auf diese Weise die Laufzeit des Laserpulses. Sie beträgt 2,55 Sekunden. Stell dir vor, Lilly könnte zusammen mit einem solchen Lichtpuls reisen.

(a) Worin bestehen die für die Messung wichtigen Ereignisse A und B

(b) Zeichne die Weltlinien für Willy und Lilly zwischen den beiden Ereignissen. Wähle als Bezugssystem dasjenige, in dem Willy ruht.

(c) Welche Reisedauer (zwischen den Ereignissen A und B) zeigt Lillys Uhr?

(d) Sowohl Willy als auch Lilly kennen die Grenzgeschwindigkeit. Was hat Lilly über die Entfernung Mond-Erde herausgefunden? Stelle Vermutungen auf.

3. Willy und Lilly haben am gleichen Tag Geburtstag. Willy ist heute 15 Jahre alt, Lilly 16 Jahre. An diesem Geburtstag startet Lilly zusammen mit einem Lichtpuls eine Reise. Ein Jahr später – Willy feiert gerade seinen 16. Geburtstag – kommt Lilly zurück.

(a) Willy hat berechnet, welche Strecke Lilly zurückgelegt hat.

(b) Auch Lilly hat bei der Ankunft Geburtstag. Aber wie alt ist sie?

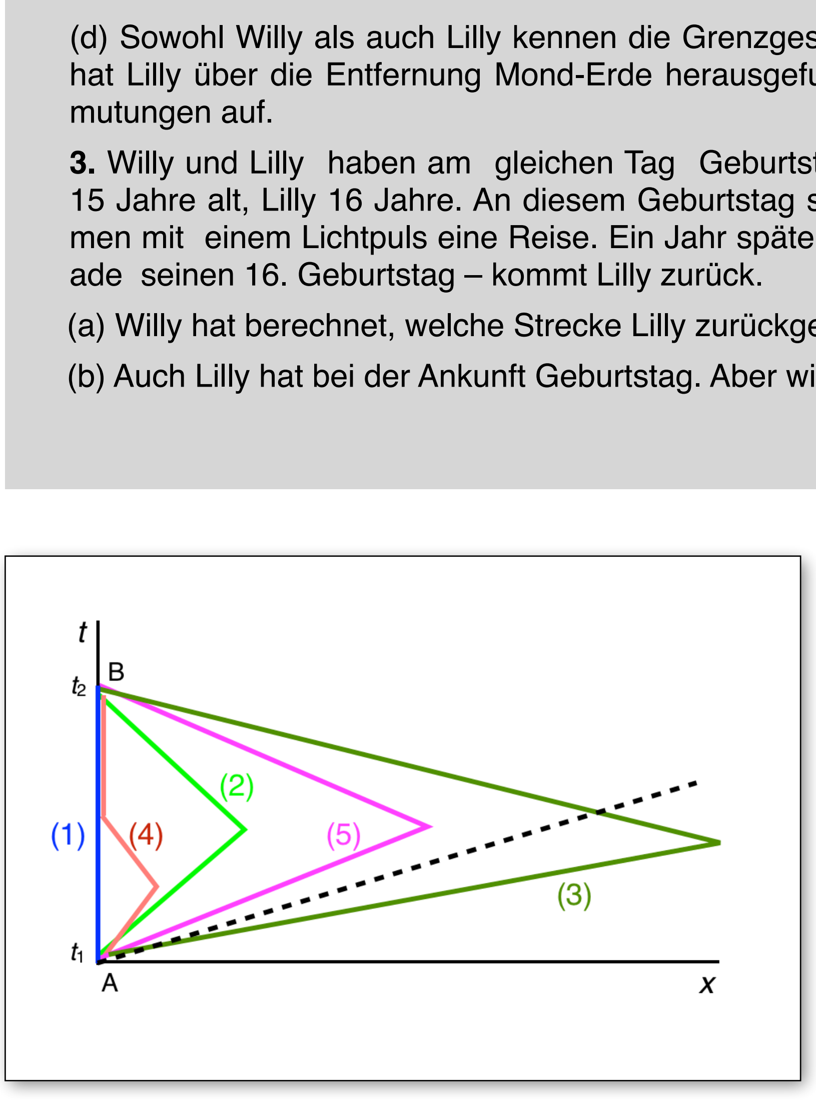


Abb. 8.12
Zu Aufgabe **1**

8.3 Zeitreisen – das Zwillingsparadoxon

Die Geschichten mit Willy und Lilly im vorigen Abschnitt waren frei erfunden und wir haben dabei nicht darauf geachtet, ob die Zahlenwerte an den Kurven in Abb. 8.7 und 8.8 realistisch sind. Es ging nur darum, das Prinzip zu verstehen.

Wir wollen uns nun etwas genauer ansehen, wie groß diese Effekte sind; unter welchen Umständen man sie überhaupt beobachten kann. Im Allgemeinen ist die Sache zwar kompliziert, aber wenn wir annehmen, dass sich Lilly auf ihrer Reise mit konstanter Geschwindigkeit v bewegt, wird es wieder einfach. Wir nennen die Zeit, die für Willy vergeht T_g (g, wie gerade Weltlinie) und die für Lilly vergeht T_k (k, wir Knick oder krumm).

T_k berechnet sich aus T_g nach:

$$T_k = T_g \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{8.1}$$

Dass der Effekt unter normalen Umständen klein ist, erkennt man an dem Faktor

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\ ,$$

der in der Relativitätstheorie an den verschiedensten Stellen auftritt. Wenn die Geschwindigkeit v klein gegen die Grenzgeschwindigkeit c ist, so ist dieser Faktor nahezu gleich 1, und das heißt in unserem Fall, dass

$$T_k \approx T_g$$

ist.

Wir wollen das an einem konkreten Fall prüfen. Noch einmal Willy und Lilly. Sie starten am selben Ort ihre Stoppuhren. Willy bewegt sich nicht, Lilly fährt eine Stunde lang mit dem Auto mit 90 km/h weg, kehrt um und fährt eine Stunde lang mit 90 km/h wieder zurück. (Achtung: die Stunde wird auf Willys Stoppuhr abgelesen.) Was zeigen die Uhren an, wenn sich die beiden wieder treffen? Willys Stoppuhr natürlich 2 Stunden (denn so war ja die Reise eingerichtet). Lillys Uhranzeige erhalten wir mit Hilfe von Gleichung (8.1).

Wir wollen gleich den Unterschied der beiden Zeitanzeigen berechnen, d.h. Willys minus Lillys Zeit:

$$\text{Unterschied} = T_g - T_k = T_g - T_g \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = T_g\left(1-\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right) \tag{8.2}$$

Mit

$T_g = 2 \cdot 1\ \text{h} = 7200\ \text{s}$
$v = 90\ \text{km/h} = 25\ \text{m/s}$
$c = 3 \cdot 10^8\ \text{m/s}$

wird

$$\text{Unterschied} = T_g - T_k = 7200\ \text{s}\left(1-\sqrt{1-\frac{25^2}{(3\cdot 10^8)^2}}\right) = 25 \cdot 10^{-12}\ \text{s}$$

Der Unterschied beträgt 25 Picosekunden. Das ist sehr viel weniger als die Messgenauigkeit der Stoppuhren. Es ist also kein Wunder, dass man von solchen Effekten im normalen Leben nichts spürt.

Wir haben hier angenommen, Willy und Lilly befinden sich auf der Erde, d.h. nicht in einem schwebenden Bezugssystem. Das war hier erlaubt, weil sich die Bewegung nur in der Waagrechten abspielt, der Gravitationsfeldstärkevektor aber senkrecht zur Erdoberfläche steht.

Damit der Effekt etwas größer wird, versuchen wir es nun etwas schneller: Lilly fährt nicht gemütlich mit 90 km/h, sondern beschleunigt mit Hilfe einer Rakete im Weltraum auf 90 % der Grenzgeschwindigkeit, also $0{,}9c$, und sie fliegt nicht zwei Stunden, sondern 20 Tage (von Willys schwebendem Bezugssystem aus gesehen), 10 Tage in die eine Richtung und 10 Tage wieder zurück. Dabei entfernt sie sich auf über $2{,}3 \cdot 10^{11}$ km (rechne nach). Wie viele Tage vergehen dabei für Lilly? Wir setzen ein in Gleichung (8.1):

$$T_k = T_g \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 20\ \text{Tage} \cdot \sqrt{1-\left(\frac{0{,}9c}{c}\right)^2} \approx 9\ \text{Tage}$$

Während Willy um 20 Tage gealtert ist, ist Lilly nur 9 Tage älter geworden.

Die Reise, die Lilly in unserer erfundenen, etwas unrealistischen Geschichte macht, nennt man auch eine *Zeitreise*.

Nehmen wir an, Lilly beginnt ihre Reise am 1 Juli. Sie ist dann 9 Tage unterwegs, und kommt in einer Welt an, in der der Kalender schon den 21. Juli anzeigt. Manche Leute würden sagen, sie habe eine Reise in die Zukunft gemacht. Eigentlich ist es aber nicht geschickt, das so auszudrücken, denn auch Willy ist ja am 21. Juli angekommen. Jeder „reist" also sowieso in die Zukunft.

Die Tatsache, dass einer weniger altert als der andere, ist auch bekannt unter dem Namen *Zwillingsparadoxon*. Zunächst sieht man nicht, was hier paradox sein soll. Das Argument ist nun so: Von Willy aus betrachtet bewegt sich Lilly. Man kann auch sagen Lilly bewegt sich in Willys Bezugssystem. Wenn man aber in Lillys Bezugssystem geht, sollte dann nicht gerade das umgekehrte herauskommen, nämlich dass Willy weniger altert?

Diesen Schluss darf man nicht ziehen, denn Lillys Bezugssystem ist wegen der Beschleunigungen bei ihrer Reise kein schwebendes Bezugssystem, und dann gilt Gleichung (8.1) einfach nicht mehr.

> Zwei Personen W und L trennen sich (Ereignis A) und treffen sich wieder (Ereignis B). W bewegt sich frei schwebend, L bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit v (gleicher Betrag von v auf Hin- und Rückweg). Wenn dabei für W die Zeit T_g vergeht, so vergeht für L die Zeit
>
> $$T_k = T_g \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

Unsere neue Formel liefert noch ein weiteres Ergebnis, das zunächst überraschen könnte, das aber eigentlich zu erwarten war. Lilly möchte auf ihrer Reise möglichst wenig altern. Wie muss sie es anstellen? Möglichst schnell weg und wieder zurück fliegen. Nun wissen wir aber: Schneller als mit der Grenzgeschwindigkeit c geht es nicht. Also fliegt sie mit (fast) der Grenzgeschwindigkeit. Einsetzen von c in unsere Gleichung zeigt, dass das Beste, was man sich wünschen kann, erreicht ist: Der Ausdruck unter der Wurzel, und damit Lillys Alterung ist null.

Aufgaben

1. Dieses Mal bleibt Lilly zu Hause und Willy bewegt sich weg und kehrt um. Wenn die beiden sich wieder treffen, vergleichen sie, was ihre Uhren anzeigen. Die Reisezeit, die Willy gemessen hat, ist halb so gross wie die, die Lilly gemessen hat. Mit welcher Geschwindigkeit war Willy unterwegs?

2. Lilly reist zu einem Stern, der laut Sternatlas 99 Lichtjahre von der Erde entfernt ist. Mit ihrem Raumschiff erreicht sie eine Geschwindigkeit von $0{,}98c$. Willy, der nicht mitreisen will, rechnet aus, wie lange es dauert bis er Lilly wieder sieht (Lilly hat nicht vor, sich am Ziel aufzuhalten) und ist sehr besorgt.

(a) Warum ist Willy besorgt?

(b) Welche Reisezeit zeigt Lillys Borduhr an, als sie an ihrem Ziel ankommt?

Lilly berechnet aus der Entfernung des Sternes vom Startpunkt, also den 99 Lichtjahren, und der Reisezeit, die Ihre Uhr anzeigt, die Reisegeschwindigkeit und ist für einen Moment überrascht.

(c) Welche Reisegeschwindigkeit liefert ihre Rechnung?

Sie wundert sich zunächst, denkt dann ein Weile nach und findet eine merkwürdige Erklärung für Ihr Ergebnis.

(d) Welche Erklärung?

8.4 Bewegung auf einer Kreisbahn, GPS

Wir wollen Gleichung (8.1) auf eine spezielle Situation anwenden: auf eine Kreisbewegung. Wir stellen uns vor, Lilly sitzt auf einem Karussell und bewegt sich im Kreis herum, während Willy daneben steht und Lilly immer wieder vorbeifahren sieht, Abb. 8.13.

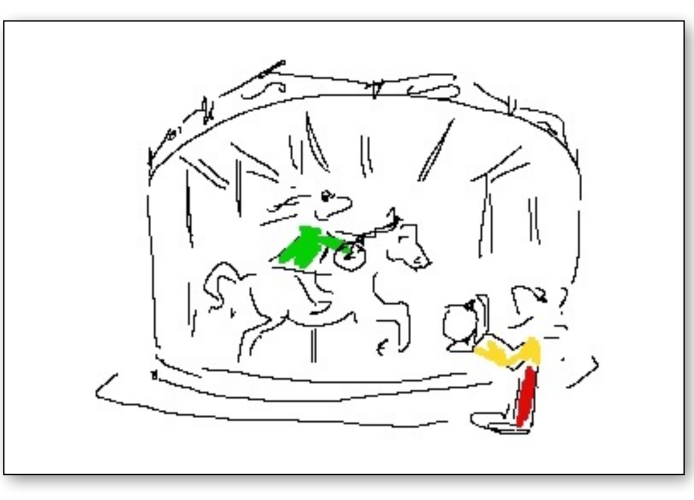


Abb. 8.13
Lilly bewegt sich, Willy nicht (im Bezugssystem der Erde)

Lillys Bewegung ist nicht mehr eine einfache Hin- und Herbewegung. Ihre Bewegung läuft nicht in nur einer Raumdimension ab, sondern in zwei Dimensionen. Wir brauchen daher außer der Zeit noch zwei Ortskoordinaten. Dadurch wird das Raumzeit-Diagramm dreidimensional und wir stellen es perspektivisch dar, Abb. 8.14.

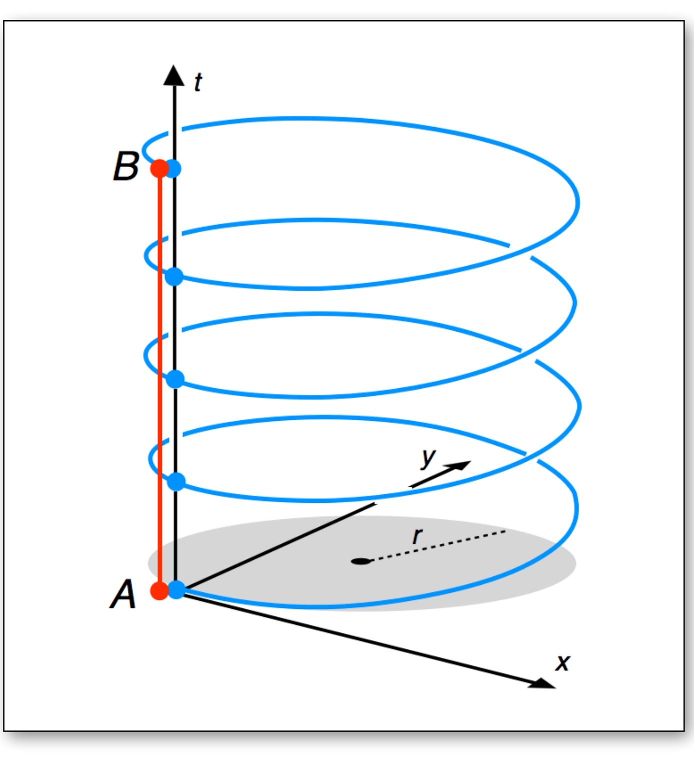


Abb. 8.14
Weltlinien von Willy (rot) und Lilly (blau), die die Raumzeit-Punkte A und B verbinden. Willy altert mehr als Lilly.

Im Raumzeit-Punkt A beginnt Lillys Fahrt. Willy und Lilly starten ihre Stoppuhren. Nach vier Umdrehungen des Karussells befinden sich beide im Raumzeitpunkt B und vergleichen ihre Uhren.

Wir wollen den „Alterungsunterschied“ berechnen, und zwar zunächst für eine Umdrehung.

Gegeben ist die „Umlaufzeit“ T des Karussells (mit Willy’s Uhr gemessen!) und der Radius r der Bahn von Lilly.

Es ist also:

$$T_g = T$$

und Lillys Geschwindigkeit ist

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

Eingesetzt in Gleichung (8.1) ergibt sich, was Lillys Stoppuhr anzeigt:

$$T_k = T \cdot \sqrt{1 - \frac{4\pi^2 r^2}{c^2 T^2}}$$

Der Unterschied zwischen den Uhranzeigen, also der Alterungsunterschied Willy-Lilly wird dann (siehe Gleichung (8.2)):

$$\text{Unterschied} = T_g - T_k = T\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4\pi^2 r^2}{c^2 T^2}}\right) \qquad (8.3)$$

Wir nehmen an es sei

$$T = 5\ \text{s}$$

und

$$r = 3\ \text{m}$$

Dann ergibt sich

$$\text{Unterschied} = 5\,\text{s} \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4\pi^2 \cdot 3^2}{9 \cdot 10^{16} \cdot 5^2}}\right) \approx 4 \cdot 10^{-16}\ \text{s}$$

Der Unterschied ist also wieder winzig, wie es zu erwarten war.

Man könnte schließen, dass der Alterungsunterschied in der realen Welt unmessbar klein ist und keine Bedeutung hat.

Der Effekt macht sich aber bemerkbar

- wenn die Messgenauigkeit sehr hoch ist;
- wenn die Geschwindigkeit sehr hoch ist.

Diese Bedingungen waren uns schon einmal begegnet: Auch um festzustellen, dass es sich bei Energie und Masse um dieselbe physikalische Größe handelt, müssen sie erfüllt sein.

Ist also das Ganze ohne praktische Bedeutung? Ganz und gar nicht!

Bei manchen technischen Anwendungen kommt es auf höchste Genauigkeit bei der Zeitmessung an, etwa bei der GPS-Positionsbestimmung. Und in manchen physikalischen Experimenten mit Teilchenbeschleunigern bewegen sich die Teilchen mit einer Geschwindigkeit, die nicht mehr klein ist gegen die Grenzgeschwindigkeit. Wir betrachten beide Fälle etwas genauer.

Beispiel Myonenbeschleuniger

Myonen sind „Elementarteilchen“ die eine große Ähnlichkeit mit Elektronen haben. Sie haben dieselbe Ladung und denselben Drehimpuls wie Elektronen; ihre Masse ist allerdings etwa 200 mal so groß wie die der Elektronen. Im Gegensatz zu den Elektronen sind Myonen nicht stabil. Sie zerfallen in Elektronen und Neutrinos. Ein solcher Zerfall ist ein statistischer Prozess. Man kann von einem einzelnen Myon im Voraus nicht wissen, wann es zerfällt; aber die mittlere Lebenszeit τ einer großen Anzahl von Myonen hat einen ganz bestimmten bekannten Wert. Es ist nämlich

$\tau = 2{,}2\ \mu\text{s}$ (Mikrosekunden)

Man kann nun Myonen mit einem Teilchenbeschleuniger auf eine hohe Geschwindigkeit bringen. In einem Experiment am CERN wurden Myonen, die einen Strahl bildeten, auf eine Geschwindigkeit

$$v = 0{,}9995\ c$$

gebracht, also ganz nah an die Grenzgeschwindigkeit. Sie liefen dann, von einem Magnetfeld geführt, in einem so genannten *Speicherring* im Kreis herum, ähnlich wie Lilly auf dem Karussell, nur sehr viel schneller. Man kann die mittlere Lebenszeit dieser Myonen leicht messen, indem man die beim Zerfall entstehenden Elektronen nachweist. Diese Lebenszeit kann man sich vorstellen als eine Art Uhr, die sich mit den Myonen bewegt. Diese bewegte Uhr muss weniger anzeigen als die ruhende Laboruhr, oder anders herum: Die Laboruhr muss mehr anzeigen als die Myonenuhr. Während für die Myonen von ihrer Entstehung bis zum Zerfall 2,2 µs vergehen, muss der zeitliche Abstand zwischen diesen Ereignissen im Labor größer sein. Wir wollen ihn mit Hilfe von Gleichung (8.1) berechnen. Gegeben ist

$$T_k = 2{,}2\ \mu\text{s}$$

und

$$v = 0{,}9995\ c$$

Da wir T_g berechnen wollen, formen wir Gleichung (8.1) um:

$$T_g = \frac{T_k}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

setzen ein und erhalten:

$$T_g = \frac{2{,}2 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{1 - \frac{0{,}9995c^2}{c^2}}} = 69{,}6\ \mu\text{s}$$

Für die Laboruhr ist 32 mal so viel Zeit vergangen wie für die „Uhr des Myons“.

Beispiel GPS

Um eine Position zu bestimmen, berechnet das GPS-Gerät (GPS = *Global Positioning System*) die Entfernung zu mehreren Satelliten aus der Laufzeit von elektromagnetischen Signalen, die die Satelliten aussenden. Damit das möglich ist, befinden sich sowohl auf der Erde, als auch in jedem Satelliten Uhren, die sehr genau gehen. Da zu den Satelliten aber eine andere Weltlinie gehört, als zu irgendeiner Uhr auf der Erde, würde die „Satellitenzeit“ mehr und mehr von der „Erdzeit“ abweichen. Sie wird daher ständig korrigiert.

Der Laufzeitunterschied hat zwei Ursachen. Einen dieser Effekte hatten wir schon früher angesprochen (Abschnitt *7.10 Uhren im Gravitationsfeld*). Wir kommen später noch einmal auf ihn zurück. Im Augenblick geht es uns um den zweiten Effekt. Er hängt damit zusammen, dass sich die Satellitenuhr gegen die Erde bewegt.

Wir wollen den Laufzeitunterschied berechnen, der sich an einem Tag ansammeln würde. Die Uhr im GPS-Gerät auf der Erde entspricht dann der Uhr von Willy im vorangegangenen Beispiel, die Uhr im Satelliten entspricht Lillys Uhr. Wir brauchen die folgenden Daten:

Radius der Satellitenbahn: $r = 26\,600$ km

Umlaufzeit: 12 h = 43 200 s

Eingesetzt in (8.3) ergibt sich:

$$T_g - T_k = 12\ \text{h} \cdot 0{,}83 \cdot 10^{-10} = 3{,}6 \cdot 10^{-6}\ \text{s}$$

Da der Satellit zwei Umläufe pro Tag macht, würde die Satellitenuhr pro Tag 7,2 Mikrosekunden zu wenig messen.

Vielleicht hast du einige Fragen dazu, wie wir diese Zeitdifferenz berechnet haben:

Muss man nicht berücksichtigen, dass sich die Uhren auf der Erde auch bewegen? Eigentlich ja. Die Geschwindigkeit der Erduhren ist aber viel geringer als die des Satelliten. Ihr Beitrag zum Gesamteffekt ist daher sehr klein und wir können ihn vernachlässigen.

Außerdem haben wir so getan, als wäre die Uhr auf der Erde frei schwebend und die im Satelliten nicht. Ist es nicht in Wirklichkeit gerade umgekehrt? Sollte dann nicht die Satellitenuhr den größeren Wert messen? Nein. Wir können hier unsere Regel „die schwebende Uhr zeigt den größten Wert an“ nicht anwenden; sie gilt nur wenn keine Himmelskörper mit einem Gravitationsfeld in der Nähe sind.

Nun noch einmal zu dem anderen Effekt, der die Uhren aus dem Takt bringt. Dieser „Höheneffekt“ bewirkt, dass die Satellitenuhr um 45,6 µs pro Tag zu viel misst. Er wirkt also entgegengesetzt zum „Geschwindigkeitseffekt“.

Beide Effekte zusammen genommen bewirken also, dass die Satellitenuhr

$$45{,}6\ \mu\text{s} - 7{,}2\ \mu\text{s} = 38{,}4\ \mu\text{s}$$

pro Tag zu viel anzeigt.

Da man den „Fehler“ kennt, kann man ihn leicht korrigieren. Man lässt die Satellitenuhr einfach entsprechend langsamer laufen: Wenn sie neben einer Erduhr stehen würde, würde sie 38,4 µs pro Tag weniger anzeigen. Wenn sie dagegen an Bord des Satelliten ist, läuft sie zu den Erduhren synchron.

Aufgaben

1. Neptun und Merkur umkreisen die Sonne seit mehreren Milliarden Jahren. Finde im Internet die Radien und Umlaufdauern der beiden Planeten. Wir stellen uns vor, dass vor 100 Millionen Jahren auf beiden Planeten Uhren abgestellt wurden, die gleich gebaut sind und nie aufhören zu laufen. Welcher Zeitunterschied hat sich in diesen letzten 100 Millionen Jahren angesammelt? (Von Gravitationseffekten soll abgesehen werden.)

2. Auf dem Mond und auf der Erde werden gleichzeitig zwei gleiche Mengen des gleichen radioaktiven Materials abgelegt. Nach einer gewissen Zeit ist auf der Erde nur noch die Hälfte des radioaktiven Materials vorhanden. Was kannst du über die Menge des Materials auf dem Mond sagen? Würde ein Forscher auf dem Mond sagen, dass sein Material, obwohl chemisch das gleiche wie auf der Erde, eine andere Halbwertszeit hat?

8.5 Uhren in unterschiedlicher Höhe – aus einer anderen Perspektive

Wir hatten gesehen, dass das „Falschlaufen“ der Uhren im GPS-Satelliten zwei Ursachen hat. Es sieht so aus, als handele es sich dabei um zwei grundsätzlich verschiedene Erscheinungen.

Wir wollen nun mit unseren neuen Kenntnissen über die Raumzeit den einen dieser Effekte aus einer neuen Perspektive betrachten.

Hier noch einmal die alte Geschichte: Ein Hochhaus; Willy und Lilly befinden sich auf halber Höhe und gleichen ihre Uhren ab. Dann geht Willy nach oben, Lilly nach unten. Nach einer gewissen Zeit treffen sie sich wieder in der Mitte und vergleichen, was die Uhren anzeigen. Es stellt sich heraus, dass Willys Uhr mehr anzeigt als Lillys.

Die Abweichung schien etwas mit dem Gravitationsfeld zu tun zu haben. Nun kennen wir aber einen Trick, wie man das Gravitationsfeld loswerden, oder besser, wie man seine Feldstärke zu null machen kann: Man beschreibt den Vorgang in einem frei schwebenden Bezugssystem. Wie soll das im Fall unseres Hochhauses gehen?

Wir brauchen eine dritte Person, Lillys Schwester Milly, und das ganze Geschehen wird in Millys Bezugssystem beschrieben. Was hat Milly zu tun? Direkt mit dem Uhrenabgleich von Willy und Lilly springt sie kräftig in die Höhe; sie fliegt sehr hoch und kommt natürlich irgendwann wieder herunter. Sie springt so hoch, dass sie gerade in dem Augenblick wieder landet, in dem Willy und Lilly ihre Uhren zum zweiten mal vergleichen. Wie jeder geworfene Stein oder „gesprungene Mensch“ ist Milly schwerelos; sie ist frei fliegend oder schwebend. Ihr Bezugssystem ist daher ideal zur Beschreibung der Welt, denn in diesem Bezugssystem sieht alles viel einfacher aus. Insbesondere ist die Gravitationsfeldstärke null.

Wie stellt sich die Welt von Milly aus gesehen dar? Milly sagt nicht, sie fliegt erst nach oben und dann wieder herunter, sondern das Hochhaus mit Willy und Lilly bewegt sich nach unten und kommt dann wieder herauf, Abb. 8.15. („Nach unten“ ist in der Abbildung nach links.) In Millys Bezugssystem machen Willy und Lilly eine Reise, aber auf unterschiedlichen Weltlinien. Lilly ist von Milly auf dem größten Teil ihrer Reise weiter entfernt als Willy. Was das bedeutet wissen wir: Willys Uhr zeigt beim Rendezvous mehr an als Lillys. Und das meiste zeigt Millys Uhr an, denn Milly bewegt sich (in ihrem freischwebendem Bezugssystem) gar nicht.

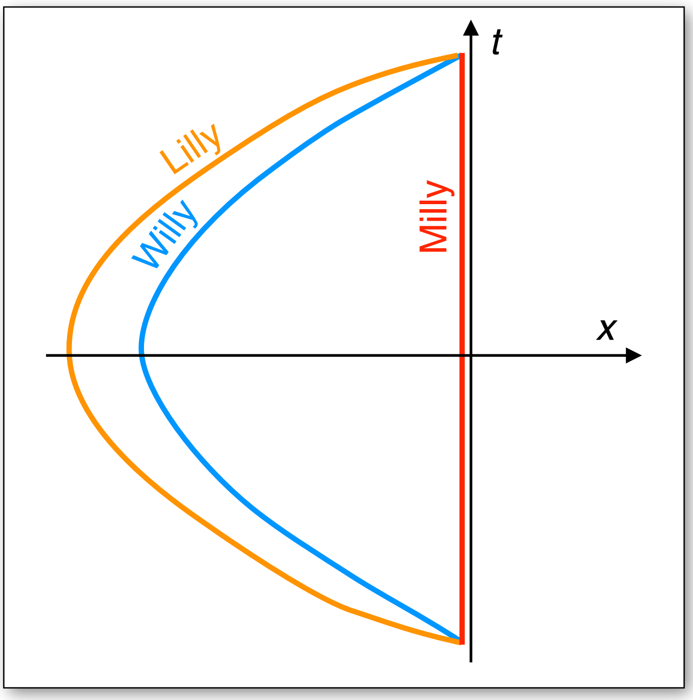


Abb. 8.15
Weltlinien von Milly, Lilly und Willy. Für Milly vergeht die meiste Zeit, für Lilly die wenigste.

8.6 Die Gleichzeitigkeit ist nicht mehr was sie einmal war

Jeder kennt die Bezeichnung „gleichzeitig“. In Berlin ist ein Fahrrad umgefallen und gleichzeitig ist in Stuttgart ein Hund entlaufen. Der Satz scheint klar zu sein. Wir sind aber inzwischen an Überraschungen gewöhnt, und tatsächlich haben wir, wenn wir die Raumzeit ernst nehmen, wieder ein Problem.

Wir machen einen kleinen Umweg. Wir versuchen, die Sache umzudrehen, Zeit und Raum gegeneinander zu vertauschen. Das Wort „gleichortig“ gibt es nicht, aber wir können ja stattdessen sagen „am gleichen Ort“. Also

zwei Ereignisse, die zur gleichen Zeit (gleichzeitig) an verschiedenen Orten stattfinden

ersetzen wir durch:

zwei Ereignisse, die am gleichen Ort („gleichortig“) zu verschiedenen Zeiten stattfinden

Ein Beispiel: Lilly sitzt im ICE, Wagen 8 Platz Nummer 28. Sie spielt ein Computerspiel. Ereignis A ist der Anfang des Spiels, Ereignis B ist das Ende. Finden die Ereignisse am selben Ort statt?

- Ja, denn sie finden in Wagen 8, Platz Nr. 28 statt.
- Nein, denn am Anfang des Spiels war Lilly in Karlsruhe, am Ende in Mannheim.

Das ist kein Widerspruch. Die Frage hat je nach Bezugssystem eine andere Antwort. Im Bezugssystem des ICE finden die Ereignisse am gleichen Ort statt; im Bezugssystem der festen Erde finden sie an verschiedenen Orten statt. Damit hat sicher niemand ein Problem.

Wir müssen uns nun einfach an den Gedanken gewöhnen, dass auch die Gleichzeitigkeit vom Bezugssystem abhängt. Wie kann das aussehen? Wieder ein Beispiel:

Die Minutenzeiger der Bahnhofsuhren in Karlsruhe und in Mannheim rücken gleichzeitig um einen Strich vor – im Bezugssystem der Erde. Im Bezugssystem eines Zuges, der in Richtung Nord fährt, rückt der Zeiger in Mannheim etwas früher vor als der in Karlsruhe; für Züge in Richtung Süd ist es umgekehrt.

Natürlich ist der Effekt in unserem Beispiel wieder winzig.

Zwei Ereignisse, die in einem Bezugssystem gleichzeitig stattfinden, sind in einem anderen Bezugssystem nicht gleichzeitig.

Abb. 8.16 zeigt eine analoge Situation, mit der du sicher auch kein Problem hast.

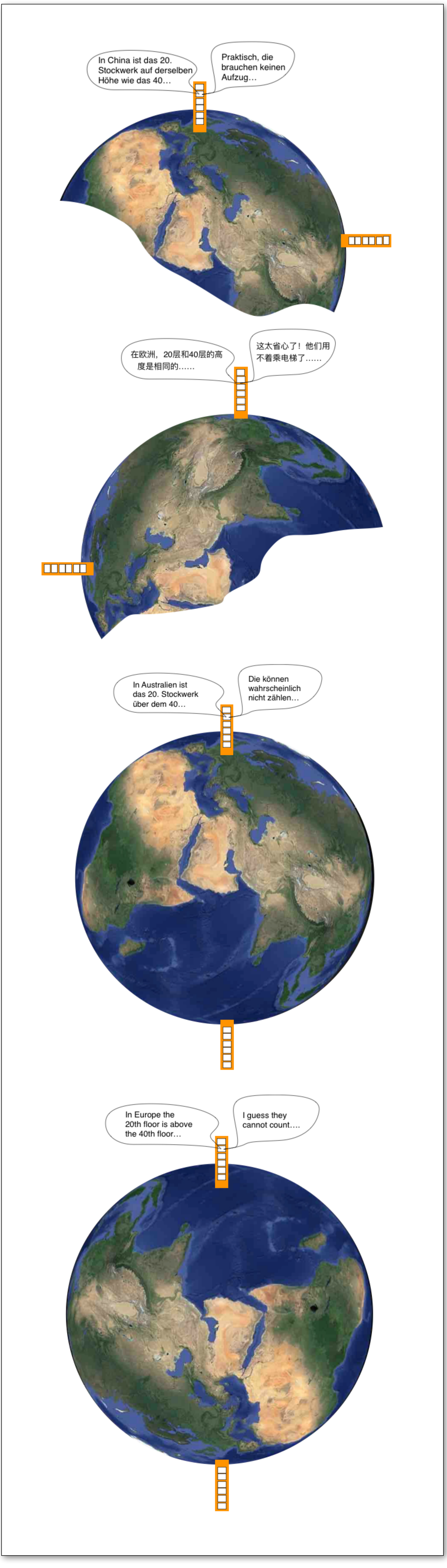


Abb. 8.16
Was „oben“ und „unten“ ist, hängt vom Standpunkt ab.

Was kann man aus diesen Beispielen lernen? Ganz einfach: Wähle für jede Situation, die du beschreiben willst, oder für jedes Problem, das du lösen willst, das am besten geeignete Bezugssystem, also:

Die Ereignisse „Lilly beginnt das Computerspiel“ und „Lilly beendet das Spiel“ im Bezugssystem des Zuges (und nicht im Bezugssystem der Erde).

Die Ereignisse „in Berlin fällt ein Fahrrad um“ und „in Stuttgart entläuft ein Hund“ im Bezugssystem der Erde (und nicht in einer mit fast Grenzgeschwindigkeit vorbeifliegenden Rakete)

Die Anordnung der Stockwerke in einem Hochhaus in Frankfurt mit einer Höhenachse, die in Frankfurt nach oben weist (und nicht mit einer, die in Shanghai oder Sidney nach oben weist).

Natürlich kann man jede dieser Situationen auch in einem ungeschickt gewählten Bezugs- oder Koordinatensystem beschreiben, aber dann wird es eben umständlich.

9

Der gekrümmte Raum

9.1 Der Raum: mehr als ein leerer Behälter

Wir hatten uns mit dem Begriff Raum beschäftigt und dabei waren uns seltsame Dinge begegnet: Der Raum hängt mit der Zeit zusammen, und zwar auf eine Art wie wir es aus unserer täglichen Erfahrung nicht kennen.

Aber man hatte immer noch den Eindruck, dass Raum und Zeit nur gebraucht werden, um die Koordinaten von Ereignissen festzulegen. Der Raum wäre eine Art leerer Behälter, in dem das Geschehen der Welt abläuft.

Wir wollen im Folgenden versuchen zu verstehen, dass es mit Raum und Zeit mehr auf sich hat. Insbesondere werden wir sehen, dass der Raum Eigenschaften hat, die sich von Punkt zu Punkt ändern, und zwar auch dort, wo sich keine Materie befindet. Das heißt er hat nicht nur eine Ähnlichkeit mit einem leeren Behälter, sondern auch mit einem Gegenstand.

Was ist nun der Raum: Der Gegenstand oder der Behälter, in dem sich der Gegenstand befindet? Beide Begriffe passen nicht, denn der Raum ist beides in einem: Ein Gebilde mit Eigenschaften (so wie ein Gegenstand) und der Platz, an dem sich der Gegenstand befindet (so wie das Innere eines leeren Behälters).

Die Theorie, mit der dieses Gebilde beschrieben wird, ist Einsteins Theorie der Gravitation, gewöhnlich bezeichnet als *Allgemeine Relativitätstheorie*.

9.2 Masse krümmt den Raum – Geodäten

Der Raum um uns herum hat eine Eigenschaft, die wir für so selbstverständlich halten, dass uns gar nicht in den Sinn kommt, dass es auch anders sein könnte: er ist „flach“. Er ist aber durchaus nicht überall flach. In der Umgebung schwerer Himmelskörpers ist er „gekrümmt“.

Was ist gemeint mit: „der Raum ist flach“ oder „der Raum ist gekrümmt“? Man versteht es besser, wenn man sich statt der dreidimensionalen Welt, in der wir leben, eine zweidimensionale vorstellt: Alles, was es gibt, ist zweidimensional, einschließlich der Wesen, die in dieser Welt leben. Wir wollen sie 2D-Menschen nennen.

Wir können uns nun verschiedene solcher Welten vorstellen: ebene, aber auch auf die verschiedensten Arten gewölbte oder gekrümmte, Abb. 9.1.

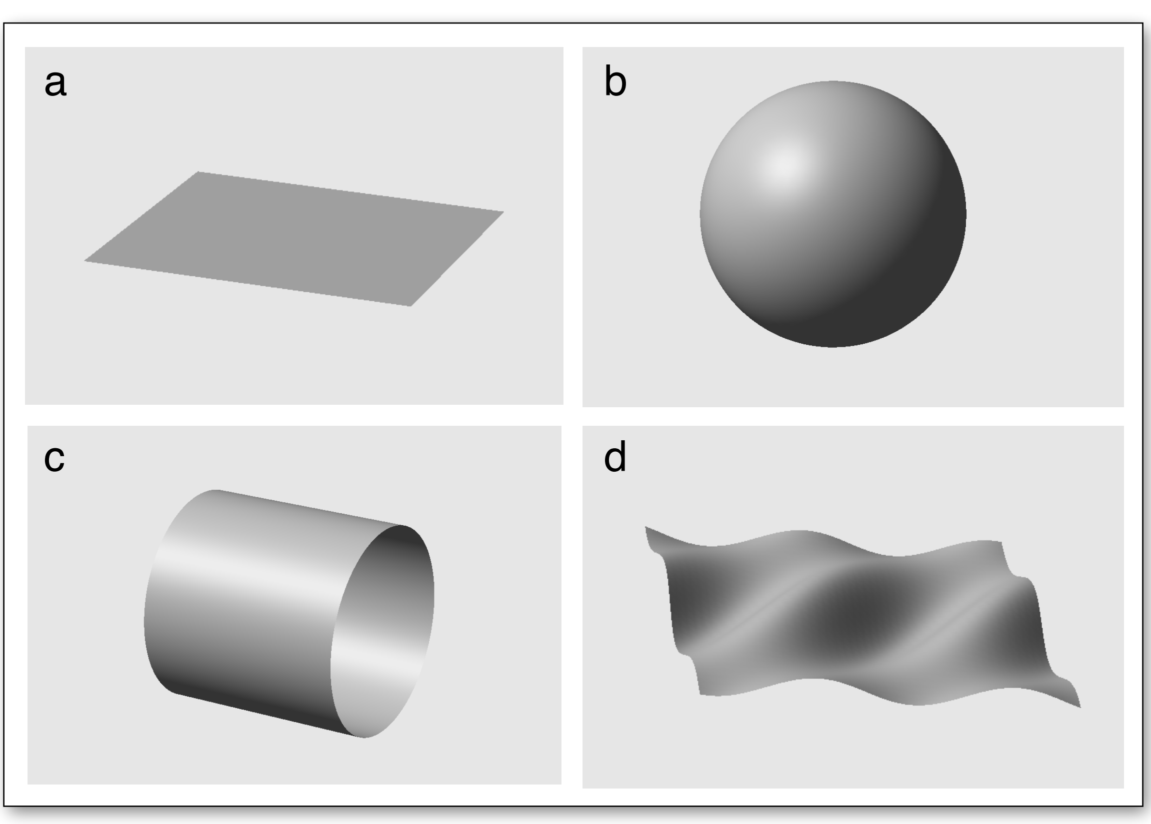


Abb. 9.1
Verschiedene „zweidimensionale Welten“: (a) Ebene, (b) Kugeloberfläche, (c) Zylindermantel, (d) Hügel und Täler

Wir dreidimensionale Wesen sehen jeder dieser Flächen an, ob, an welcher Stelle und wie stark sie gekrümmt ist. Wir sehen es, weil wir die zweidimensionale Welt in unsere dreidimensionale Welt *eingebettet* haben.

Um uns mit gekrümmten Welten vertraut zu machen, brauchen wir ein wichtiges Konzept: die gerade Linie.

Aber was ist eine gerade Linie in einem krummen Raum? Wir fragen unsere 2D-Menschen. Sie erklären uns: Du bekommst eine gerade Linie, wenn du mit einem Auto immer geradeaus fährst, d.h. das Lenkrad auf geradeaus stellst und festhältst. Wir dürfen zu diesem Zweck übrigens ruhig echte dreidimensionale Menschen mit einem Auto auf der zweidimensionalen Erdoberfläche herumfahren lassen. Wir stellen uns also eine hügelige Landschaft vor und fahren mit einem Geländewagen immer geradeaus.

Die Linie oder Bahn, die das Auto fährt, ist das geradeste, was wir auf der zweidimensionalen Fläche erreichen können. Wir weichen ja weder nach rechts noch nach links ab. Wir fahren also auf einer „Geradeauslinie“. Der Fachausdruck für eine solche Linie ist *Geodäte*.

Abb. 9.2 zeigt Geodäten in drei verschiedenen „Landschaften“, jeweils links perspektivisch und rechts von oben gesehen. Es könnte sich um die „Bahnen“ von geradeaus fahrenden Autos handeln, die alle am linken Rand parallel zueinander starten.

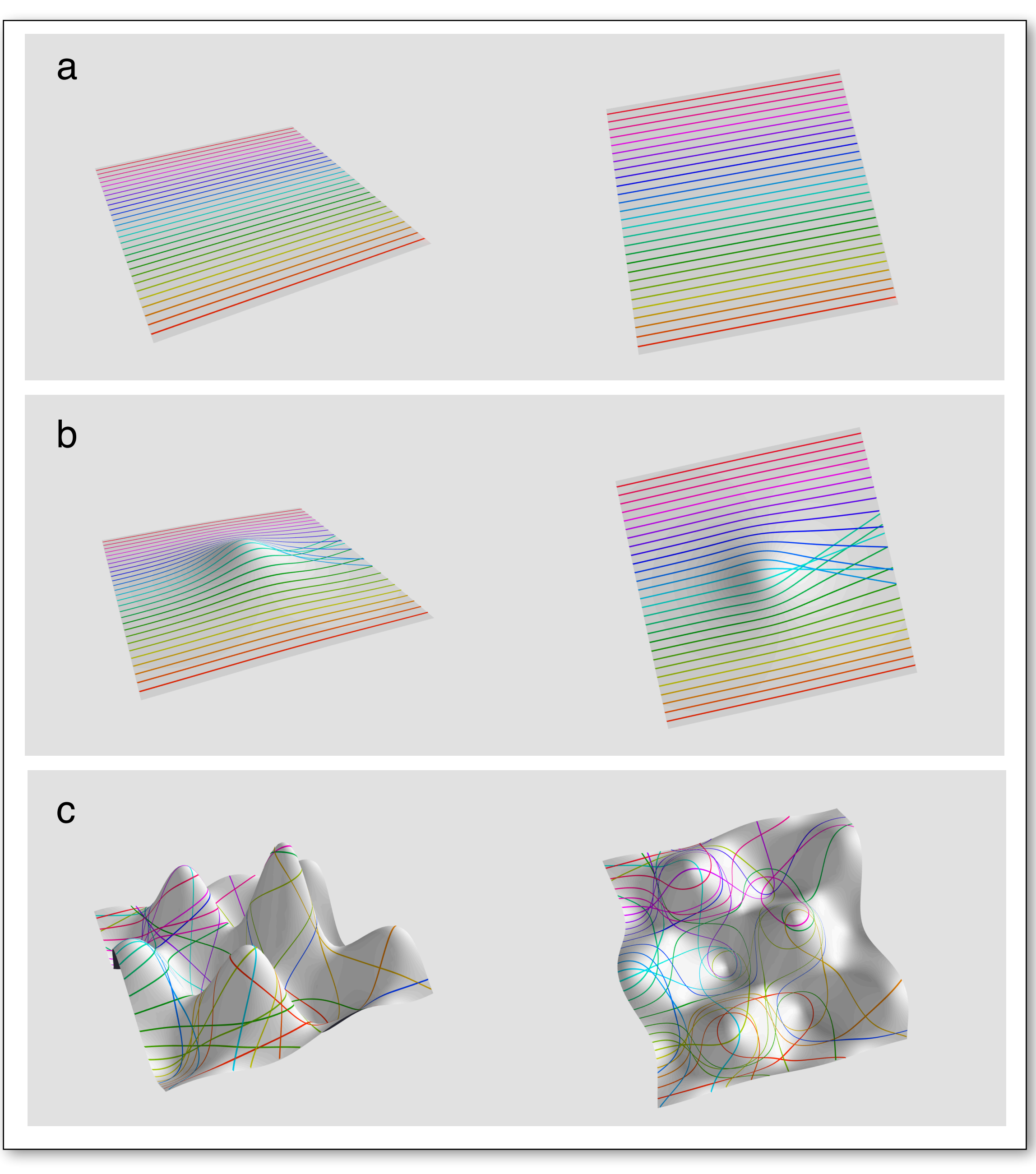


Abb. 9.2
Geodäten in einer „zweidimensionalen Welt“. (a) flache Welt; (b) und (c) gekrümmte Welten

Die 2D-Menschen können nun feststellen, wie die Fläche gekrümmt ist, ohne ihre flache Welt zu verlassen, und sie könnten es auch, wenn es die dritte Dimension gar nicht gäbe. Woran erkennen sie, dass ihr „Raum“ gekrümmt ist? An den Geodäten: Wenn zwei benachbarte Geodäten, die irgendwo parallel zueinander starten, nicht parallel bleiben.

Die Welt der oberen Bilder ist flach. Wir sehen: Die Geodäten bleiben parallel zueinander.

Die Bilder in der zweiten Reihe stellen eine Welt mit einem Hügel dar. Obwohl die Autos parallel starten und immer geradeaus fahren, bleiben ihre Bahnen nicht parallel.

Die Landschaft der unteren Bilder enthält hohe Hügel und Vertiefungen mit der Folge, dass die Geradeauslinien (die Geodäten) einen ziemlich chaotischen Verlauf nehmen.*

Allerdings verstehen die 2D-Menschen unter Krümmung nicht genau dasselbe, wie wir, die dreidimensionalen Menschen.

Abbildung 9.3 zeigt eine Flachwelt, die wir 3D-Menschen als gekrümmt bezeichnen würden. Die 2D-Menschen dagegen stufen sie als nicht gekrümmt ein, denn die Geodäten, die links parallel beginnen, bleiben parallel.

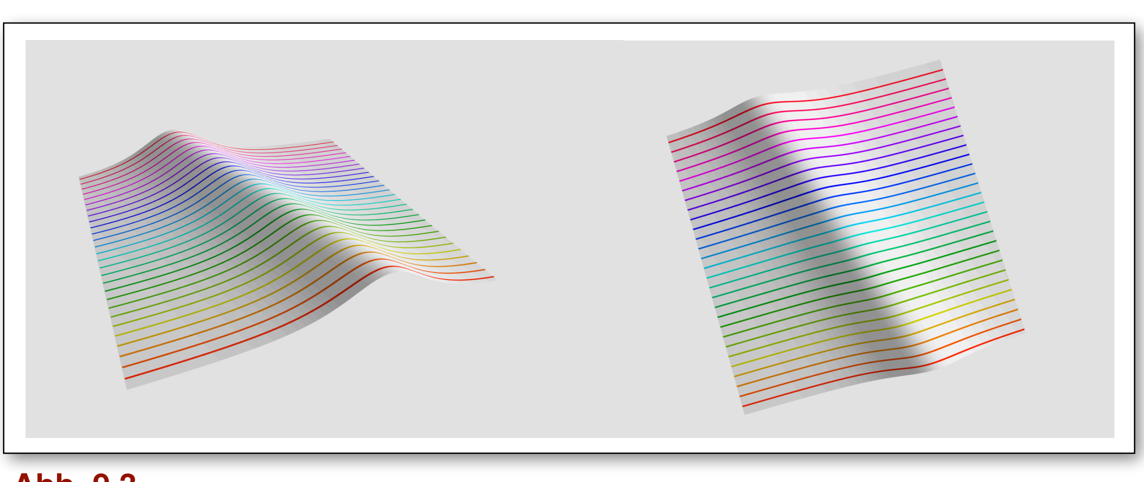


Abb. 9.3
Die zweidimensionale Welt ist flach, obwohl ihre Einbettung gekrümmt ist.

Wir betrachten noch eine besonders einfache zweidimensionale Welt: die Oberfläche einer Kugel (Abb. 9.1b). Sie entspricht ja im Wesentlichen der Welt, in der wir leben, nämlich der Erdoberfläche. Wir stellen uns vor, wir starten mit zwei Autos, die parallel zueinander stehen, und fahren immer geradeaus. (Es gibt keine Berge, Täler und Meere, und wir können überall fahren, brauchen also keine Straßen). Um konkret zu sein: Wir starten am Äquator, jedes Auto fährt auf einem Längenkreis in Richtung Nord. Natürlich bleiben die Autowege nicht parallel; sie kreuzen sich schließlich am Nordpol. Sie kreuzen sich, weil der zweidimensionale Raum, in dem sie verlaufen, nämlich die Kugeloberfläche, gekrümmt ist, Abb. 9.4a.

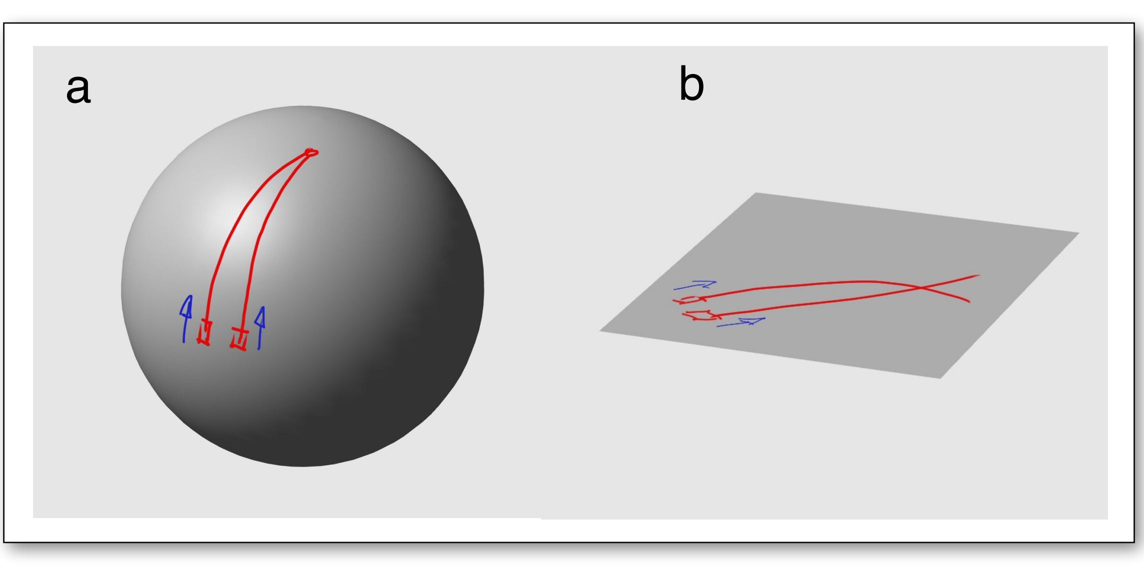


Abb. 9.4
(a) Die ursprünglich parallelen Linien kreuzen sich, weil der „zweidimensionale Raum“ gekrümmt ist.
(b) Die ursprünglich parallelen Linien kreuzen sich, weil diese Linien gekrümmt sind.

Auch in Abb. 9.4b kreuzen sich zwei ursprünglich parallele Linien. Sie verlaufen in einem flachen Raum. Sie kreuzen sich, weil sie selbst krumm sind. (Sie sind also keine Geodäten.) Wir sehen, dass es zwei Ursachen dafür geben kann, dass zwei Linien, die zunächst parallel sind, nicht parallel bleiben: erstens der Raum ist gekrümmt und zweitens, die Linien sind gekrümmt.

Natürlich kann es sein, dass sowohl der Raum als auch die Linien gekrümmt sind.

Alles, was wir hier gefunden haben, gilt auch für den dreidimensionalen Raum. Auch hier gibt es „Geradeauslinien“ oder Geodäten. Und wenn der Raum „gekrümmt“ ist, so bleiben parallele Geodäten nicht parallel. Wenn wir den dreidimensionalen Raum in einen vierdimensionalen einbetten könnten, würde es uns vielleicht leichter fallen, uns unter seiner Krümmung etwas vorzustellen, aber es gibt keine vierte Raumdimension, also auch keine Einbettung. Auf jeden Fall gilt auch für unseren dreidimensionalen Raum:

Zwei ursprünglich parallele Linien können sich kreuzen weil:
- die Linien gekrümmt sind;
- der Raum gekrümmt ist.

* Hier kannst du Geodäten in einer von dir selbst definierten Landschaft zeichnen lassen:
http://www.physikdidaktik.uni-karlsruhe.de/software/geodesiclab/a3.html

Aufgaben

1. Jedes der schwarzen Segmente in Abb. 9.5 wird durch zwei Linien begrenzt. Kreuzen sich solche Linien? Wenn ja, warum? Wenn nein, warum nicht? Beantworte die Fragen für beide Teilbilder.

2. Versuche, dir eine eindimensionale Welt vorzustellen. Können die Bewohner eine Krümmung dieser Welt feststellen. Was sagen die 2D-Menschen der zweidimensionalen Welt dazu?

3. Ein- und zweidimensionale Welten taugen als Lebensraum nicht viel. Versuche, dir vorzustellen, wie Lebewesen, ihre Straßen, Häuser, Fahrzeuge etc. gebaut sein müssten. Welche Probleme gibt es?

4. 2D-Menschen kennen die Formel für den Umfang eines Kreises: $U = 2\pi r$. Sie möchten wissen, ob die Formel auch für sehr große Kreise gilt, Abb. 9.6. Sie entfernen sich von M auf einer für sie geraden Linie. In Punkt A angekommen, biegen sie im rechten Winkel ab und bewegen sich weiter auf einer Kurve, deren Punkte von M einen konstanten Abstand haben, d.h. sie bewegen sich auf einer Kurve konstanter Krümmung. Wenn sie lange genug unterwegs waren, kommen sie wieder in A an und stellen fest, dass Messung und Rechnung für den Kreisumfang unterschiedliche Werte haben.

(a) Erkläre, wie es zu der Abweichung kommt?

(b) Wie verändert sich die Abweichung des Messwerts von dem mit der Formel errechneten, wenn die 2D-Menschen immer größere Radien wählen?

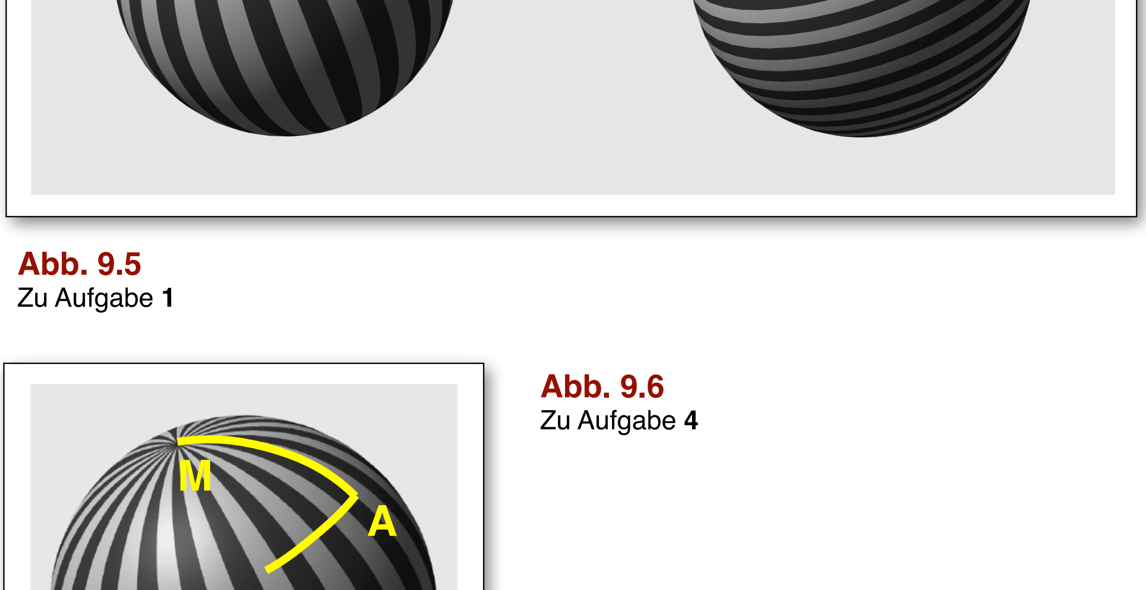


Abb. 9.5
Zu Aufgabe **1**

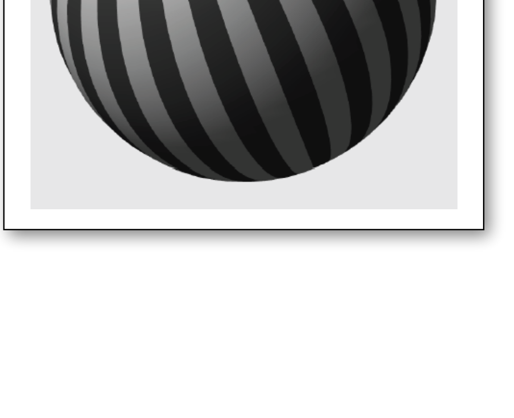


Abb. 9.6
Zu Aufgabe **4**

9.3 Die Raumkrümmung in der Umgebung von Himmelskörpern

Im vorigen Abschnitt ging es nicht um Physik, sondern um Geometrie. Kommen wir also zurück zur Physik.

Die Frage ist nun, ob auch der dreidimensionale Raum, in dem wir leben, gekrümmt ist. Die Antwort: Er ist gekrümmt; allerdings ist die Krümmung fast überall sehr gering. Groß ist sie nur in Energie/Masse-Ansammlungen und in deren Umgebung. Die Krümmung in der Nähe der Erde ist noch so gering, dass man sie nicht nachweisen kann. Anders ist es in der Nähe der Sonne. Dort ist die Krümmung zwar immer noch sehr schwach; sie kann aber gemessen werden. Viel größer ist sie dagegen in der Umgebung von Neutronensternen, und regelrecht zerknautscht ist der Raum in der Nähe eines schwarzen Loches.

Der Raum wird durch Energie/Masse gekrümmt.

Wie kann man aber die Krümmung unseres dreidimensionalen Raums überhaupt feststellen? Im Prinzip ist es einfach: So wie wir es im vorigen Abschnitt im zweidimensionalen Raum gemacht haben: Man wählt zwei benachbarte parallelen Geodäten und bewegt sich auf ihnen vorwärts. Wenn sich ihr Abstand ändert ist der Raum gekrümmt. Allerdings ist das leichter gesagt als getan.

Wie findet man denn die Geodäten im dreidimensionalen Raum? Wie muss hier das „Auto“ beschaffen sein, das immer geradeaus fährt?

Jeder Körper K fliegt geradeaus, so lange kein Impuls in ihn hineingeht, oder aus ihm herauskommt. Und da haben wir das Problem. Wir wollen die Geodäten zum Beispiel in der Nähe der Sonne bestimmen, aber gerade dort fließt Impuls aus der Sonne in K hinein. Das nennt man gewöhnlich Gravitationsanziehung. Die können wir aber durch einen Trick loswerden: Indem wir die Sonne und den Körper K elektrisch aufladen, und zwar so, dass Abstoßung resultiert. Wenn sich Anziehung und Abstoßung gerade aufheben, bekommt K über das Gravitationsfeld gerade so viel Impuls, wie er über das elektrische Feld abgibt. Selbstverständlich geht das nur in Gedanken. Es ist ein *Gedankenexperiment*.

Jetzt würde also K auf einer Geodäte im dreidimensionalen Raum fliegen. Wegen der Raumkrümmung würde seine Bahn gegenüber einer Linie im flach gedachten Raum abgelenkt.

Noch einmal: Praktisch funktioniert diese Methode nicht, aber es geht im Prinzip.

Die Raumkrümmung äußert sich noch auf eine andere Art. Wir betrachten zunächst ein großes würfelförmiges Raumgebiet, in dem sich kein Himmelskörper befindet; der Raum in dem Würfel ist also nicht gekrümmt, Abb. 9.7 oben.

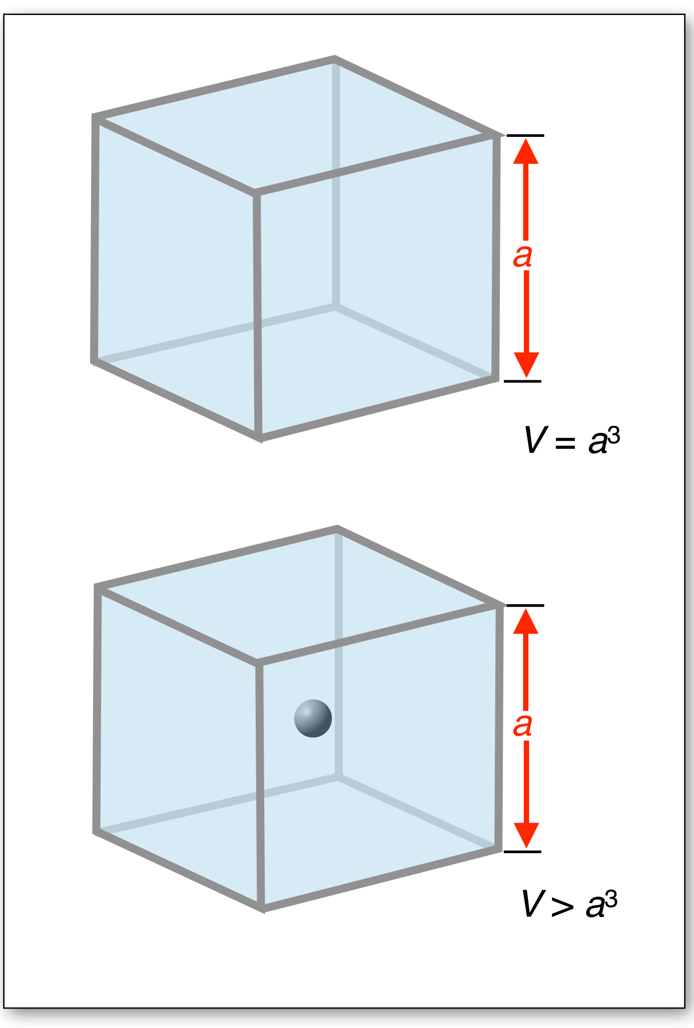


Abb. 9.7
Das Volumen des Würfels, in dem sich ein schwerer Himmelskörper befindet, ist größer als a^3.

Wenn die Kantenlänge des Würfels a ist, hat der Würfel ein Volumen von:

$V = a^3$.

Wir nehmen nun an, dass sich in der Mitte des Würfels ein Himmelskörper befindet, Abb. 9.7 unten. Der Würfel soll so groß sein, d.h. die Würfeloberfläche soll so weit vom Himmelskörper entfernt sein, dass der Raum dort außen flach ist; je vier Würfelkanten sind parallele Geradenstücke. Nun die Merkwürdigkeit: Das Volumen des Raums innerhalb des Würfels ist nicht mehr gleich a^3, es ist größer. In den Würfel passt mehr hinein, als in den Würfel ohne Himmelskörper. Wir können also sagen:

Das Volumen eines Raumbereichs wird durch Energie/Masse vergrößert.

Wieder etwas, was man sich nicht vorstellen kann? Nicht unbedingt. Dieselbe Sache in einer zweidimensionalen Welt würden wir ganz normal finden. Hier eine Geschichte, die vielleicht etwas unrealistisch ist, die dir aber hilft, unseren neuen Lehrsatz zu verstehen.

Ein Bauer hat einen Hektar Land gekauft, um eine Wiese für seine Schafe anzulegen. Er hätte gern mehr Land, aber er findet niemanden, der ihm welches verkauft. Er hat aber eine Idee: Er vergrößert die Fläche der Wiese, indem er auf dem gekauften Hektar einen Hügel aufschüttet, Abb. 9.8.

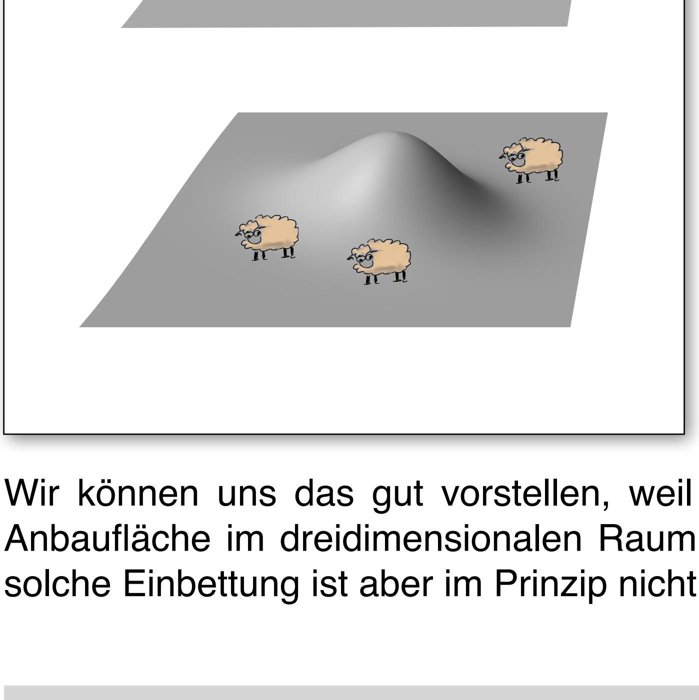


Abb. 9.8
Die quadratische Wiese mit dem Hügel hat einen größeren Flächeninhalt als die ohne Hügel.

Wir können uns das gut vorstellen, weil wir die zweidimensionale Anbaufläche im dreidimensionalen Raum „eingebettet“ sehen. Eine solche Einbettung ist aber im Prinzip nicht nötig.

Aufgaben

1. Im Text dieses Abschnitts kommt ein Würfel mit einer bestimmten Kantenlänge vor. Je nach dem, ob sich innerhalb des Würfels ein schwerer Stern befindet oder nicht, hat er ein anderes Volumen. Statt eines Würfels könnte man auch eine Kugel betrachten. Um ihr Volumen zu berechnen geht man von seiner Oberfläche aus. In eine Kugel mit einer bestimmten Oberfläche passt mehr hinein, wenn sich in ihrem Innern ein schwerer Körper, also zum Beispiel ein Stern, befindet.

Stelle eine Formel auf, mit der man das Volumen einer leeren Kugel berechnen kann, wenn man ihre Oberfläche kennt.

2. Die quadratische Wiese in Abbildung 9.8 veranschaulicht in einer zweidimensionalen Welt den unterschiedlichen Flächeninhalt eines Quadrates bei gleicher Kantenlänge. An Stelle der quadratischen Umrandung können wir auch einen Kreis wählen. Dabei stellen wir fest, dass bei gleichem Kreisumfang der Flächeninhalt davon abhängt, ob sich im Kreis ein Hügel befindet oder nicht.

Veranschauliche dies in einer Skizze.

9.4 Flugbahnen im Gravitationsfeld

Wir interessieren uns für die Bahn eines leichten „Objekts“ in der Umgebung eines schweren, also:

- eines Planeten, der sich um die Sonne herumbewegt;
- eines Satelliten in einer Erdumlaufbahn;
- von Licht, das von einem fernen Stern kommt und dicht an der Sonne vorbeiläuft

Wir nennen den leichten Körper L und den schweren S.

Wenn der schwere Körper nicht da wäre, würde sich L auf einer Gerade bewegen. Wenn wir statt L zwei leichte Körper L_1 und L_2 losschicken, und zwar so, dass beide parallel zueinander mit derselben Geschwindigkeit starten, so bleiben ihre Bahnen parallel zueinander.

Wir nehmen nun unseren schweren Körper S hinzu. Dabei passiert zweierlei:

- Der leichte Körper wird wegen der Gravitation abgelenkt, denn über das Gravitationsfeld fließt Impuls von S nach L. Die Linie, die seine Bahn beschreibt, wird gekrümmt.
- Der Raum wird gekrümmt.

Beide Effekte tragen dazu bei, dass Bahnen, die ursprünglich parallel waren, nicht parallel bleiben.

Der erste Effekt, d.h. die Bahnablenkung durch Impulsübertragung, hängt von der Geschwindigkeit von L ab, der zweite Effekt nicht.

Schnell vorbei fliegende Objekte

Wir beginnen mit einem „Objekt“, das mit maximaler Geschwindigkeit, d.h. mit (fast) der Grenzgeschwindigkeit, dicht an der Sonne vorbei fliegt. Es kann sich dabei auch um Licht handeln, das von einem anderen Stern kommt, und das sich ja genau mit der Grenzgeschwindigkeit bewegt.

Wir sehen zunächst von der Raumkrümmung ab. Es ist klar, dass die Bahn gekrümmt ist, denn die Sonne zieht den Körper oder das Licht an, Abb. 9.9.

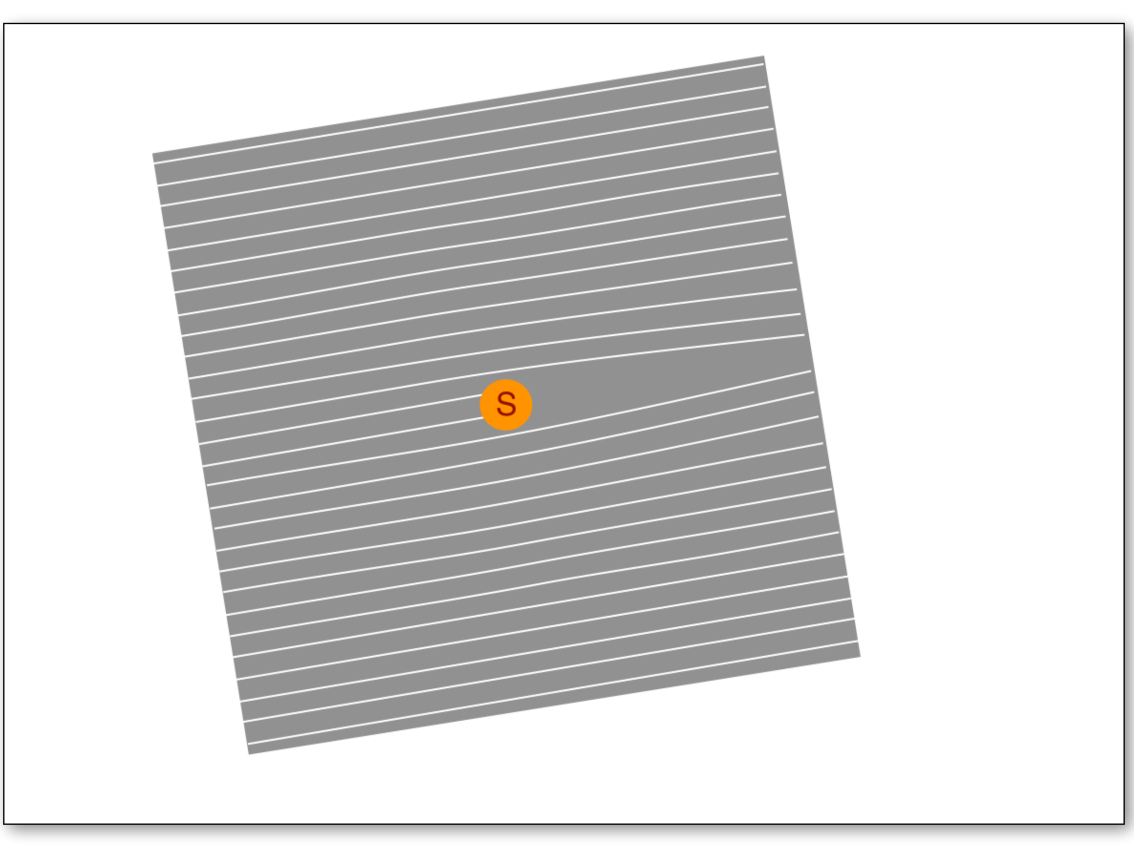


Abb. 9.9
So würde das Licht abgelenkt, wenn der Raum flach wäre.

In anderen Worten: der Körper oder das Licht bekommt über das Gravitationsfeld Impuls von der Sonne. Der Ablenkungswinkel (im Bogenmaß) beträgt

$$\alpha = 2\frac{G}{c^2}\cdot\frac{m}{r} \qquad (1)$$

Hier sind G und c universelle Konstanten (die Gravitationskonstante und die Grenzgeschwindigkeit).

Wir leiten die Formel nicht her, denn die Rechnung ist etwas trickreich. Die Gleichung ist aber plausibel: Die Ablenkung ist um so größer

- je größer die Masse m des Zentralkörpers ist;
- je kleiner der Abstand r vom Mittelpunkt des Zentralkörpers ist.

Nun ist dieses Ergebnis noch nicht vollständig, denn in der Rechnung wurde so getan als wäre der Raum flach, also nicht gekrümmt, d.h. als wären die Geodäten Geraden.

Allein die Krümmung des Raumes in der Umgebung von S bewirkt aber schon, dass die Geodäten keine Geraden sind. Daraus ergibt sich ein weiterer Beitrag zur Ablenkung, Abb. 9.10. Die Rechnung (die wieder kompliziert ist) liefert noch einmal denselben Beitrag zur Ablenkung wie Gleichung (1). Die gesamte Ablenkung ist daher:

$$\alpha = 4\frac{G}{c^2}\cdot\frac{m}{r} \qquad (2)$$

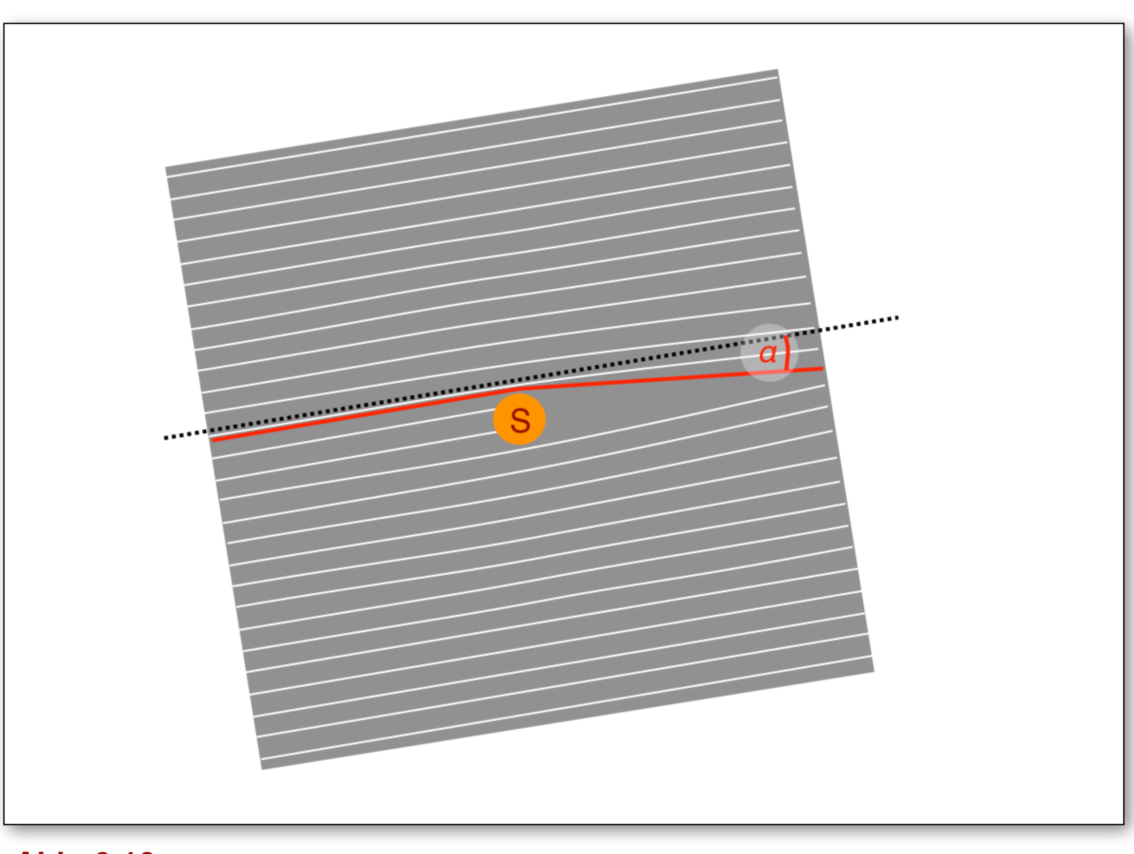


Abb. 9.10
Zur Ablenkung des Lichts von der geraden Bahn tragen zwei Effekte bei:
- die Ablenkung durch Impulsübertrag von der Sonne (helle Linien);
- die Raumkrümmung.

Wir berechnen diesen Ablenkungswinkel für Licht, das von einem Stern kommt, und dicht an der Sonnenoberfläche vorbei läuft, Abb. 9.11.

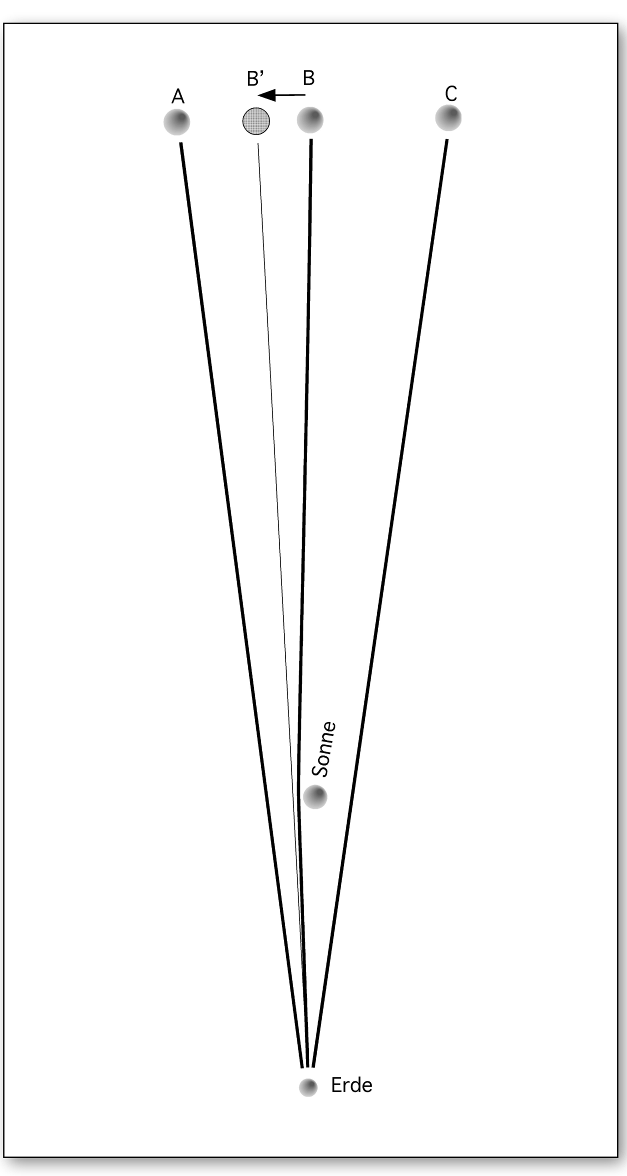


Abb. 9.11
Das Licht von Stern B, das dicht an der Sonne vorbeiläuft, wird abgelenkt und trifft auf die Erde. Stern B scheint daher weiter links zu stehen als es seiner tatsächlichen Lage entspricht. (Die Zeichnung ist nicht maßstäblich.)

Wir brauchen die folgenden Daten:

Gravitationskonstante $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m^3/(kg \cdot s^2)}$
Grenzgeschwindigkeit $c = 3{,}00 \cdot 10^8$ m/s
Masse der Sonne $m = 1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg
Radius der Sonne $r = 696\,000$ km

Eingesetzt in Gleichung (2) erhalten wir im Bogenmaß

$$\alpha = 4\frac{G}{c^2}\cdot\frac{m}{r} = 0{,}85 \cdot 10^{-5}$$

Multipliziert mit $(180°/\pi)$ ergibt sich der Winkel im Gradmaß:

$$\alpha = 4{,}87 \cdot 10^{-4}\ \text{grad} = 1{,}75'' \text{ (Winkelsekunden)}$$

Der Effekt ist also sehr klein.

Du wirst dich fragen, wie man denn die Ablenkung des Lichts von einem Stern, der am Himmel direkt neben dem Sonnenrand steht, überhaupt messen kann. Schließlich wird doch am Tag das Licht der Sterne von der Sonne völlig überstrahlt. Man muss also einen Trick anwenden: Man misst während einer Sonnenfinsternis, d.h., wenn das helle Licht der Sonne durch den Mond abgeschirmt wird.

Ein solche Messung wurde 1919 zum ersten Mal durchgeführt, also kurz nachdem Einstein seine Gravitationstheorie veröffentlicht hatte. Dass das Licht abgelenkt werden sollte, hatte man schon vorher gewusst, aber man hätte früher mit einer Ablenkung nach Gleichung (1) gerechnet. Die Messung hat aber den doppelten Wert, also den nach Gleichung (2) berechneten ergeben. Sie hat damit bestätigt, dass der Raum gekrümmt ist. Damit war auch die Allgemeine Relativitätstheorie bestätigt.

Bahnen von Satelliten, Planeten und Monden

Wir hatten früher die Bahnen von Satelliten, Planeten und Monden untersucht. Solche Bahnen sind Ellipsen oder als Sonderfall Kreise.

Dass die Bahnen Ellipsen sind, gilt streng genommen nur, wenn der Raum nicht gekrümmt ist. Nun ist die Raumkrümmung in der Umgebung der Sonne und der Planeten so gering, dass die Bahnen von Planeten und Monden tatsächlich in sehr guter Näherung Ellipsenbahnen sind.

Der Raum ist aber nicht ganz exakt flach, und so gibt es doch eine kleine Abweichung von der Ellipsenform der Bahnen. So wie die Bahn des Lichts, das an der Sonne vorbeiläuft durch die Raumkrümmung zusätzlich zur Sonne hingebogen wird, so werden auch die Planetenbahnen zusätzlich zur Sonne hingebogen, und zwar dort, wo der Planet der Sonne am nächsten ist, stärker als dort wo er weiter weg ist. Das Ergebnis kann man so beschreiben: Eine Ellipse, die sich mit der Zeit ganz langsam dreht, und zwar in derselben Richtung, in der der Planet läuft, Abbildung 9.12. Man nennt eine solche Drehung der Ellipsenbahn eine *Periheldrehung*. (Das *Perihel* ist der sonnennächste Punkt der Bahnellipse, der sonnenfernste Punkt ist das *Aphel*).

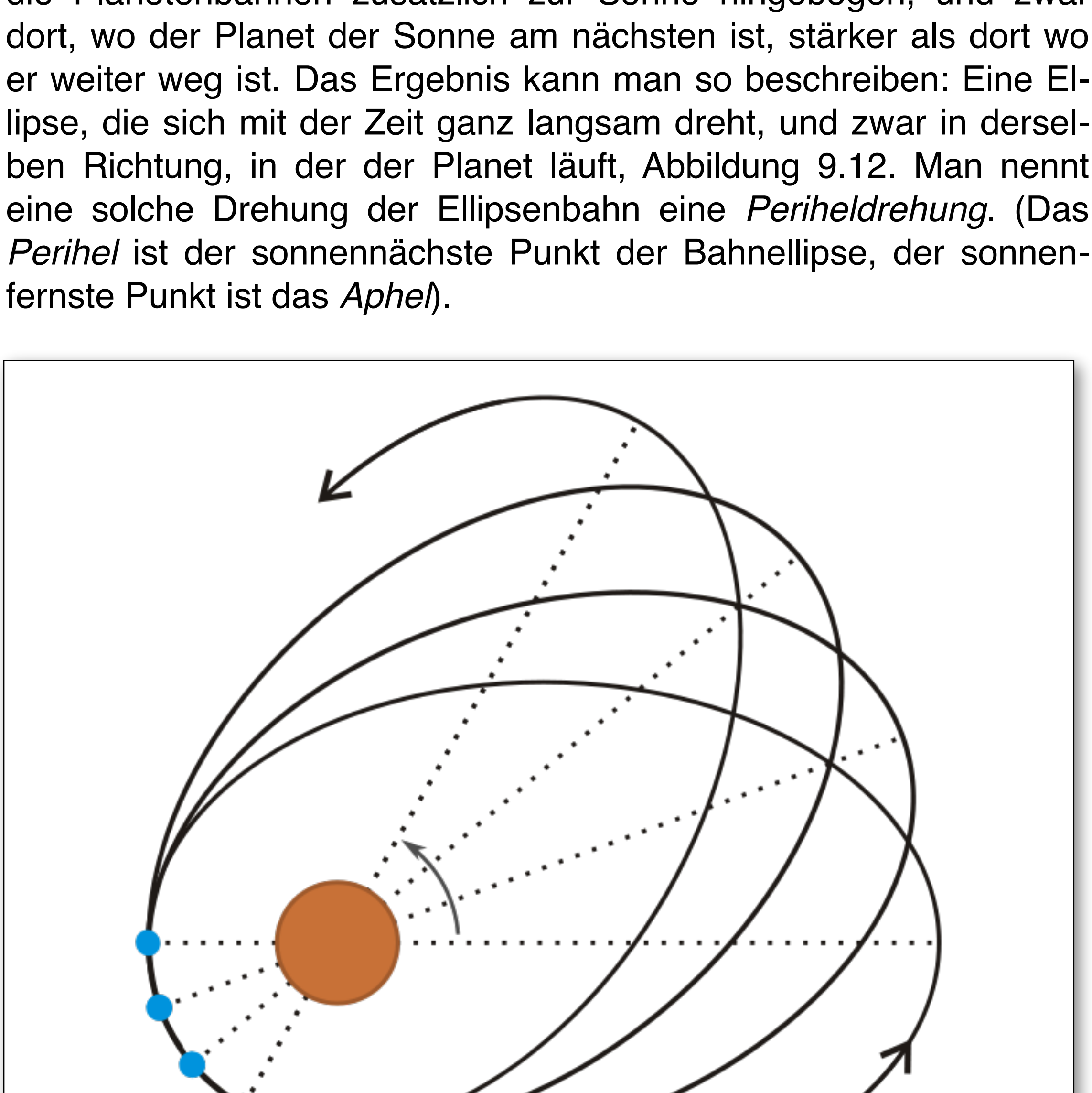


Abb. 9.12
Bahn eines leichten Himmelskörpers in der Umgebung eines schweren. Wäre der Raum flach, so hätte die Bahn die Form einer Ellipse. Durch die Raumkrümmung wird daraus eine „Rosettenbahn“. Bei den Planeten der Sonne ist der Effekt sehr schwach.

Bei den Planeten der Sonne ist die Periheldrehung, die durch die Raumkrümmung verursacht wird, sehr schwach und man kann sie nur bei den Planeten beobachten, die der Sonne am nächsten sind: Merkur, Venus, Erde und Mars. Am stärksten (aber immer noch sehr klein) ist sie beim Merkur. Die große Achse der Merkur-Ellipse dreht sich auf Grund der Raumkrümmung um 43 Winkelsekunden pro Jahrhundert. (Tatsächlich drehen sich die Ellipsen noch aus einem anderen Grund: Weil die Bahn jedes Planeten von den anderen Planeten gestört wird. Die 43’’ sind also nur der Beitrag, den die Raumkrümmung verursacht.)

Viel größer ist der Effekt der Periheldrehung bei Himmelskörpern, die den Raum stärker krümmen: in der Umgebung von Neutronensternen und schwarzen Löchern.

Aufgaben

1. Berechne die Ablenkung von Licht,

(a) das am Rande eines Neutronensternes mit der Masse $m = 3 \cdot 10^{30}$ kg und einem Radius von $R = 10$ km vorbeikommt.

(b) das am Rande der Erde vorbeikommt.

2. Wir blicken auf einen nahen Himmelskörper. Er erscheint uns als Scheibe.

(a) Ist der Himmelskörper die Sonne oder der Mond, so sehen wir weniger als die Hälfte der Oberfläche. Erkläre. (Anleitung: der Effekt wird umso größer, je näher wir dem Himmelskörper sind.)

(b) Ist der Stern ein Neutronenstern, so sehen wir mehr als die Hälfte seiner Oberfläche. Erkläre.

9.5 Der Schwarzschildradius

In diesem Abschnitt gibt es nicht viel zu verstehen. Es geht nur um die Vereinfachung einer Schreibweise.

Hier noch einmal Gleichung (2), die uns sagt, wie stark ein Lichtstrahl von einem Himmelskörper der Masse *m* abgelenkt wird:

$$\alpha = 4\frac{G}{c^2}\cdot\frac{m}{r}$$

Wir führen nun eine Abkürzung ein:

$$r_S = 2\frac{G}{c^2}\cdot m \qquad (3)$$

Damit vereinfacht sich die Gleichung für den Ablenkwinkel:

$$\alpha = 2\frac{r_S}{r}$$

Man sieht, dass die neue Größe r_S in Metern gemessen wird.

Man nennt sie den *Schwarzschildradius*. Da *G* und *c* Naturkonstanten sind, ist r_S nichts anderes als ein Maß für die Masse – nur eben in Metern ausgedrückt.

Wir setzen die Werte von *G* und *c* in Gleichung (3) ein und erhalten:

$$r_S = m \cdot 1{,}48 \cdot 10^{-27}\ \text{m/kg}$$

Warum führt man r_S überhaupt ein? Weil der Ausdruck auf der rechten Seite von Gleichung (3) noch in vielen anderen Formeln auftritt, und diese übersichtlicher werden, wenn man ihn durch r_S abkürzt. Außerdem bekommt r_S im Zusammenhang mit schwarzen Löchern noch eine besondere Bedeutung – aber davon später.

Schwarzschildradius = Masse · 1,48 · 10^{-27} m/kg

Um eine Vorstellung von typischen Werten des Schwarzschildradius zu bekommen, zeigt Tabelle 9.1 einige Beispiele.

Körper	**Masse**	**Schwarzschildradius**
Buch	0,5 kg	0,74 · 10^{-27} m
Mond	7,35 · 10^{22} kg	0,11 mm
Erde	5,97 · 10^{24} kg	9 mm
Sonne	1,99 · 10^{30} kg	3 km

Tabelle 9.1
Beispiele für Schwarzschildradien

9.6 Zeitintervalle

Wir wissen, dass Uhren im Gravitationsfeld unterschiedlich gehen, je nachdem wo sie sich befinden. Wir hatten gesehen, dass in der Nähe der Erdoberfläche die höhere Uhr schneller läuft als die niedrigere.

Für einen kugelförmigen Himmelskörper gilt die einfache Formel

$$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{r_S}{r}}}\Delta t_0 \tag{4}$$

Sie gilt überall außerhalb des Himmelskörpers. Δt_0 ist der zeitliche Abstand zwischen zwei Ereignissen im Abstand r vom Himmelskörper gemessen. Δt ist der zeitliche Abstand derselben Ereignisse, den man misst, wenn man sich in großer Entfernung vom Himmelskörper befindet. In anderen Worten: in der Nähe des Himmelskörpers vergeht die Zeit langsamer. r_S ist der Schwarzschildradius. Normalerweise, d.h. an der Oberfläche von Erde oder Mond, oder auch der Sonne, ist r_S sehr viel kleiner als r, siehe Tabelle 9.1. Das bedeutet, dass die Wurzel in Gleichung (4) fast gleich 1 ist, und das heißt wiederum, dass die beiden Zeitintervalle praktisch gleich sind, so wie wir es aus dem täglichen Leben kennen.

Die kleine Abweichung, die sich ergibt, hatten wir früher schon angesprochen, als es um das GPS ging.

Der Unterschied kann aber auch groß werden. Radius und Masse eines typisches Neutronensterns sind etwa

$r = 10$ km

$m = 3 \cdot 10^{30}$ kg .

Damit ergibt sich der Schwarzschildradius zu

$r_S = 4{,}5$ km .

In Gleichung (4) eingesetzt erhalten wir:

$\Delta t \approx 1{,}35\ \Delta t_0$.

Willy, der an der Oberfläche des Neutronensterns lebt, merkt natürlich nichts davon, dass bei ihm die Zeit langsamer läuft; er stellt vielmehr fest, dass die Uhren weit draußen, wo Lilly lebt, schneller laufen. Wenn er Lilly mit seinem Laser zwei kurze Lichtsignale im Abstand von 1 Minute schickt, vergehen bei Lilly zwischen den Ankunftszeitpunkten 81 Sekunden, also 1 Minute und 21 Sekunden. Und Lilly sieht, dass Willys Uhr langsamer läuft als ihre eigene. Willy hat sich übrigens neben seiner normalen Uhr noch eine zweite angeschafft, die so schnell läuft, dass sie Lillys Zeit anzeigt, Lillys Ortszeit also. Und auch Lilly hat neben ihrer eigenen, normalen Uhr eine zweite Uhr stehen, die langsamer läuft und die Ortszeit von Willy anzeigt.

Dir ist sicher aufgefallen, dass diese Geschichte wieder einmal völlig unrealistisch ist. Willy könnte sich auf keinen Fall an der Oberfläche eines Neutronenstern aufhalten, so gut er sich auch gegen Strahlungen und hohe Temperaturen schützt. Er würde durch das starke Gravitationsfeld platt gedrückt, denn die Feldstärke ist (siehe Gleichung (7) in Kapitel 4):

$$g = G \cdot \frac{m}{r^2} \approx 2 \cdot 10^{23}\ \text{N/kg}$$

> Von außen gesehen vergeht die Zeit in der Nähe eines schweren Körpers langsamer als in großer Entfernung:
>
> $$\Delta t = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{r_S}{r}}}\Delta t_0$$

Gleichung (4) enthält noch eine Tücke.

Wir betrachten einen Kreis, dessen Mittelpunkt mit dem Mittelpunkt des Zentralkörpers übereinstimmt.

In unserer flachen Welt ist der Zusammenhang zwischen Umfang U und dem Abstand r zum Mittelpunkt (den man Radius nennt)

$$r = \frac{U}{2\pi} \ .$$

In der Umgebung eines schweren Himmelskörpers gilt das nicht mehr. Hier ist der Abstand zum Zentrum größer. Wir wollen ihn mit ρ bezeichnen. Es gilt also

$\rho > r$.

Achtung: ρ ist nicht der Radius des Kreises.

Um Gleichung (4) richtig zu lesen, musst du wissen, dass dort r steht, und nicht ρ. Es steht dort also nicht der Abstand zum Mittelpunkt, sondern der Umfang eines Kreises geteilt durch 2π.

Aufgaben

Willy befindet sich auf einem Neutronenstern, dreht ein Video und schickt es Lilly, die sich weit draußen befindet. Was sieht Lilly auf dem Video? (Wir nehmen an, dass Willy durch das starke Gravitationsfeld nicht zu Schaden kommt.)

9.7 Schwarze Löcher

Weil der Einfluss der Masse/Energie auf Raum und Zeit in der Umgebung von schwarzen Löchern besonders dramatisch ist, wollen wir uns mit diesen Himmelskörpern etwas ausführlicher beschäftigen.

Der Ereignishorizont

Bisher war r_S für uns nicht mehr als ein Maß für die Masse eines Körpers, oder eine Größe, mit der wir verschiedene Gleichungen einfacher schreiben können. Wir werden jetzt sehen, dass der Schwarzschildradius eine sehr konkrete Bedeutung bekommt. Ein schwarzes Loch entsteht, wenn ein Stern, dessen Kernbrennstoff verbraucht ist, schrumpft und sein Radius sich dem Schwarzschildradius r_S nähert.

Dazu zunächst ein Abstecher: Wir hatten früher (Kapitel 4, Gleichung (7)) gesehen, dass man die Gravitationsfeldstärke für einen kugelsymmetrischen Himmelskörper mit der Gleichung

$$g(r) = G \cdot \frac{m}{r^2}$$

berechnen kann. Hier ist G die Gravitationskonstante, m die Masse des Körpers und r der Abstand vom Mittelpunkt.

Die Formel gilt nur für das Gebiet außerhalb des Körpers. Wenn wir uns nun vorstellen, dass die ganze Masse auf einen Punkt konzentriert ist, so gilt die Gleichung – abgesehen von dem Punkt – überall. Wenn man sich aber diesem Punkt nähert, wenn also r gegen null geht, so geht die Feldstärke gegen unendlich; sie wird beliebig groß.

Zurück zum schwarzen Loch. Auch hier nimmt die Feldstärke zu, wenn man sich dem Mittelpunkt nähert, allerdings geht sie schon weiter außen gegen unendlich, nämlich am *Ereignishorizont*. Der Ereignishorizont ist diejenige Kugeloberfläche, für die

$$r = r_S$$

ist. Dass an dieser Stelle etwas passieren muss, sieht man schon an Gleichungen (4) im vorigen Abschnitt an. Wenn r gleich dem Schwarzschildradius wird, wird $\Delta t = 0$. Für einen Außenstehenden bleibt die Zeit am Ereignishorizont stehen.

Außerdem geht also auch die Gravitationsfeldstärke gegen unendlich. Das bedeutet, dass jedes Objekt, das in die Nähe des Ereignishorizonts geraten ist, von dem schwarzen Loch angezogen wird und nicht mehr nach außen zurückkommen kann: kein Körper, kein Teilchen und auch kein Licht.

Kein Körper, kein Teilchen, kein Licht kann den Ereignishorizont verlassen oder von innen durchqueren.

Das schwarze Loch von außen gesehen

Da die Zeit am Ereignishorizont im Vergleich zur Zeit weit außerhalb stehen bleibt, wird ein Körper, den das schwarze Loch einfängt, oder der auf das schwarze Loch zu fällt, immer langsamer, bis er am Ereignishorizont ganz stehen bleibt. Darum nennt man ein schwarzes Loch auch einen *eingefrorenen Stern*. Wir Außenstehende erleben nie, dass irgendetwas, das auf das Zentrum des schwarzen Loches zu fällt, auch in das schwarze Loch hineinfällt. Schon bei der Entstehung des schwarzen Lochs, wenn sich die Materie eines ausgebrannten Sterns nach innen bewegt, können wir von außen nur den Zustand dieser Materie kurz vor dem Erreichen des Ereignishorizonts sehen. Wir sehen also in die Vergangenheit – bis zur Zeit der Entstehung des schwarzen Loches.

Mit dem „Sehen" gibt es allerdings ein Problem, denn um etwas zu sehen, muss Licht nach außen kommen. Die Wellenlänge von Licht, das sich im Gravitationsfeld „nach oben" bewegt, wird größer, die Frequenz wird kleiner. Licht, das vom Ereignishorizont kommt, hat schließlich eine unendlich große Wellenlänge, oder die Frequenz null, was bedeutet, dass vom Ereignishorizont kein Licht mehr nach außen gelangt. Das ist der Grund dafür, dass ein schwarzes Loch schwarz aussieht. Für uns ist der Ereignishorizont gewissermaßen eine Grenze der Welt. Der Bereich „hinter" dem Ereignishorizont ist vom Rest der Welt abgeschnitten.

Die Außenwelt vom schwarzen Loch aus gesehen

Wir stellen uns nun vor, wir befänden uns in der Nähe, aber außerhalb des Ereignishorizonts. Hier gilt gerade das Umgekehrte von dem, was wir gerade für die Betrachtung von außen festgestellt haben. Von hier aus betrachtet läuft die Zeit außerhalb schneller, und zwar beliebig schnell, wenn man sich dem Ereignishorizont nur genügend nähert. Man würde daher beliebig weit in die Zukunft der Außenwelt sehen. Mit dem Sehen haben wir allerdings auch hier ein Problem, denn das „Licht", das von außen kommt, hat eine beliebig kurze Wellenlänge. Statt sichtbarem Licht kommt, je nach unserem Abstand zum Ereignishorizont, UV-Licht, Röntgenstrahlung oder sogar Gammastrahlung – aber wir wussten ja schon, dass es in der Nähe des Ereignishorizonts nicht sehr gemütlich ist.

9.8 Gravitationswellen

Dass der Raum mehr ist als nur Platz für irgendetwas ist, sieht man besonders deutlich an der Tatsache, dass es *Gravitationswellen* gibt: Verzerrungen des Raumes, die sich durch den Raum hindurch bewegen, ähnlich wie bei einer Schallwelle eine Veränderung der Dichte durch die Luft hindurch läuft.

Gravitationswellen bewegen sich mit derselben Geschwindigkeit wie elektromagnetische Wellen, d.h. mit der Grenzgeschwindigkeit *c*.

So wie elektromagnetische Wellen durch hin und her schwingende elektrische Ladung erzeugt werden, oder Schallwellen durch eine hin und her schwingende Lautsprechermembran, so entstehen Gravitationswellen durch das Hin- und Herschwingen von Masse, d.h. von Körpern.

Bei Bewegungen von Körpern unter irdischen Bedingungen sind die erzeugten Wellen außerordentlich schwach. Um Wellen zu erzeugen, die man nachweisen kann, müssen gigantische Massen sehr schnell schwingen. Solche Vorgänge spielen sich aber im Weltall durchaus ab.

Zwei Sterne, die umeinander kreisen, bilden ein *Doppelsternsystem*. Auf Grund ihrer Bewegung strahlen sie Gravitationswellen ab. Bei „normalen" Doppelsternsystemen ist diese Abstrahlung aber immer noch so gering, dass wir sie nicht nachweisen können. Anders sieht es aus, wenn die Sterne schwer und klein sind, sodass sie in einem sehr geringen Abstand umeinander kreisen können, und daher auch sehr schnell kreisen. Das ist der Fall für Doppelsternsysteme, deren Partner weiße Zwerge, Neutronensterne oder schwarze Löcher sind. Man kann dann feststellen, dass die Umlaufzeit nach und nach etwas kürzer und der Abstand der beiden Sterne kleiner wird. Daran erkennt man, dass das System Energie verliert. Diese Energie geht mit Gravitationswellen weg.

Hier ein Beispiel, das zeigt, wie klein solche Effekte sind:

Die beiden weißen Zwerge J065133.338 und 284423.37 kreisen umeinander. Ihre Massen sind 0,26 bzw. 0,5 Sonnenmassen. Die Umlaufzeit beträgt 12,75 Minuten. Man kann von der Erde aus messen, dass die Umlaufzeit pro Jahr um 310 Mikrosekunden abnimmt. Die Wellen selbst sind allerdings immer noch so schwach, dass man sie nicht nachweisen kann.

Es gibt aber Ereignisse im Weltraum, bei denen so starke Wellen erzeugt werden, dass man sie auf der Erde direkt nachweisen kann. Zwei schwarze Löcher, die umeinander kreisen, verlieren nach und nach Energie, ihr Abstand wird kleiner und kleiner, ihre Umlaufzeit kürzer und kürzer. Dabei wird die Abstrahlung immer größer und die Rotation immer schneller, siehe oben. Irgendwann kommt aber das Ende: Die schwarzen Löcher verschmelzen. Während der letzten Umdrehungen, die mit einer sehr hohen Geschwindigkeit ablaufen, wird eine starke Gravitationswelle abgestrahlt. Sie ist so stark, dass wir sie auf der Erde messen können, auch wenn das Ereignis in einer Entfernung von 10^9 Lichtjahren stattfand, also in einer weit entfernten Galaxie. (Hast du bemerkt, dass es heißt „stattfand" und nicht „stattfindet"? Denn wenn die Entfernung des Ereignisses 10^9 Lichtjahre beträgt, so liegt es auch entsprechend weit in der Vergangenheit.)

Wie sieht eine Gravitationswelle aus, wenn sie bei uns ankommt? Sie besteht in einer Verzerrung des Raums: Abstände zwischen zwei Körpern werden verändert: vergrößert oder verkleinert. Wie das im Einzelnen geschieht, zeigt die Animation der Abb. 9.13. (Um die Animation zu sehen, brauchst du eine Internetverbindung.)

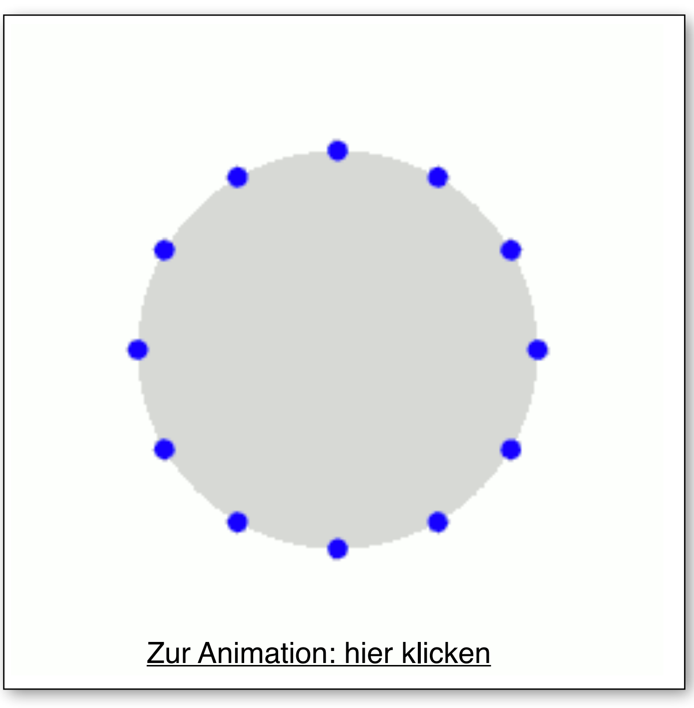


Abb. 9.13
Von der Mitte aus gesehen vergrößern und verkleinern sich die Abstände der blauen Körper. (Die Welle läuft senkrecht zur Zeichenebene.)

Es ist nicht ganz leicht, die Abbildung richtig zu lesen. Die Welle läuft senkrecht zur Zeichenebene. Wir befinden uns im Mittelpunkt und betrachten die Abstände zu Körpern, die im Kreis um uns herum angeordnet sind. Die Welle bewirkt, dass sich diese Abstände periodisch vergrößern und verkleinern. Wenn sie in der einen Richtung zunehmen, nehmen sie in der dazu orthogonalen Richtung ab. Man kann auch sagen, dass beim Durchgang der Welle das Volumen des Raumes konstant bleibt. Abb. 9.14 zeigt den Vorgang in drei Dimensionen. Hier sieht man auch das Fortschreiten der Welle.

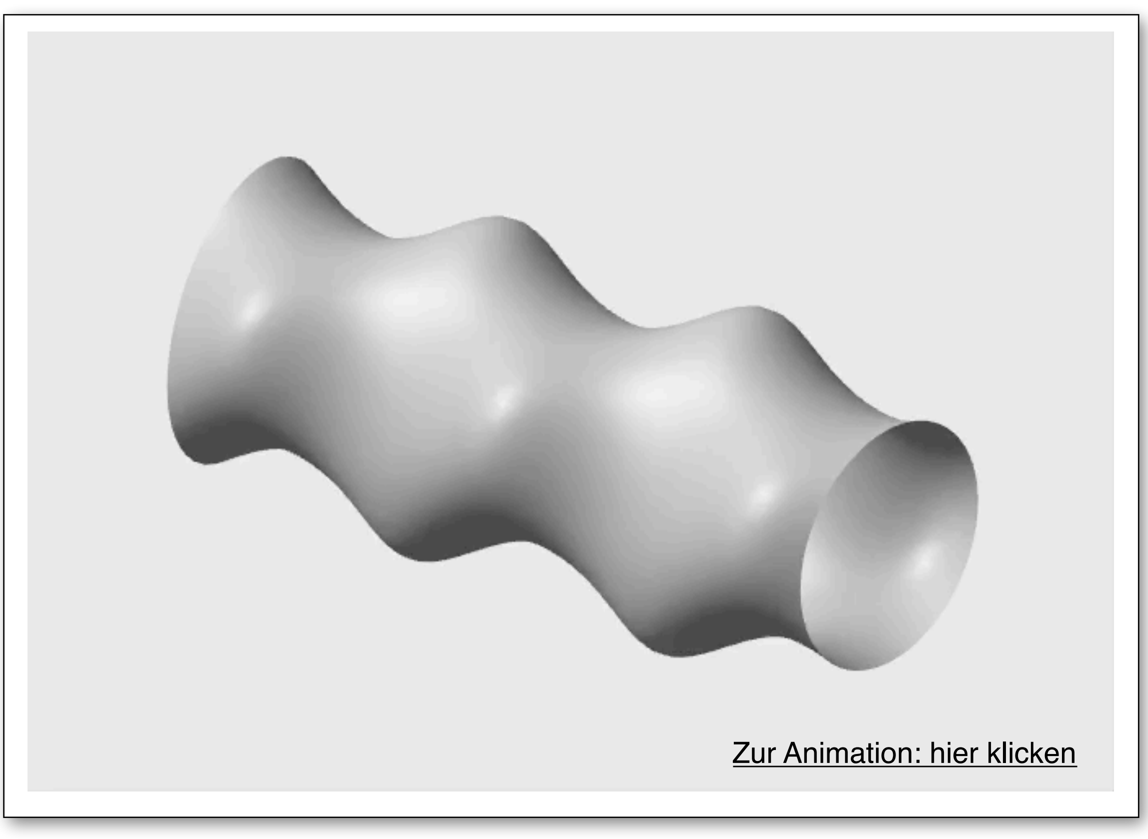


Abb. 9.14
Verformung des Raumes von der Mittelachse aus gesehen.

Was Abb. 9.13 zeigt, gilt natürlich nicht nur für die Punkte auf der Mittellinie. Wir können die Achse an irgendeine andere Stelle parallel verschieben und genau so einen „Partyballon" zeichnen.

Es ist klar, dass das Bild die Größenverhältnisse gewaltig übertreibt. Die Streckung oder Kompression des Raumes ist in Wirklichkeit sehr viel geringer: Die Entfernung von zwei Körpern in 1 m Abstand ändert sich typischerweise um 10^{-22} Meter. Die Wellenlänge beträgt bei den Wellen, die man heutzutage direkt nachweisen kann, mehr als 1000 km.

Gravitationswelle: Der Raum wird quer zur Laufrichtung der Welle periodisch gestreckt und gestaucht. Der Abstand zwischen zwei Körpern verändert sich entsprechend.

Aufgaben

1. Vergleiche die Wellenlänge von rotem Licht mit der in diesem Kapitel angegebenen Länge einer Gravitationswelle. (Verhältnis?)

2. Lilly und Willy werden von einer Gravitationswelle getroffen, die senkrecht zur Zeichenebene verläuft. Abbildung 9.15 zeigt eine Momentaufnahme von einem Augenblick, in dem die Abstände in horizontaler Richtung gerade vergrößert werden. Willy sagt, die Punkte A und B entfernen sich von ihm. Und Lilly stellt fest, B und C entfernen sich von ihr. Wie passt das zusammen?

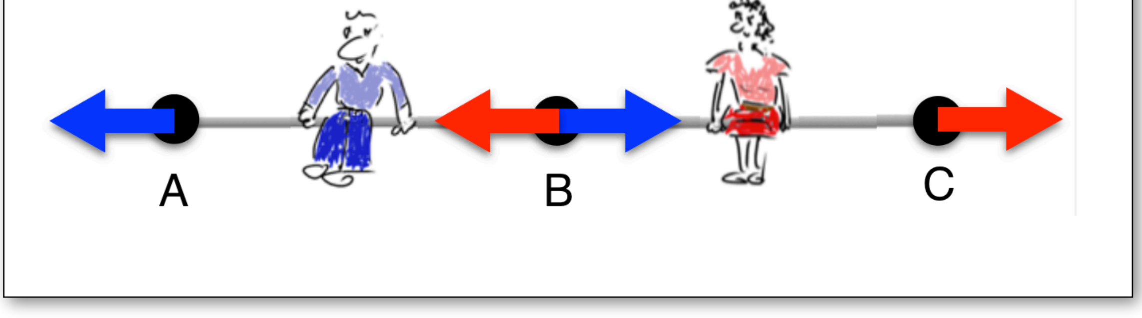


Abb. 9.15
Zu Aufgabe **2**

10

Kosmologie

10.1 Die Sterne in Bewegung

Die Kosmologie beschäftigt sich mit dem Aufbau und der Entwicklung des *Kosmos* oder *Universums*.

Der nächtliche Himmel erweckt einen Eindruck von Ruhe und Beständigkeit. Die Sterne scheinen immer an derselben Stelle zu stehen und mit konstanter Intensität zu leuchten.

Tatsächlich ist aber das Weltall in ständiger Entwicklung begriffen: Die Sterne bewegen sich gegeneinander. Es entstehen neue Sterne und andere vergehen, explodieren oder fallen in schwarze Löcher. Auch die Galaxien bewegen sich, sie rotieren und stoßen mit anderen Galaxien zusammen.

So bewegt sich die Sonne mit 220 km/s auf einer Bahn um das Zentrum der Milchstraße. (Zum Vergleich: Die Erde bewegt sich mit 30 km/s um die Sonne.)

Wenn man den Himmel an mehreren Tagen beobachtet und die Position der Himmelskörper vergleicht, so stellt man fest, dass sich der Mond und die Planeten bewegen, und zwar vor dem Hintergrund der Sterne. Die Sterne dagegen scheinen sich nicht zu bewegen. Warum sieht man nichts von der Bewegung der Sterne? Weil sie so weit weg sind. Ein Flugzeug am Himmel scheint sich sehr langsam zu bewegen. Dabei ist seine Geschwindigkeit ungefähr 800 km/h. Eine Bewegung erscheint uns um so langsamer, je weiter der sich bewegende Gegenstand von uns entfernt ist. Was wir wahrnehmen, ist die Änderung der Richtung, in der wir den Gegenstand sehen. Man kann auch sagen, wir nehmen die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \frac{v}{r}$$

wahr, und diese ist bei gegebener Geschwindigkeit v um so kleiner, je größer der Abstand r zu uns ist.

Andere dramatische kosmische Ereignisse sehen wir am nächtlichen Himmel nicht, weil sie in unserer engeren Nachbarschaft nicht oft genug auftreten. Der nächste Quasar ist (oder war?) mehrere Milliarden Lichtjahre von uns entfernt, und daher mit bloßem Auge nicht zu erkennen.

Noch interessanter, aber mit dem bloßen Auge schon gar nicht erkennbar ist ein anderer Vorgang: Der Kosmos dehnt sich aus. Es ist so, als bewegten sich die Galaxien von uns weg. Vor allem mit dieser Erscheinung werden wir uns im Folgenden befassen.

Zunächst aber noch etwas zum Handwerkszeug.

Wir haben es im Folgenden mit sehr großen Entfernungen zu tun. Dabei ist es zweckmäßig, Abstände nicht in Metern anzugeben, sondern in einer viel größeren Maßeinheit, dem Lichtjahr (Lj). Ein Lichtjahr ist die Länge der Strecke, die das Licht in einem Jahr durchläuft. Es gilt:

1 Lj = $9{,}461 \cdot 10^{15}$ m.

Außer dem Lichtjahr werden manchmal auch die Einheiten Lichtstunde, Lichtminute oder Lichtsekunde benutzt. Hier einige Beispiele für kosmische Entfernungen:

Erde - Mond	1,3 Lichtsekunden
Sonne - Erde	8,3 Lichtminuten
Durchmesser des Sonnensystems	150 Lichtstunden
Entfernung des sonnennächsten Sterns (Proxima Centauri)	4,2 Lj
Durchmesser der Milchstraße etwa	100 000 Lj

Man würde gern weiter machen: Entfernung des nächsten Quasars etc. Dabei stoßen wir schon auf die erste Schwierigkeit: Was wollen wir überhaupt unter der Entfernung verstehen: die Entfernung zu dem Zeitpunkt, als er das Licht emittiert hat, das jetzt bei uns ankommt, oder die Entfernung, die er heute von uns hat, falls es ihn überhaupt noch gibt?

10.2 Das kosmologische Prinzip

Eine Grundregel, die sich bestätigt hat, ist das *kosmologische Prinzip*. Es besagt, dass wir uns an keinem ausgezeichneten Ort im Universum befinden. Dazu gehört:

- Die Erde ist nicht der Mittelpunkt der Welt, wie man früher angenommen hatte. Vielmehr hat die Welt weder einen Rand, noch einen Mittelpunkt.
- Die Erde ist kein einzigartiger Planet, sondern einer von sehr vielen ähnlichen Planeten, die um andere Sterne kreisen.
- Die Sonne ist kein einzigartiger, sondern einer von unzähligen anderen gleichartigen Sternen.
- Unsere Milchstraße, ist keine besondere Galaxie, sondern eine von unzähligen anderen gleichartigen Galaxien.
- Unser Galaxienhaufen ist kein besonderer, sondern einer von unzähligen anderen gleichartigen Galaxienhaufen.

Die Galaxienhaufen sind die größten Strukturen, die es im Universum gibt. Wir wollen nun in Gedanken ein (riesiges) Gebiet, in dem sich sehr viele Galaxienhaufen befinden, aus dem Universum herausschneiden – und dann noch ein zweites an einer anderen Stelle des Universums. Man kann nun sagen, dass diese beiden Gebiete im Mittel gleich aussehen.

Man sagt, der Kosmos sei „auf einer großen Längenskala“ homogen.

Man kann diese Eigenschaft des Kosmos vergleichen mit der eines Gases – von Luft zum Beispiel. Eine Portion Luft in einem Würfel mit 1 cm Kantenlänge ist zunächst nicht zu unterscheiden von der Luft in einem Nachbarwürfel: In beiden hat die Luft dieselbe Dichte, dieselbe Temperatur, denselben Druck. Erst wenn man die Luft sehr stark vergrößert betrachtet, sieht man, dass die Stickstoff- und Sauerstoffmoleküle völlig unregelmäßig herum fliegen, und an jedem Ort sieht „die Welt“ anders aus. So ist die Luft in einem Würfel mit einem Volumen von 1 cm^3 schon homogen; beim Universum muss man einen Würfel mit mindestens 10^8 Lj Kantenlänge betrachten.

Auf großen Längenskalen ist das Universum homogen.

Man könnte vermuten, dass wir uns auch auf der Zeitskala an keiner ausgezeichneten Stelle befinden, dass das Universum zu allen Zeiten im Mittel so war, wie es heute ist. Das trifft aber nicht zu, wie wir bald sehen werden.

10.3 Gekrümmt oder nicht gekrümmt?

Wir hatten gesehen, dass der Raum in der Nähe schwerer Himmelskörper „gekrümmt“ ist. Außerhalb ist er „flach“. Dass er in größerer Entfernung von schweren Himmelskörpern flach ist, wird auch durch unsere alltägliche Erfahrung bestätigt. Nun müssen wir aber damit rechnen, dass der Raum nur näherungsweise flach ist. Wir wissen: Krümmung wird durch Energie (= Masse) verursacht. Der Kosmos enthält Energie, also könnte man erwarten, dass er gekrümmt ist, wenn auch nur sehr wenig. Ist er also gekrümmt oder nicht?

Bevor wir zur Antwort auf diese Frage kommen noch eine Erweiterung unserer früheren Betrachtungen. Wir hatten in Abschnitt 9.3 gesehen, dass das Volumen eines Raumbereichs bei festgehaltener Oberfläche größer wird, wenn man einen Himmelskörper mit einer großen Masse hineinbringt.

Wir hatten dort einen würfelförmigen Raumbereich gewählt. Statt des Würfels nehmen wir jetzt einen kugelförmigen Bereich; das vereinfacht die Sache etwas. Außerdem stellen wir uns die Kugel sehr, sehr groß vor, sodass sehr, sehr viele Galaxien darin Platz haben.

Wir erwarten natürlich auch hier, dass das Volumen der Kugel etwas „zu groß“ ist. Im normalen, flachen Raum berechnet sich das Volumen einer Kugel nach

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

In unserem Raum, in dem sich Materie befindet, sollte also das Volumen etwas größer sein.

$$V > \frac{4}{3}\pi r^3$$

Achtung! Wie schon früher, ist hier mit r nicht der Abstand zum Zentrum gemeint, sondern der Umfang eines Großkreises dividiert durch 2π, siehe Abschnitt 9.6.

Wir wollen uns nun aber noch vorstellen, dass es möglich ist, dass die Masse von dem, was sich in dem Raumbereich befindet, negativ ist. Die Annahme scheint zunächst unsinnig zu sein, aber wer weiß? Vorstellen können wir es uns ja einmal. In diesem Fall würden wir erwarten, dass der Rauminhalt unserer Kugel kleiner ist als der einer Kugel im flachen Raum.

$$V < \frac{4}{3}\pi r^3$$

Auf jeden Fall wollen wir vorurteilslos an die Frage herangehen: Wie ist der Raum gekrümmt: So, dass sich ein zu großes, oder so, dass sich ein zu kleines Volumen ergibt?

Im Prinzip kann man die Frage auf zwei Arten beantworten:

1. Wenn man genau weiß, was sich in der Kugel befindet, kann man (mit Hilfe der Einsteinschen Theorie) berechnen, wie der Raum gekrümmt ist.

2. Man schaut einfach nach.

Die Berechnung klappt zur Zeit noch nicht so recht, da es noch einige Unklarheit darüber gibt, was sich in der Kugel befindet. Das Problem ist, dass es mit den Himmelskörpern, die man sieht, und auch mit der so genannten dunklen Materie, die man indirekt auch sieht, noch nicht getan ist. Der manchmal so genannte leere Raum ist gar nicht so leer, wie es den Anschein hat. Das heißt die Idee mit der negativen Masse kann nicht einfach verworfen werden.

Also die andere Methode: Man schaut nach. Dabei gibt es aber auch ein Problem: Man muss sehr genau Entfernungen von Galaxien messen, um auch kleine Abweichungen von der Flachheit feststellen zu können. Das bisherige Ergebnis solcher Messungen ist erstaunlich: Das Universum ist flach.

> Auf großen Längenskalen ist das Universum flach.

Du wirst vielleicht sagen: „Das hatte ich mir auch immer so vorgestellt.“ Richtig. Aber nachdem man gelernt hatte, dass der Raum nicht nur im Prinzip gekrümmt sein kann, sondern es auch tatsächlich ist, nämlich in der näheren Umgebung jedes schweren, Himmelskörpers, ist die Beobachtung, dass das ganze Universum flach ist, eher unerwartet, und bedarf einer Erklärung. Tatsächlich stellt sie zur Zeit eines der großen Probleme der Physik dar.

10.4 Die Expansion des Universums

Wir haben gesehen, dass die räumliche Struktur des Universums sehr einfach ist:

- das Universum ist überall gleich (auf großen Skalen)
- das Universum ist flach (soweit man das bei unserer heutigen Messgenauigkeit sagen kann).

In einer anderen Hinsicht ist es aber gar nicht einfach, nämlich was seine zeitliche Entwicklung betrifft: Der Kosmos dehnt sich aus.

Das heißt, er wird immer größer? Das zu sagen, wäre etwas leichtsinnig. Wir wissen nicht wie groß er ist, und falls er unendlich groß sein sollte, kann man nicht gut sagen, er werde noch größer. Was bedeutet also die Aussage, der Kosmos dehne sich aus?

Wir betrachten ein Gummiseil, das sich ausdehnt, oder das ausgedehnt wird, Abb. 10.1. Es interessiert uns nicht, wer daran zieht, ob überhaupt jemand daran zieht, und wohin und warum es sich ausdehnt.

Das Seil ist in gleichen Abständen mit Knoten A, B, C,… versehen, sodass man sehen kann, wie es sich dehnt.

Willy, Abb. 10.1a, befindet sich bei Knoten D. Was sieht er? Er sieht, dass sich die Nachbarknoten C und E von ihm entfernen, und er sieht, dass sich die Knoten B und F doppelt so schnell entfernen wie C und E, die Knoten A und G dreimal so schnell, und so weiter. Abbildung 10.1b zeigt dasselbe Seil noch einmal: aus der Sicht von Lilly, die sich bei Knoten E befindet. Wie nimmt sie ihre Umgebung wahr? Knoten E ruht für sie, die Knoten D und F bewegen sich nach außen, C und G doppelt so schnell und so weiter.

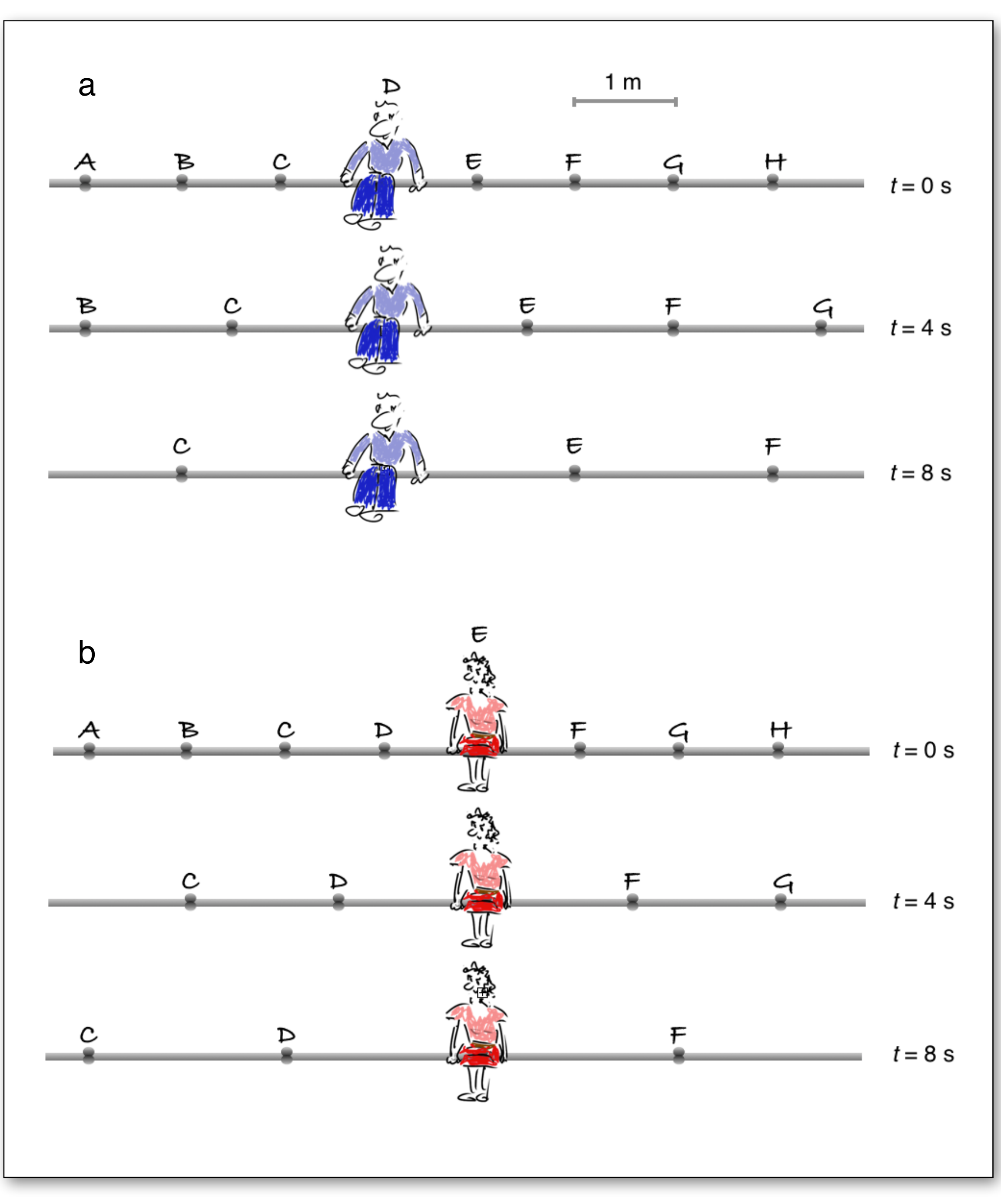


Abb. 10.1
Das Seil dehnt sich. Für Willy entfernen sich die Knoten A, B und C nach der einen Seite, die Knoten E, F, G und H nach der anderen (a). Für Lilly entfernen sich die Knoten A, B, C und D nach der einen Seite, die Knoten F, G, und H nach der anderen (b).

Wir sehen: Jeder der beiden hält seinen Ort für die Mitte der Welt und meint das Seil dehne sich von diesem Ort aus nach links und rechts aus. Dieselbe Wahrnehmung hat auch jeder, der sich an einer beliebigen anderen Stelle der Seils befindet.

Jetzt kannst du verstehen, was man meint, wenn man sagt, das Universum dehne sich aus, oder „expandiere". Von jedem Ort aus gesehen scheinen sich die Sterne und Galaxien nach außen zu bewegen, und je weiter sie entfernt sind, desto schneller.

Das Wort „Bewegung" passt hier allerdings nicht so recht. Der Grund für die Zunahme der Entfernung ist ja nur, dass zwischen den Galaxien neuer Raum entsteht.

> Das Universum expandiert: Es entsteht an jeder Stelle neuer Raum.

Das hört sich interessant an. Wenn jemand ein Grundstück hat, wäre es dann nach einem Jahr größer geworden? Könnte man daraus vielleicht ein Geschäftsmodell machen? Nein, denn der Raum expandiert zwar, aber alles, was sich in dem Raum befindet und irgendwie zusammenhängt – d.h. durch irgendwelche Felder zusammen gehalten wird – bleibt so groß, wie es war: alle Gegenstände auf der Erde, die Erde selbst, das Sonnensystem, unsere Galaxie, unser Galaxienhaufen. Nur die Abstände zwischen den Galaxienhaufen werden größer.

Man kann sich das so vorstellen: Willy und Lilly sitzen in geringem Abstand voneinander auf dem expandierenden Seil, Abb. 10.2a. Von Willys Position aus betrachtet bewegt sich Lilly; von Lilly aus gesehen bewegt sich Willy. Die Geschwindigkeit, mit der sich Willy von Lilly, oder auch Lilly von Willy entfernt, wollen wir *Expansionsgeschwindigkeit* nennen. In Abb. 10.2b halten sich die Beiden bei der Hand. Sie entfernen sich jetzt nicht mehr voneinander. Das Seil rutscht unter ihnen weg. Man kann auch sagen: Damit sie sich nicht entfernen, müssen sie sich relativ zum Seil bewegen, und zwar so, dass die Expansionsgeschwindigkeit gerade kompensiert wird.

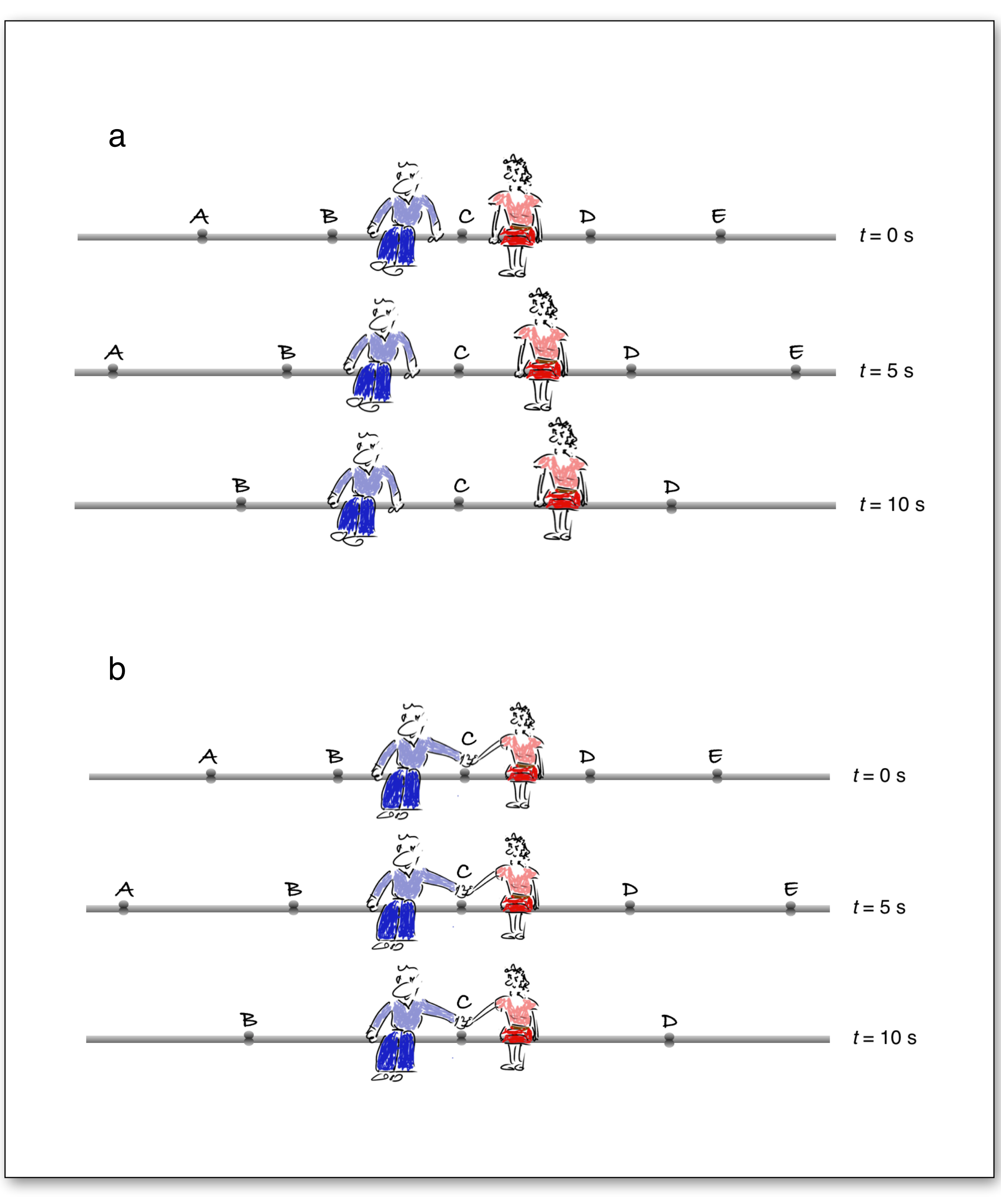


Abb. 10.2
(a) Willy und Lilly entfernen sich voneinander mit der Expansionsgeschwindigkeit. (b) Das Seil bewegt sich unter Willy und Lilly weg. Willy und Lilly bewegen sich relativ zum Seil.

Beim Universum ist es so, dass sich die Abstände innerhalb aller Strukturen bis hin zu den Galaxienhaufen durch die Expansion des Raumes nicht vergrößern. Woran sieht man dann aber die Expansion überhaupt noch? An den Abständen zwischen den allergrößten Strukturen des Universums, d.h. den Galaxienhaufen.

Wir betrachten einen Punkt in der Entfernung d (von uns aus). Die Geschwindigkeit, mit der sich der Punkt zu bewegen scheint, hatten wir Expansionsgeschwindigkeit genannt. Wenn sich der Abstand im Zeitintervall Δt um Δd ändert, so ist die Expansionsgeschwindigkeit

$$v_e = \frac{\Delta d}{\Delta t}$$

Für Willy in Abb. 10.1 ist die Expansionsgeschwindigkeit der Knoten E und F:

$$\text{Punkt E:}\quad v_e = \frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{0{,}5\ \text{m}}{4\ \text{s}} = 0{,}125\ \text{m/s}$$

$$\text{Punkt F:}\quad v_e = \frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{1\ \text{m}}{4\ \text{s}} = 0{,}25\ \text{m/s}$$

Man sieht: v_e ist proportional zur Entfernung der Knoten:

$$v_e \sim d\,.$$

Der Proportionalitätsfaktor ist in diesem Fall 0,25 s^{-1}, es ist also

$$v_e = 0{,}25\ \text{s}^{-1} \cdot d\,.$$

Wir übertragen die Gleichung auf das Universum.

Auch hier ist v_e proportional zu d. Man bezeichnet hier den Proportionalitätsfaktor mit H und nennt ihn *Expansionsrate* des Universums:

$$v_e(d) = H \cdot d\,. \qquad (1)$$

Es ist

$$H = \frac{2{,}1\ \text{m/s}}{100\ \text{Lj}}\,.$$

In Worten: Immer wenn man 100 Lichtjahre weiter geht, erhöht sich die Expansionsgeschwindigkeit um 2,1 m/s.

> Expansionsrate: $H = \frac{2{,}1\ \text{m/s}}{100\ \text{Lj}}$

Von der Expansionsbewegung unterscheiden müssen wir die echte Bewegung der einzelnen Sterne und Galaxien in die verschiedensten Richtungen. Aber je weiter eine Galaxie von uns entfernt ist, desto weniger fällt diese gegenüber der Expansionsbewegung ins Gewicht.

Die Expansion des Universums hat interessante Konsequenzen. Wir wollen zwei davon ansprechen.

Expansionsgeschwindigkeit größer als Grenzgeschwindigkeit

Abb. 10.3 zeigt den linearen Zusammenhang zwischen Entfernung und Expansionsgeschwindigkeit. (Siehe auch Gleichung (1).)

Dabei könnte dich vielleicht etwas stören: Für Entfernungen, die größer sind als $14 \cdot 10^9$ Lj wird die Expansionsgeschwindigkeit größer als c, d.h. größer als die Grenzgeschwindigkeit. Darf das sein? Ja, keine Sorge! c ist Grenzgeschwindigkeit nur für echte Bewegungen, nicht für Expansionsbewegungen, bei denen neuer Raum entsteht.

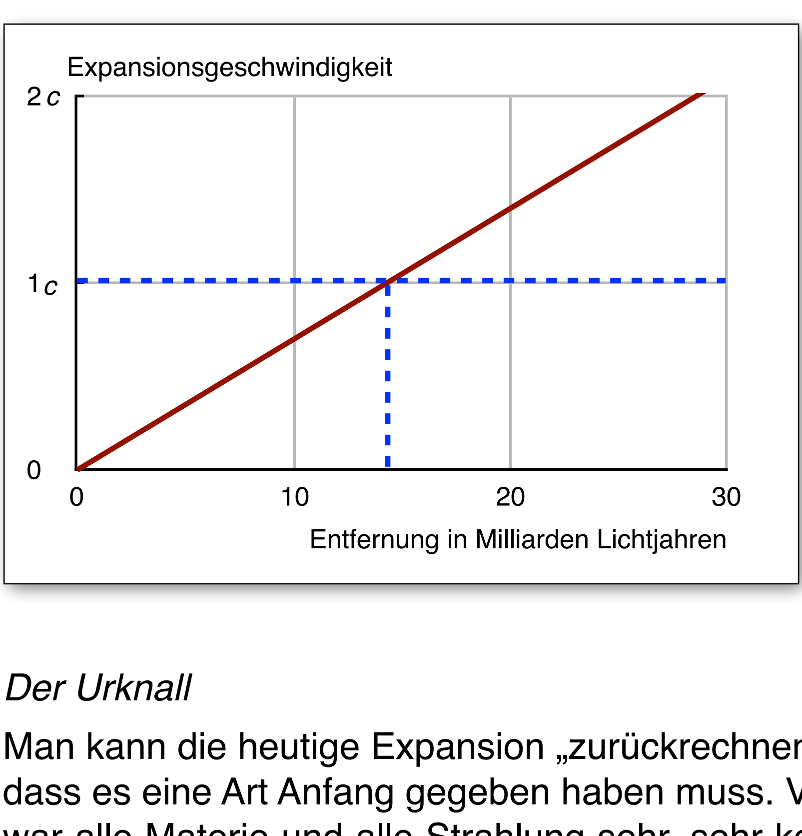


Abb. 10.3
Expansionsgeschwindigkeit als Funktion der Entfernung. Für $d > 14 \cdot 10^9$ Lj wird die Expansionsgeschwindigkeit größer als die Grenzgeschwindigkeit c.

Der Urknall

Man kann die heutige Expansion „zurückrechnen", und es zeigt sich, dass es eine Art Anfang gegeben haben muss. Vor $13{,}8 \cdot 10^9$ Jahren war alle Materie und alle Strahlung sehr, sehr konzentriert. Massen-(Energie-)Dichte, Druck und Temperatur hatten gigantische Werte. Das Universum ist aus diesem Zustand hervorgegangen.

Man kann den Zeitpunkt, zu dem das geschah, als den Anfang der Zeit betrachten. Man bezeichnet diesen Beginn der Expansion als den *Urknall*, auf Englisch *Big Bang*.

> Die Expansion des Universums begann vor 13,8 Milliarden Jahren mit dem Urknall.

Wir hatten früher gesehen: Das Universum ist homogen. Es ist überall so wie es bei uns ist. Diese Aussage bezieht sich auch auf die Expansion: Die Expansionsrate ist überall gleich. Das war auch so bei unserem Modell-Universum von Abb. 10.1: Alle Abstände zwischen zwei benachbarten Knoten vergrößern sich gleich schnell.

Damit ist aber noch nichts darüber gesagt, wie sich die Expansionsrate als Funktion der Zeit verhält. So könnten sich die Abstände auf unserem Gummiseil jetzt schnell, und etwas später langsam vergrößern. Tatsächlich ist genau das beim echten Universum der Fall. Bis etwa 5 Milliarden Jahren nach dem Urknall wurde die Expansion mit der Zeit immer langsamer, danach wieder schneller.

Der Frage, warum die Expansion wieder schneller wird, ist heute noch nicht endgültig beantwortet.

> Bis 5 Milliarden Jahre nach dem Urknall verlief die Expansion verzögert, danach wieder beschleunigt.

Aufgabe

Um wie viel vergrößert sich im Universum ein Abstand von 1 km in einem Jahr?

10.5 Der Blick in die Vergangenheit

Fast alles was wir über das Universum erfahren, fast alles was wir vom Universum „sehen", kommt mit elektromagnetischer Strahlung zu uns: Vor allem mit dem normalen „sichtbaren" Licht, aber auch mit den verschiedensten anderen elektromagnetischen Strahlungen, wie Gamma-, Röntgen-, UV-, Infrarot- und Mikrowellenstrahlung.

Was „sieht" man nun auf diese Art vom Universum? Man könnte denken, man sieht das Universum wie es ist. Das klingt wie eine Selbstverständlichkeit, ist aber falsch. Man sieht es wie es *war*!

Das Licht, das bei uns auf der Erde ankommt, und das die Bilder von Sternen und Galaxien erzeugt, musste einen langen Weg zurücklegen, und dazu hat es Zeit gebraucht. Je länger der Weg, desto mehr Zeit ist vergangen zwischen der Emission (der Erzeugung) des Lichts durch einen Stern und seiner Ankunft bei uns. Was wir sehen, ist also nicht der Stern heute, sondern der Stern zum Zeitpunkt der Emission des Lichts, und der kann weit zurück in der Vergangenheit liegen. Je weiter das Objekt von uns entfernt ist, desto weiter sehen wir in die Vergangenheit.

> Je weiter man in die Ferne sieht, desto weiter sieht man in die Vergangenheit.

Wenn man jetzt in die Sonne schaut, sieht man die Sonne wie sie vor etwa 8 Minuten war. In dieser kurzen Zeit hat sich an der Sonne sicher nicht viel verändert. Ganz anders ist es, wenn man einen Quasar, der sich in einer Entfernung von 10^{10} Lichtjahren befindet, durch ein Teleskop sieht. Wir können sicher sein, dass der Quasar gar nicht mehr existiert. Die Supernova-Explosion, die man im Jahr 1987 beobachten konnte, hatte von uns eine Entfernung von 179 000 Lj. Das heißt, sie hat nicht im Jahr 1987 stattgefunden, sondern vor 179 000 Jahren. Die Gravitationswellen, die 2016 bei uns ankamen, sind vor $1{,}3 \cdot 10^9$ Jahren erzeugt worden, als in einer Entfernung von $1{,}3 \cdot 10^9$ Lj zwei schwarze Löcher ineinander stürzten.

Wenn wir davon ausgehen, dass das Universum homogen, also überall gleich ist und sich überall gleich entwickelt hat, so können wir aber aus dem, was wir in der Ferne (und in der Vergangenheit) sehen, schließen, wie es in unserer näheren Umgebung in der Vergangenheit ausgesehen hat. Wir sehen also das Universum in den verschiedenen Zuständen seiner Entwicklung.

> Da das Universum homogen ist, sieht man in der Ferne auch die eigene Vergangenheit.

Was in der Zwischenzeit aus diesen Objekten, d.h. dem fernen Quasar und dem fernen schwarzen Loch geworden ist, wird uns später noch beschäftigen.

10.6 Was wir vom Universum sehen

Wenn wir die Frage stellen, was man auf der Erde von seinem augenblicklichen Standort aus sieht, so ist die Antwort einfach (gute Sicht vorausgesetzt): Man sieht die Landschaft bis zum Horizont, und zwar so wie sie jetzt ist.

Die entsprechende Frage auf das Universum angewendet ist etwas schwerer zu beantworten.

1. Wie wir einen zeitlichen Verlauf sehen

Wir sehen mit unseren Teleskopen in die Vergangenheit. Aber trotzdem sehen wir die Welt nicht so, wie sie damals war; wir sehen sie auf eine merkwürdige Art zeitlich verzerrt. Und das liegt an der Expansion des Universums.

Was passiert mit dem Licht, das sich vor fünf oder zehn Milliarden Jahren auf den Weg zu uns gemacht hat (d.h. zufällig in unsere Richtung geflogen ist)? Licht ist eine elektromagnetische Welle; der Träger dieser Welle ist der Raum, so wie der Träger einer Wasserwelle das Wasser ist. Nun dehnt sich der Raum aus, und das hat zur Folge, dass sich die Welle mit ausdehnt. Damit wird ihre Wellenlänge größer und ihre Frequenz kleiner. Das bedeutet, dass die Strahlung um so langwelliger wird, je weiter sie reist. Blaues Licht ändert sich zum grünen hin, grünes wird gelber, gelbes wird roter, rotes wird infrarot. Man nennt diese Änderung des Lichtspektrums (nicht ganz passend) *Rotverschiebung*.

Aber nicht nur die Schwingungen des Lichts werden auf dem Weg langsamer, sondern auch jeder andere zeitliche Verlauf stellt sich für uns zeitlich gedehnt dar. Erinnert dich das an etwas?

Bei einer Supernova-Explosion entsteht so viel Licht wie sonst von einer ganzen Galaxie kommt. Man kann daher Supernovae in sehr großen Entfernungen sehen, d.h. bis zu mehreren Milliarden Lichtjahren. Durch die Expansion des Universums ist das Licht einer Supernova nicht nur „rotverschoben" (d.h. die Lichtwellen sind gestreckt), sondern auch der zeitliche Verlauf der ganzen Lichterscheinung, die einige Wochen dauert, erscheint uns zeitlich gestreckt. Je weiter die Supernova entfernt ist, desto länger leuchtet sie.

> Licht, das aus großer Entfernung kommt, ist „rotverschoben".
>
> Vorgänge, die wir in großer Entfernung beobachten, erscheinen uns zeitlich gestreckt.

2. Was wir sehen

Wir sehen nur diejenigen Objekte, also Sterne, Galaxien, Quasare, …, von denen Licht bei uns ankommt. (Mit Licht meinen wir hier elektromagnetische Strahlung, auch wenn sie für uns unsichtbar ist.)

Das hört sich zunächst wie eine Selbstverständlichkeit an. Die Aussage ist aber doch etwas tückisch. Weil sich das Universum ausdehnt, ist die Expansionsgeschwindigkeit in einer gewissen Entfernung von uns, nämlich bei etwa 14,2 Milliarden Lichtjahren, gleich der Grenzgeschwindigkeit *c*. Alles was jenseits von diesem Abstand liegt, entfernt sich schneller als mit *c*. Wir wollen diese Grenze die *c*-Grenze nennen.

Hier kommt nun die Schwierigkeit. Du wirst sicher annehmen, dass Licht, das jenseits der *c*-Grenze emittiert wurde, keine Chance hat, uns zu erreichen. Es ist, wie wenn Willy auf einem Laufband (wie man sie von Flughäfen kennt) gegen die Bewegungsrichtung des Bandes läuft, Abb. 10.5. Wenn das Band schneller ist als Willy, bewegt er sich rückwärts statt vorwärts und wird Lilly nicht erreichen. So weit, so gut.

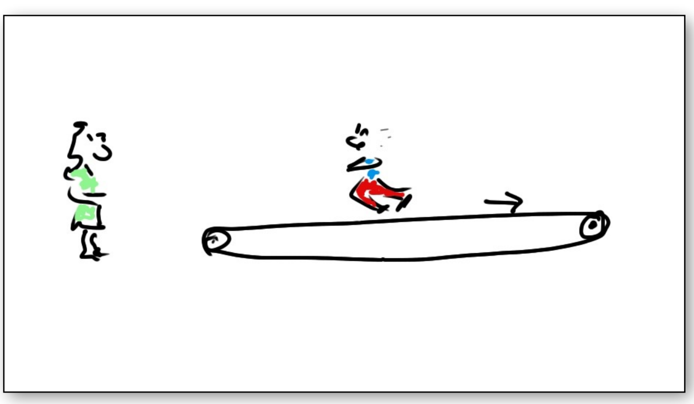


Abb. 10.5
Nur wenn Willy schneller nach links läuft als das Band sich nach rechts bewegt, wird er Lilly erreichen.

Nun kommt aber hinzu, dass die Expansionsrate in den ersten 5 Milliarden Jahren mit der Zeit geringer geworden ist. Das bedeutet, dass Licht, das hinter der *c*-Grenze emittiert wurde, sich zunächst von uns entfernt hat. Da die Expansionsgeschwindigkeit mit der Zeit abnahm, wanderte aber die *c*-Grenze nach außen und unser Licht befand sich plötzlich wieder vor der *c*-Grenze, sodass es uns dann doch erreichen konnte.

Falls das zu kompliziert war, hier noch einmal die entsprechende Situation mit dem Laufband, Abb. 10.5.

Willy läuft auf dem Band mit seiner Höchst-Geschwindigkeit in Richtung Lilly, also gegen die Bewegungsrichtung des Bandes. Das Band bewegt sich schneller als er; trotz aller Anstrengung entfernt sich Willy von Lilly. Nun wird das Band aber nach und nach langsamer. Irgendwann ist es genau so schnell wie Willy; jetzt bleibt Willy auf der Stelle. Dann wird das Band noch langsamer, und Willy kommt in Richtung Lilly vorwärts und erreicht sie schließlich. Noch einmal zu Willys Abstand zu Lilly: Willy läuft die ganze Zeit gleich schnell (so schnell er kann); am Anfang entfernt er sich von Lilly, dann kehrt er um, nähert sich ihr wieder und kommt schließlich bei ihr an.

Genauso ist es mit dem Licht, das im jungen Universum von Galaxien emittiert wurde und das wir heute empfangen, Abb. 10.6.

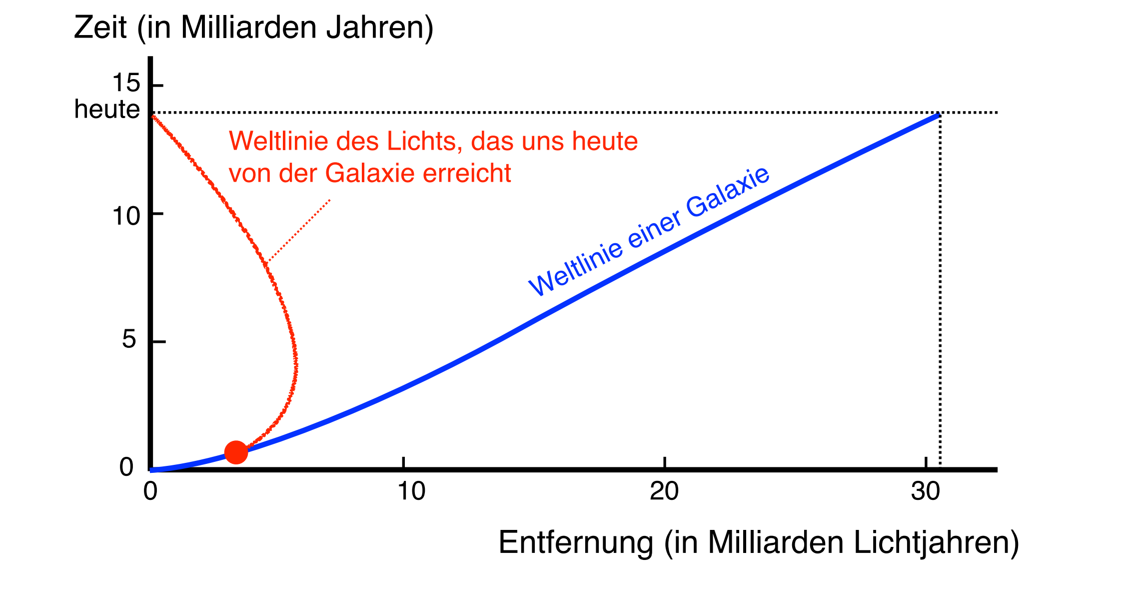


Abb. 10.6
Weltlinie einer Galaxie und Weltlinie des Lichts, das uns heute von ihr erreicht

Die blaue Linie ist die Weltlinie einer Galaxie. Die rote ist die Weltlinie des Lichts, das wir heute von der Galaxie empfangen. Es wurde von der Galaxie zu einer Zeit emittiert als das Universum noch sehr jung war, nämlich weniger als eine Milliarde Jahre alt. Sie befand sich an einer Stelle, die von „hier" nicht sehr weit entfernt war. Die Expansionsgeschwindigkeit war aber an dieser Stelle größer als *c*. Darum hat sich das Licht zunächst von „hier" entfernt. Nun nahm aber die Expansionsrate mit der Zeit ab, und damit auch die Expansionsgeschwindigkeit unseres Lichts. Schließlich wurde sie kleiner als *c* und das Licht konnte sich dem „hier" wieder nähern.

Und was ist inzwischen aus der Galaxie in Abb. 10.6 geworden? Wenn ihr nichts zugestoßen ist, so befindet sie sich heute in einer Entfernung von etwa 30 Milliarden Lichtjahren.

Dass Licht sich zunächst entfernt hat und uns dann doch noch erreicht, gilt allerdings nur für einen kleinen Bereich hinter der *c*-Grenze. Schließlich kommt eine Entfernung jenseits der *c*-Grenze, von der an es das Licht nicht mehr schafft und geschafft hat, sich auf uns zu zu bewegen. Was hinter dieser Grenze passiert, kann man prinzipiell nicht sehen, auch nicht in der Zukunft. Wie schon beim schwarzen Loch gibt es auch hier einen *Ereignishorizont*. Er liegt bei 16,2 Milliarden Lichtjahren.

> An der *c*-Grenze (14,2 Milliarden Lichtjahre) ist die Expansionsgeschwindigkeit gleich der Grenzgeschwindigkeit *c*.
>
> Was jenseits vom Ereignishorizont passiert kann man auch in der Zukunft nicht sehen.

Aufgabe

Stell dir das folgende Universum vor: Es ist vor 14 Milliarden Jahren entstanden (wir fragen nicht wie), es ist unendlich groß und es dehnt sich nicht aus. Was würden wir heute von diesem Universum sehen?

10.7 Die Entwicklung des Universums – die kosmische Hintergrundstrahlung

Wenn man mit Teleskopen in den Weltraum hinausschaut, sieht man die zeitliche Entwicklung des Universums. Da das Universum überall gleich aussieht, sieht man nicht nur die Entwicklung von weit entfernten Sternen und Galaxien; man sieht auch wie es hier war, d.h. an dem Ort des Universums, an dem wir uns heute befinden.

Man könnte erwarten, dass man so die Entwicklung des Universums seit dem Urknall sieht. Das stimmt allerdings nicht ganz; es gibt eine zeitliche Grenze: Bis 400 000 Jahre nach dem Urknall war das Universum undurchsichtig für jede elektromagnetische Strahlung, sodass man mit den Teleskopen nichts aus dieser Anfangszeit sehen kann.

Mit „sehen“ ist immer gemeint, dass man aus den Daten, die die Teleskope liefern, Bilder erzeugt; es bedeutet nicht, dass man tatsächlich durch ein Teleskop wie durch ein Fernrohr hindurchschaut – schon deshalb nicht, weil die meisten Strahlungen, die man untersucht, außerhalb des sichtbaren Spektralbereichs liegen.

Was in den ersten 400 000 Jahren passiert ist, liegt aber trotzdem nicht „im Dunkeln“, denn es gibt zuverlässige Theorien (die Theorien der Teilchenphysik), die es gestatten, zu berechnen was vorher war.

In Tabelle 10.1 sind einige Etappen der Entwicklung des Universums aufgeführt. Dabei geht es von einer Zeile zur nächsten immer in großen Zehnerpotenzschritten voran. Je mehr man sich dem Anfang der Zeit nähert, desto kleiner werden die Zeitintervalle, in denen sich die Eigenschaften des Universums drastisch ändern. Die Temperatur hatte am Anfang riesige Werte. Wegen der Expansion hat sie aber stetig abgenommen.

Zeit nach dem Urknall	Temperatur	
10^{-35} s - 10^{-33} s	10^{27} K	Ausdehnung um einen Faktor 10^{50} (inflationäres Universum)
10^{-33} s	10^{25} K	Beginn der Entstehung von Quarks und Gluonen
10^{-6} s	10^{13} K	Beginn der Entstehung von Hadronen: Protonen, Antiprotonen, Neutronen, Antineutronen und andere
Hadronen sind die dominanten Materieteilchen.		
10^{-4} s	10^{12} K	Protonen reagieren mit Antiprotonen, Neutronen mit Antineutronen. Es bleibt eine kleine Zahl von Protonen und Neutronen übrig. Der Überschuss von Materie gegenüber Antimaterie beträgt ein Milliardstel.
Leptonen (Elektronen, Antielektronen und andere) sind die dominanten Materieteilchen.		
1 s	10^{10} K	Elektronen reagieren mit Antielektronen. Es bleibt eine kleine Zahl von Elektronen übrig.
10 s	10^{9} K	Entstehung von Heliumkernen
400 000 Jahre	3000 K	Die elektromagnetische Strahlung hört auf, mit der Materie zu reagieren. Das Universum wird durchsichtig.
10^{9} Jahre		Entstehung von Sternen und Galaxien
$13{,}7 \cdot 10^{9}$ Jahre		heute

Tabelle 10.1
Das Universum seit dem Urknall

Die Tabelle enthält verschiedene Namen von Teilchen, auf die wir erst später zu sprechen kommen.

Bevor die großräumigen Strukturen, d.h. Galaxien und Sterne entstanden, war das Universum auch auf kleinen Längenskalen homogen. Das ganze Geschehen hatte eine Ähnlichkeit mit einer chemischen Reaktion in einem Reaktionsraum, der immer größer wird, und die sich immer im chemischen Gleichgewicht befindet.

Bis zu dem Zeitpunkt $t \approx 400\,000$ Jahre bestand das Universum zu 75 % (der Masse) aus ionisiertem Wasserstoff (d.h. Protonen) und 25 % ionisiertem Helium, so wie den entsprechenden Elektronen. (Dabei haben wir die so genannte dunkle Materie nicht mitgerechnet.) Es war zunächst noch undurchsichtig für alle elektromagnetischen Strahlungen.

Als die Temperatur wegen der Expansion auf etwa 3000 K gefallen war, entstanden aus den Atomkernen und den Elektronen Wasserstoff- und Heliumatome, und das Universum wurde durchsichtig. Es bestand jetzt also aus Wasserstoff, Helium und Strahlung.

Die Strahlung war die eines Körpers, der sich auf einer Temperatur von 3000 K befindet, also etwa dieselbe wie die des Glühdrahtes einer Halogenlampe. Durch die schnelle Expansion nahm nun die Temperatur der Strahlung weiter ab und ihre Wellenlänge zu. Und so hat sie bis jetzt überlebt. Ihre Temperatur beträgt heute 2,7 K, ihre Wellenlänge einige Millimeter bis einige Zentimeter. Die Strahlung ist also extrem „rotverschoben“. Man nennt sie *kosmische Hintergrundstrahlung*.

Sie füllt das ganze Universum aus, und kommt zu uns aus allen Richtungen. Sie enthält wichtige Information über das Universum zur Zeit ihrer Entstehung. Die Atome, die die Strahlung emittiert haben (bzw. neue Atome die aus diesen inzwischen entstanden sind), befinden sich heute in einer Entfernung von 44 Milliarden Lichtjahren.

Die kosmische Hintergrundstrahlung wurde etwa 400 000 Jahre nach dem Urknall emittiert.

D

Lösungen der Aufgaben

1. Werkzeuge

1.6 Stromlinien

2. Das Stromlinienbild darf sich mit der Zeit nicht ändern.

3. Pfeile gleicher Länge, aber je nach Betrag verschiedener Dicke.

Pfeile gleicher Länge, aber unterschiedlicher Grautönung.

2. Impuls und Impulsströme

2.2 Impulsströme

1.

$m_W = 70 \text{ kg}$

$m_L = 52 \text{ kg}$

$v_{L,vorher} = 4{,}5 \text{ km/h}$

$m_L \cdot v_{L,vorher} = (m_L + m_W) \cdot v_{nachher}$

$$v_{nachher} = \frac{m_L \cdot v_{L,vorher}}{(m_L + m_W)} = \frac{52 \text{ kg} \cdot 4{,}5 \text{ km/h}}{52 \text{ kg} + 70 \text{ kg}} = 1{,}9 \text{ km/h}$$

4.

Vorher:	$p_x = 3$ Hy	$p_y = 0$ Hy
	$\Delta p_x = -2$ Hy	$\Delta p_y = 2$ Hy
Nachher:	$p_x = 1$ Hy	$p_y = 2$ Hy

5. Das Auto rolle vorher in *x*-, dann in *y*-Richtung.

30 km/h = 8,3 m/s

Vorher:	$p_x = 10\,000$ Hy	$p_y = 0$ Hy
Nachher:	$p_x = 0$ Hy	$p_y = 10\,000$ Hy
	$\Delta p_x = 10\,000$ Hy	$\Delta p_y = -10\,000$ Hy

Der Impuls, der den Unterschied ausmacht, kommt aus der Erde.

2.3 Impulsfluss bei Reibungsvorgängen

1. Der Betrag der Geschwindigkeit des Klotzes ist zwar größer als der Betrag der Brettgeschwindigkeit. Berücksichtigt man aber das Vorzeichen, so ist die Geschwindigkeit des Brettes größer. Es fließt auch Impuls vom Brett in den Klotz, denn der Klotz verliert negativen Impuls. Er bekommt also positiven. Der Impuls fließt vom Brett, das die höhere Geschwindigkeit hat, in den Klotz.

2. Nein. Hier geht Impuls auch von einem Körper niedrigerer Geschwindigkeit zu einem mit höherer Geschwindigkeit. Unsere Regel ist nicht anwendbar, denn es handelt sich nicht um einen Reibungsvorgang.

2.6 Fließgleichgewichte

1. (a) Der Motor pumpt Impuls aus der Erde ins Auto. (b) Der Impuls fließt langsam in die Luft und in die Erde ab. (c) Der Impuls fließt schnell in die Erde ab. (d) Der ganze Impuls, den der Motor ins Auto pumpt, fließt wieder ab.

2. Es ist keine Reibung vorhanden. Impuls fließt weder zu noch ab.

2.7 Druck-, Zug- und Biegespannung

1. Die Anhängerkupplung steht unter Zugspannung, Abb. 2.1.

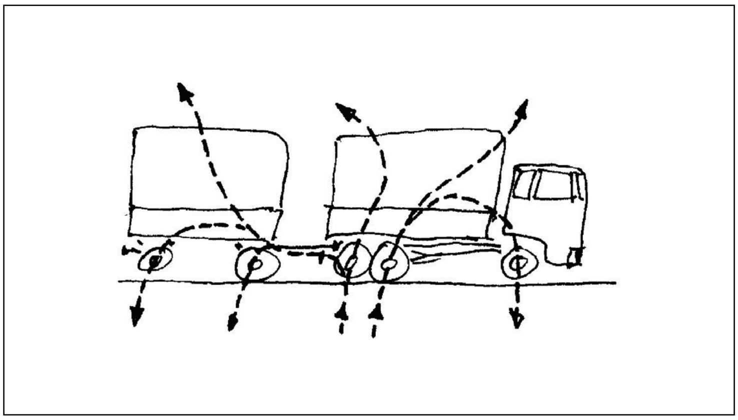


Abb. 2.1
Zu Abschnitt 2.7, Aufgabe **1**

2. Der Impuls fließt nach rechts, also aus dem Wagen heraus, denn der negativer Impuls des Wagens nimmt zu.

3. Siehe Abb. 2.2

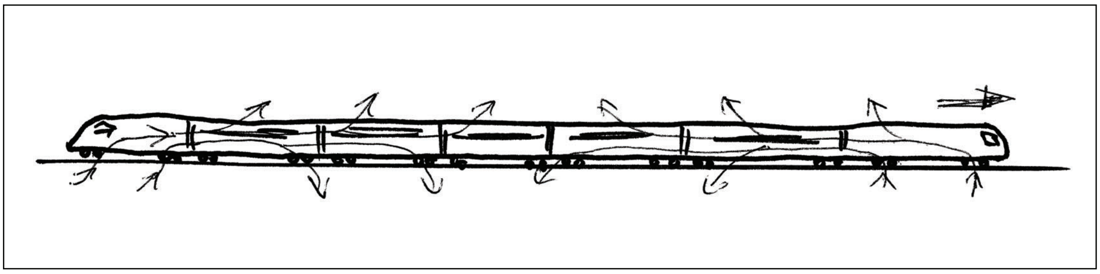


Abb. 2.2
Zu Abschnitt 2.7, Aufgabe **3**

2.9 Die Impulsstromstärke

1.

$t = 10$ s
$p = 200$ Hy

$$F = \frac{p}{t} = \frac{200 \text{ Hy}}{10 \text{ s}} = 20 \text{ N}$$

2.

$F = 6000$ N
$t = 5$ s

$p = F \cdot t = 6000 \text{ N} \cdot 5 \text{ s} = 30\,000 \text{ Hy}$

2.10 Das Newtonsche Gesetz

1.

$t = 5$ s
$m = 150$ kg
$F = 15$ N

$p = F \cdot t = 15 \text{ N} \cdot 5 \text{ s} = 75 \text{ Hy}$

$$v = \frac{p}{m} = \frac{75 \text{ Hy}}{150 \text{ kg}} = 0{,}5 \text{ m/s}$$

2.

$F = 200$ kN
$t = 30$ s
$v = 54 \text{ km/h} = 15 \text{ m/s}$

$p = F \cdot t = 200\,000 \text{ N} \cdot 30 \text{ s} = 6 \cdot 106 \text{ Hy}$

$$m = \frac{p}{v} = \frac{6 \cdot 10^6 \text{ Hy}}{15 \text{ m/s}} = 4 \cdot 10^5 \text{ kg} = 400 \text{ t}$$

3.

$m = 42$ kg
$F = 20$ N
$t = 3$ s
$v = 1{,}2$ m/s

Hineingeflossener Impuls:

$p = 20 \text{ N} \cdot 3 \text{ s} = 60 \text{ Hy}$

Im Wagen enthaltender Impuls:

$p = m \cdot v = 42 \text{ kg} \cdot 1{,}2 \text{ m/s} = 50{,}4 \text{ Hy}$

Der fehlende Impuls ist wegen der Reibung in die Erde abgeflossen.

4.

$l = 2$ km
$d = 10$ cm
$v = 0{,}5$ m/s
$t = 2$s

$V = \pi\,(d/2)^2 l = 15{,}71 \text{ m}^3$

$m = \rho \cdot V = 15\,710 \text{ kg}$

$p = m \cdot v = 15\,710 \text{ kg} \cdot 0{,}5 \text{ m/s} = 7855 \text{ Hy}$

Der Impuls fließt über das Ventil in die Erde.

$$F = \frac{p}{t} = \frac{7855 \text{ Hy}}{2 \text{ s}} = 3928 \text{ N}$$

2.11 Konvektive Impulstransporte

1.

Wasserstrom: 0,5 l/s
$v = 3$ m/s
$l = 1$ m

In einer Sekunde fließt durch eine Querschnittsfläche des Strahls ein 3 m langer Ausschnitt des Strahls. Dem entspricht ein Volumen von 0,5 l. Ein 1m langes Stück des Strahls hat ein Volumen von 0,5/3 l = 0,167 l. Die Masse des entsprechenden Wassers ist

$m = 0{,}167$ kg.

$p = m \cdot v = 0{,}167 \text{ kg} \cdot 3 \text{ m/s} = 0{,}5 \text{ Hy}$

$$F = \frac{p}{t} = \frac{m}{t} \cdot v = 0{,}5 \text{ kg/s} \cdot 3 \text{ m/s} = 1{,}5 \text{ N}$$

2.

Volumenstrom:

$$\frac{V}{t} = 10 \text{ m}^2 \cdot 5 \text{ m/s} = 50 \text{ m}^3/\text{ s}$$

Massenstrom:

$$\frac{m}{t} = \rho \cdot \frac{V}{t} = 1{,}293 \text{ kg/m}^3 \cdot 50 \text{ m}^3/\text{ s} = 64{,}65 \text{ kg/s}$$

Impulsstrom:

$$F = \frac{m}{t} \cdot v = 64{,}65 \text{ kg/s} \cdot 5 \text{ m/s} = 323 \text{ Hy/s} = 323 \text{ N}$$

2.12 Noch einmal Impulsleiter

1. Die positive *x*-Richtung ist nach rechts. Die Verbindung ist undurchlässig für *x*-Impuls und durchlässig für *y*- und *z*-Impuls.

2. Die Verbindung ist undurchlässig für Impuls, der in der Ebene der Anordnung liegt und durchlässig für Impuls, der senkrecht auf dieser Ebene steht.

3. Die Konstruktion ergibt etwa 470 N.

4. Zwei zusammengesteckte Stäbe. Bei Zugbelastung lösen sie sich voneinander.

5. Ventile des Fahrrad- oder Autoreifens, Drehkreuz am Ausgang der Bahnsteige des U-Bahnhofs, Halbleiterdiode

2.13 Das Hookesche Gesetz

1.

(a) $s = \frac{F}{D} = \frac{12 \text{ N}}{150 \text{ N/m}} = 0{,}08 \text{ m}$

(b) $s = \frac{24 \text{ N}}{150 \text{ N/m}} = 0{,}16 \text{ m}$

2.

a) Für $F = 15$ N ist $s = 0{,}32$ m;
für $F = 30$ N ist $s = 0{,}4$ m.

b) Für $s = 0{,}2$ m ist $F = 4$ N.

c) Mit zunehmender Verlängerung wird es immer schwerer, das Seil weiter zu verlängern.

3. An die Enden einer Feder werden die Enden eines Bindfadens geknotet, und zwar so, dass der Faden locker durchhängt, solange die Feder nicht gespannt ist. Zieht man die Feder auseinander, so fließt der Impulsstrom zunächst nur durch die Feder, es gilt das Hookesche Gesetz. Sobald aber der Faden gespannt ist, ist keine Verlängerung mehr möglich. Der Impulsstrom nimmt zu, ohne dass sich der Faden (und die Feder) verlängert.

4. Wir bezeichnen die Federn mit A und B. Es gilt also
$F_A = D_A s_A$ und $F_B = D_B s_B$.

Da derselbe Impulsstrom durch beide Federn fließt, ist
$F_A = F_B$, also $D_A s_A = D_B s_B$. Da $s_A = 4 s_B$ ist, muss
$D_B = 4 D_A$ sein.

5. (a) Für die beiden Einzelfedern gilt:
$F_1 = D \cdot s$ bzw. $F_2 = D \cdot s$.
Damit wird der Gesamtimpulsstrom
$F' = F_1 + F_2 = 2Ds$.
Für die ganze Anordnung gilt dann
$F' = D's$ mit $D' = 2D$.

(b) Für die beiden Einzelfedern gilt:
$F = D \cdot s_1$ bzw. $F = D \cdot s_2$.
Damit wird die Gesamtverlängerung

$$s' = s_1 + s_2 = 2\frac{F}{D} \; .$$

Für die ganze Anordnung gilt dann
$F' = D's$ mit $D' = D/2$.

2.14 Geschwindigkeit, Beschleunigung, Winkelgeschwindigkeit

1.
$d = 30$ cm
$\omega = 3500$ Umdrehungen/Minute

$$\omega = 3500 \cdot \frac{2\pi}{60 \text{ s}} = 366{,}5 \text{ s}^{-1}$$

$v = \omega \cdot r = 366{,}5 \cdot 0{,}15$ m/s $= 55$ m/s.

2.

$$\omega = \frac{2\pi}{1\ \text{Tag}} = \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60\ \text{s}} = 7{,}3 \cdot 10^{-5}\ \text{s}^{-1}$$

$r = 6370$ km

$v = \omega \cdot r = 7{,}5 \cdot 10–5 \cdot 6{,}37 \cdot 106$ m/s = 478 m/s.

3.

$$\omega = \frac{2\pi}{1\ \text{Jahr}} = \frac{2\pi}{365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60\ \text{s}} = 2{,}0 \cdot 10^{-7}\ \text{s}^{-1}$$

$$r = \frac{v}{\omega} = \frac{30\ \text{km/s}}{2 \cdot 10^{-7}\text{s}^{-1}} = 150 \cdot 10^{6}\ \text{km}$$

2.15 Impulsänderung bei Kreisbewegungen

1. Wir nehmen an, das Geradenstück vor dem Viertelkreisbogen laufe in die positive *x*-Richtung, das danach in die positive *y*-Richtung.

Am Beginn und am Ende des Bogens muss das Lenkrad ruckartig in eine neue Stellung gedreht werden.

Die Änderungsrate des *x*-Impulses geht am Beginn des Bogens unstetig von null auf einen negativen Wert und nimmt dann bis zum Ende des Bogens auf null ab. Die Änderungsrate des *y*-Impulses beginnt bei null, nimmt dann immer größere positive Werte an und geht am Ende der Kurve unstetig auf null zurück. Bei einer gut angelegten Straße hat die Krümmung keine Unstetigkeiten. Damit hat auch die Impulsänderungsrate keine Unstetigkeiten und es brauchen keine ruckartigen Lenkradbewegungen gemacht zu werden.

2.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 7{,}85\ \text{s}^{-1}$$

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = m\omega^2 r = 0{,}5\ \text{kg} \cdot (7{,}85\ \text{s}^{-1})^2 \cdot 1\ \text{m} = 30{,}8\ \text{N}$$

2.16 Umlenkrollen

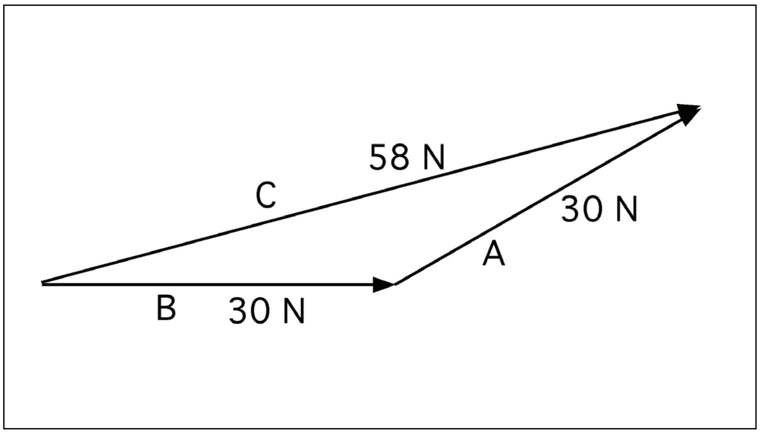


Abb. 2.3
Zu Abschnitt 2.16,
Aufgabe **1**

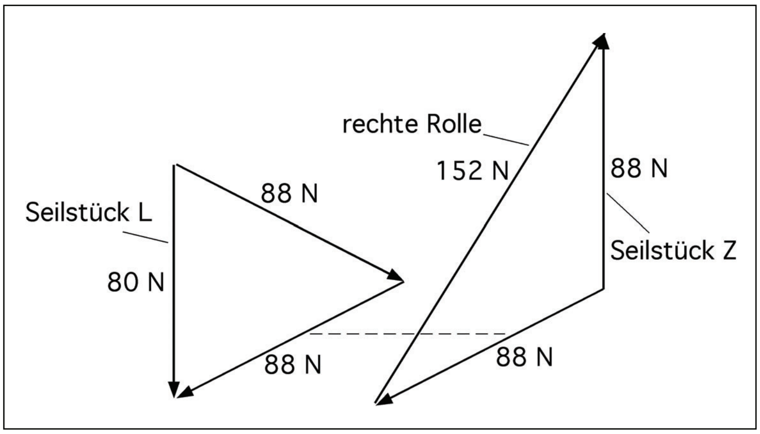


Abb. 2.4
Zu Abschnitt 2.16,
Aufgabe **2**

2.17 Der Zusammenhang zwischen Druck und Impulsstromstärke

1. Gegeben: $F = 420$ N

$A_1 = 2\ \text{cm}^2$
$A_2 = 3\ \text{cm}^2$
$A_3 = 3\ \text{cm}^2$

Gesucht: p_1, p_2, p_3

$$p_1 = -\frac{420\ \text{N}}{0{,}0002\ \text{m}^2} = -2{,}1\ \text{MPa}$$

$$p_2 = p_3 = -\frac{420\ \text{N}}{0{,}0003\ \text{m}^2} = -1{,}4\ \text{MPa}$$

2. Gegeben: $m = 12$ kg
$A = 1.5\ \text{cm}^2$

Gesucht: p_1, p_2, p_3

$F_3 = m \cdot g = 12\text{ kg} \cdot 10\text{ N/kg} = 120\text{ N}$

$F_1 = F_2 = F_3/2 = 60\text{ N}$

$$p_1 = -\frac{120\text{ N}}{0{,}00015\text{ m}^2} = -800\text{ kPa}$$

$$p_2 = p_3 = -\frac{60\text{ N}}{0{,}00015\text{ m}^2} = -400\text{ kPa}$$

3. Der Impulsstrom wird geschätzt zu $F = 40$ N.

Der Durchmesser des Nägelchens ist etwa

$d = 1\text{ mm}^2$.

Die Querschnittsfläche ist

$$A = p\left(\frac{d}{2}\right)^2 \approx 0{,}8\text{ mm}^2 = 0{,}000\,000\,8\text{ m}^2$$

Damit wird

$$p = \frac{40\text{ N}}{0{,}000\,000\,8\text{ m}^2} = 50\text{ MPa} = 500\text{ bar}$$

Wenn die Querschnittsfläche an der Spitze noch 10mal kleiner ist, ergibt sich dort ein Druck von 500 MPa = 5000 bar.

4. Aus der Masse des Hammers $m = 1$ kg und der geschätzten Geschwindigkeit $v = 2$ m/s folgt der Impuls $p = 1\text{ kg} \cdot 2\text{ m/s} = 2\text{ Hy}$. Wir schätzen, dass die Impulsübertragung 0,01 s dauert. Mit $F = p/t$ wird

$$F = \frac{2\text{ Hy}}{0{,}01\,\text{m}^2} = 200\text{ N}$$

Wenn die Querschnittsfläche an der Nagelspitze
$0{,}1\text{ mm}^2 = 0.000\,000\,1\text{ m}^2$ ist, so wird der Druck

$$p = \frac{200\text{ N}}{0{,}000\,000\,1\,\text{m}^2} = 2000\text{ MPa} = 20\text{ kbar}$$

2.18 Spannungen in drei Richtungen

1. Textilien, Gewebe

2. Beton, Steine, aber auch Sand und Kies

3. Holz, manche Textilien, Glimmer, Graphit

3. Drehimpuls und Drehimpulsströme

3.1 Der Drehimpuls

Drehimpuls kann von einem auf einen anderen Körper übergehen.
Impuls kann von einem auf einen anderen Körper übergehen.
Elektrische Ladung kann von einem auf einen anderen Körper übergehen.

Ist ein Rad schlecht gelagert, so dass es von selbst zum Stillstand kommt, so fließt sein Drehimpuls in die Erde ab.
Ist ein Fahrzeug schlecht gelagert, so dass es von selbst zum Stillstand kommt, so fließt sein Impuls in die Erde ab.
Ist ein elektrisch geladener Körper schlecht isoliert, so fließt seine Ladung in die Erde ab.

Der Drehimpuls kann positive und negative Werte annehmen.
Der Impuls kann positive und negative Werte annehmen.
Die elektrische Ladung kann positive und negative Werte annehmen.

Drehimpuls kann man nicht erzeugen und nicht vernichten.
Impuls kann man nicht erzeugen und nicht vernichten.
Elektrische Ladung kann man nicht erzeugen und nicht vernichten.

3.2 Drehimpulspumpen

Im ersten Fall passiert nichts, d.h. Willy wird sich nicht drehen. Im zweiten beginnt er sich zu drehen.

3.3 Wovon der Drehimpuls abhängt – Schwungräder

1. Bei Fahrzeugen: um zu verhindern, dass der Impuls, der in Fahrtrichtung weist, in die Erde abfließt, und zum Antrieb; zur Energieübertragung mit Treibriemen, Ketten; bei Flaschenzügen und im Zahnradgetriebe.

2. Wenn sich ein Rad dreht, fließen innerhalb des Rades geschlossene Impulsströme. Diese werden um so stärker, je schneller sich das Rad dreht. Wird die Winkelgeschwindigkeit zu hoch, so zerreißt es das Schwungrad.

3.

m = 8,5 kg
r = 20 cm
ω = 3000 Umdrehungen/Minute

$J = m \cdot r^2 = 8{,}5 \text{ kg} \cdot (0{,}2)^2 \text{ m}^2 = 0{,}34 \text{ kgm}^2$.

$$L = J \cdot \omega = 0{,}34 \text{ kgm}^2 \cdot \frac{3000 \cdot 2\pi}{60 \text{ s}} = 106{,}8 \text{ E} .$$

4. Der Drehimpuls bleibt konstant. Es ist also

$L = J_1 \cdot \omega_1 = J_2 \cdot \omega_2$

Wir schätzen die folgenden Werte:

Gesamtmasse = 50 kg

Mittlerer Radius bei nicht ausgestreckten Armen und Beinen
= 0,15 m

Wenn die Arme und ein Bein ausgestreckt sind, wird eine Masse von 10 kg auf einen Radius von 0,4 m verlagert.

Damit ergibt sich:

$J_1 = 40 \text{ kg} \cdot (0{,}15 \text{ m})^2 + 10 \text{ kg} \cdot (0{,}4 \text{ m})^2 = 2{,}5 \text{ kgm}^2$

$J_2 = 50 \text{ kg} \cdot (0{,}15 \text{ m})^2 = 1{,}125 \text{ kgm}^2$

$$\omega_2 = \frac{J_1}{J_2} \cdot \omega_1 = \frac{2{,}5}{1{,}125} \cdot \omega_1 = 2{,}22\omega_1 = 2{,}22 \text{ Umdr./Sek.}$$

5.

$r_1 = 50\,000 \text{ km}$

$r_2 = 10 \text{ km}$

Der Drehimpuls vorher ist gleich dem nachher:

$L_1 = L_2$

$m \cdot r_1^2 \cdot \omega_1 = m \cdot r_2^2 \cdot \omega_2$

$r_1^2 \cdot \omega_1 = r_2^2 \cdot \omega_2$

$$\omega_2 = \frac{r_1^2}{r_2^2} \cdot \omega_1 = \frac{50\,000^2}{10^2} \cdot \frac{1 \text{ Umdr.}}{120 \text{ Tage}} = 2{,}4 \frac{\text{Umdr.}}{\text{Sekunde}}$$

6. Man verdreht den Oberkörper gegen den Unterkörper um einen bestimmten Winkel, wobei man die Arme ausgestreckt hält. Man nimmt die Arme eng an den Körper und macht die Verdrehung rückgängig. Bei der Hin-Drehung hatte der Oberkörper ein großes Trägheitsmoment, bei der Rückdrehung ein kleines. Der Drehwinkel gegen die Erde ist deshalb bei der Hin-Drehung kleiner als bei der Rückdrehung. (Wir haben angenommen, dass das Trägheitsmoment des Unterkörpers nicht verändert wurde.)

3.4 Drehimpulsleiter

1. Siehe Abb. 3.1a. Man dreht an der Kurbel. Der drehbar aufgestellte, mit Wasser gefüllte Behälter beginnt sich zu drehen, falls das Wasser den Drehimpuls leitet.

2. Siehe Abb. 3.1b. Man dreht an der Kurbel. Die untere Achse dreht sich mit.

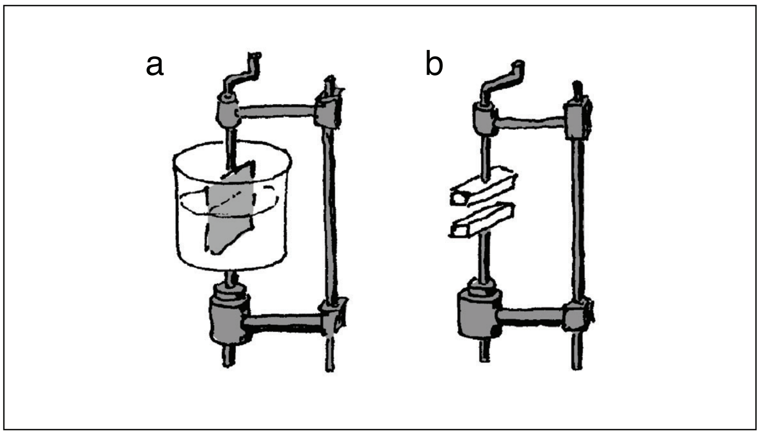


Abb. 3.1
Zu Abschnitt 3.4, Aufgaben **1** und **2**

3. Wirbelsturm

4. Kurbelwelle: Energie, die von den Kolben kommt, wird auf Welle umgeleitet; Nockenwelle: zum Öffnen und Schließen der Ventile; Antriebswelle: Energietransport vom Getriebe zu den Rädern.

3.5 Stromstärke und Änderungsrate des Drehimpulses

1.

m = 1200 kg
r = 1 m
ω = 3 Umdrehungen/Sekunde
M = 120 E/s

(a) $L = m \cdot r^2 \cdot \omega = 1200\ \text{kg} \cdot 1\ \text{m}^2 \cdot 3 \cdot 2\pi \cdot \text{s}^{-1} = 22\,619\ \text{E}$

(b) $M = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{L}{t} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{L}{M} = \frac{22619\ \text{E}}{120\ \text{E/s}} = 188{,}5\ \text{s}$

2.

$\bar{M} = 40$ E/s

ω = 8 Umdrehungen/Sekunde
J = 2 kg m^2

(a) 4 Arbeitstakte/Sekunde

(b) 10 E/Arbeitstakt

(c) $L = J \cdot \omega = 2\ \text{kgm}^2 \cdot 3 \cdot 2\pi \cdot \text{s}^{-1} = 100{,}5$ E

(d) Annahme: Der Motor liefert den Drehimpuls an die Kurbelwelle nur während des Arbeitstaktes. Während der restlichen Takte nimmt er von dort keinen auf und gibt keinen ab. Von den 10 E werden daher drei Viertel im Schwungrad gespeichert, d.h. 7,5 E. Das sind 7,5 % des Gesamtdrehimpulses des Schwungrads.

3.7 Noch einmal Drehimpulsleiter

1. Es gibt verschiedene Lösungen. Es ist darauf zu achten, dass die einzelnen Bauteile die notwendigen Bewegungsfreiheitsgrade haben. So muss die Antriebswelle zwei Kreuzgelenke und ein längenvariables Rohr enthalten.

2. Haben die Schwungräder am Anfang den gleichen Drehimpuls, so dreht sich Lilly nach dem Hochkippen der Räder nicht. Haben sie entgegengesetzten Drehimpuls, so dreht sich Lilly.

4. Das Gravitationsfeld

4.2 Wovon die Erdanziehung abhängt

1. Es sei $m = 70$ kg.

$F = m \cdot g$

$F_{Erde} = 70 \text{ kg} \cdot 9{,}8 \text{ N/kg} = 686 \text{ N}$
$F_{Mond} = 70 \text{ kg} \cdot 1{,}62 \text{ N/kg} = 113 \text{ N}$
$F_{Erde} = 70 \text{ kg} \cdot 1012 \text{ N/kg} = 7 \cdot 1013 \text{ N}$

2.

$F = 300$ N
$g = 1{,}62$ N/kg

$$m = \frac{F}{g} = \frac{300 \text{ N}}{1{,}62 \text{ N/kg}} = 185 \text{ kg}$$

4.3 Der freie Fall

1. Es sei $m = 70$ kg.
$t = 0{,}77$ s

$p = m \cdot g \cdot t = 70 \text{ kg} \cdot 10 \text{ N/kg} \cdot 0{,}77 \text{ s} = 540 \text{ Hy}$
$v = g \cdot t = 10 \text{ N/kg} \cdot 0{,}77 \text{ s} = 7{,}7 \text{ m/s}$

2.

$t = 0{,}5$ s

$v = g \cdot t$

$v_{Erde} = 5$ m/s; $v_{Mond} = 0{,}81$ m/s; $v_{Sonne} = 137$ m/s

3.

$v = 15$ m/s

$$t = \frac{v}{g} = \frac{15 \text{ m/s}}{10 \text{ N/kg}} = 1{,}5 \text{ s} = \text{Zeit bis zur Umkehr}$$

Gesamtzeit = $2 \cdot 1{,}5$ s = 3 s

4.

Gesamtzeit = 5 s
Fallzeit = 2,5 s

$v = g \cdot t = 10 \text{ N/kg} \cdot 2{,}5 \text{ s} = 25 \text{ m/s}$

4.4 Fallen mit Reibung

In die Kugel fließt aus der Erde ein Impulsstrom von

$F = m \cdot g = 0{,}8\ \text{kg} \cdot 10\ \text{N/kg} = 8\ \text{N}$

In Abb. 4.6 im Schülertext liest man ab: $v = 20$ m/s

4.6 Kreisbahnen im Gravitationsfeld

1. Er gibt beiden Körpern einen Stoß, d.h. er lädt sie mit Impuls. Der mit der kleineren Masse fliegt schneller weg.

2. Das Raumschiff in Rotation versetzen.

3. In $\omega = \frac{v}{r}$ setzen wir $v = \sqrt{r \cdot g}$ ein und erhalten:

$$\omega = \frac{\sqrt{r \cdot g}}{r} = \sqrt{\frac{g}{r}}$$

4.

(a) $u = 2\pi r = 2\pi \cdot 384\,000\ \text{km} = 2\,412\,700\ \text{km}$

(b) $T = 27 \cdot 24 \cdot 3600\ s = 2\,332\,800\ \text{s}$

(c) $v = \frac{u}{t} = \frac{2\,412\,700\ \text{km}}{2\,332\,800\ \text{s}} = 1{,}03\ \text{km/s}$

(d) $v = \sqrt{r \cdot g} \Rightarrow g = \frac{v^2}{r} = \frac{1{,}03^2 \cdot 10^6\ \text{m}^2/s^2}{3{,}84 \cdot 10^8\ \text{m}} = 0{,}0028\ \text{N/kg}$

5. Siehe Abb. 4.1. Eine Hyperbelbahn erhält man, wenn die Geschwindigkeit sehr stark vergrößert wird.

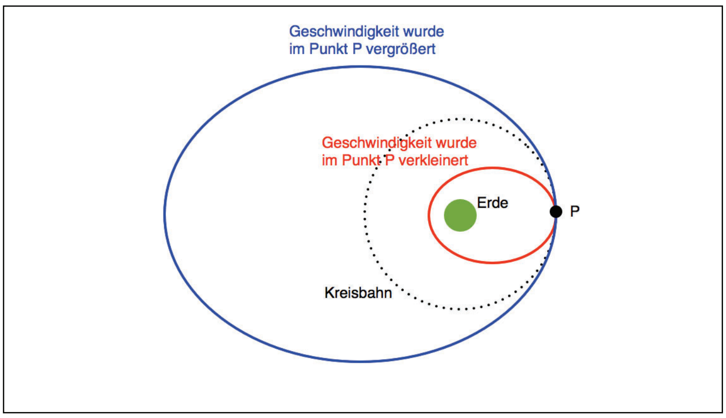


Abb. 4.1
Zu Abschnitt 4.6, Aufgabe **5**.
Gestrichelt: ursprüngliche Kreisbahn
rot: Geschwindigkeit wurde im Punkt P vermindert
blau: Geschwindigkeit wurde im Punkt P vergrößert

4.7 Die Feldstärke für kugelsymmetrische Körper

1. Aus

$$g(r) = G \cdot \frac{m}{r^2}$$

erhalten wir

$$m = \frac{g}{G} r^2$$

Wir setzen die Feldstärke g des Feldes der Erde am Ort des Mondes ein. Außerdem den Radius r der Mondbahn:

$$m = \frac{2{,}8 \cdot 10^{-3}\ \text{N/kg}}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \text{m}^3/(\text{kgs}^2)} \cdot 3{,}84^2 \cdot 10^{16}\text{m}^2 = 6 \cdot 10^{24}\text{kg}$$

Man hätte die Masse der Erde auch mithilfe eines Körpers an der Erdoberfläche berechnen können. Dazu hätte man den Erdradius gebraucht.

2.

$r = 1{,}5 \cdot 1011$ m

(a) $\omega = \frac{2\pi}{\text{Jahr}} = \frac{2\pi}{365 \cdot 24 \cdot 3600\ \text{s}} = 2{,}0 \cdot 10^{-7}\text{s}$

$v = \omega \cdot r = 2 \cdot 10^{-7}$ s $\cdot\ 1{,}5 \cdot 1011$ m $= 3 \cdot 104$ m/s $= 30$ km/s

(b) $g = \frac{v^2}{r} = \frac{9 \cdot 10^8}{1{,}5 \cdot 10^{11}} \frac{\text{N}}{\text{kg}} = 6 \cdot 10^{-3}\ \text{N/kg}$

(c) $m = \frac{g}{G} r^2$

$$m = \frac{6 \cdot 10^{-3}\ \text{N/kg}}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\text{m}^3/(\text{kgs}^2)} \cdot 2{,}25 \cdot 10^{22}\text{m}^2 = 2{,}02 \cdot 10^{30}\text{kg}$$

3. In

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot m}{r}}$$

ist m die Masse des Zentralgestirns, r und v sind Radius und Geschwindigkeit des Satelliten. Es folgt

$$m = \frac{r \cdot v^2}{G}$$

Man braucht also den Bahnradius und die Geschwindigkeit eines der Monde des Planeten.

4.

$$\omega = \frac{2\pi}{\text{Tag}} = \frac{2\pi}{24 \cdot 3600\ \text{s}} = 7{,}3 \cdot 10^{-5}\ \text{s}^{-1}$$

m = Masse der Erde = 6 · 1024 kg

Mit

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{r}}$$

und

$$g = G \cdot \frac{m}{r^2}$$

wird

$$\omega = \sqrt{G\frac{m}{r^3}}$$

Wir lösen nach r auf:

$$r = \sqrt[3]{\frac{Gm}{\omega^2}}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24}}{7{,}3^2 \cdot 10^{-10}}}\ \text{m} = 4{,}22 \cdot 10^7\ \text{m} = 42\,000\ \text{km}$$

r ist der Bahnradius. Um die Höhe über der Erdoberfläche zu bekommen, muss man noch den Erdradius abziehen, und es ergibt sich eine Flughöhe von etwa 36 000 km.

Die Bahngeschwindigkeit ergibt sich zu

$$v = \omega \cdot r = 7{,}3 \cdot 10^{-5}\ \text{s}^{-1} \cdot 4{,}22 \cdot 10^7\ \text{m} = 3080\ \text{m/s}\ .$$

4.8 Galilei, Kepler, Newton

1. Aus

$$v = \sqrt{\frac{G \cdot m}{r}}$$

folgt

$$v^2 = \frac{G \cdot m}{r} \ .$$

Mit

$$v = \frac{2\pi r}{T}$$

wird daraus

$$\frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = \frac{G \cdot m}{r}$$

oder

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot m} \ .$$

Der Quotient auf der rechten Seite der Gleichung hat für alle Planeten oder Satelliten ein und desselben Zentralgestirns denselben Wert.

2.

$m_A = m_B = 1$ kg
$r = 10$ cm

Für den Impulsstrom zwischen den Körpern A und B ergibt sich:

$$F = G \cdot \frac{m_A \cdot m_B}{r^2} = 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1}{0{,}01} \text{N} = 6{,}67 \cdot 10^{-9} \text{ N}$$

Es ist schwer, einen Impulsstrom von etwa 10^{-8} N zu messen. Mehrere andere Ströme von derselben Größenordnung stören das Experiment.

4.9 Die Gezeiten

1.

$$g = G \cdot m_{Mond} \cdot \frac{1}{r^2}$$

Mit $m_{Mond} = 7{,}35 \cdot 10^{22}$ kg und $r = 3{,}84 \cdot 108$ m wird

$$g = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 7{,}35 \cdot 10^{22}}{(3{,}84)^2 \cdot 10^{16}} \ \frac{\text{N}}{\text{kg}} = 3{,}32 \cdot 10^{-5} \text{ N/kg}$$

Bei der Berechnung des Unterschiedes von g auf beiden Seiten der Erde kommt es nicht auf den genauen Absolutwert von g an.

$$\Delta g = G \cdot m_{\text{Mond}} \cdot \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{(r+\Delta r)^2} \right)$$

$$\approx G \cdot m_{\text{Mond}} \cdot \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2 + 2r\Delta r} \right)$$

$$= G \cdot m_{\text{Mond}} \cdot \left(\frac{r^2 + 2r\Delta r - r^2}{r^2(r^2 + 2r\Delta r)} \right)$$

$$= G \cdot m_{\text{Mond}} \cdot \left(\frac{2r\Delta r}{r^2(r^2 + 2r\Delta r)} \right)$$

$$\approx G \cdot m_{\text{Mond}} \cdot \frac{2\Delta r}{r^3}$$

$$\Delta g = \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 7{,}35 \cdot 10^{22} \cdot 2 \cdot 1{,}274 \cdot 10^{7}}{(3{,}84)^3 \cdot 10^{24}} \ \frac{\text{N}}{\text{kg}}$$

$$= 2{,}21 \cdot 10^{-6} \ \text{N/kg}$$

2. Siehe Abb. 4.2. Der Impulsstrom, der in die beiden Hantelteile A und B über das Gravitationsfeld hineinfließt, hat nicht dieselbe Richtung wie der sich in der Hantel ansammelnde Impuls. Die x-Komponente des in Körper B ankommenden Impulses fließt durch den Hantelstab nach A und kompensiert die x-Komponente des dort ankommenden Impulses.

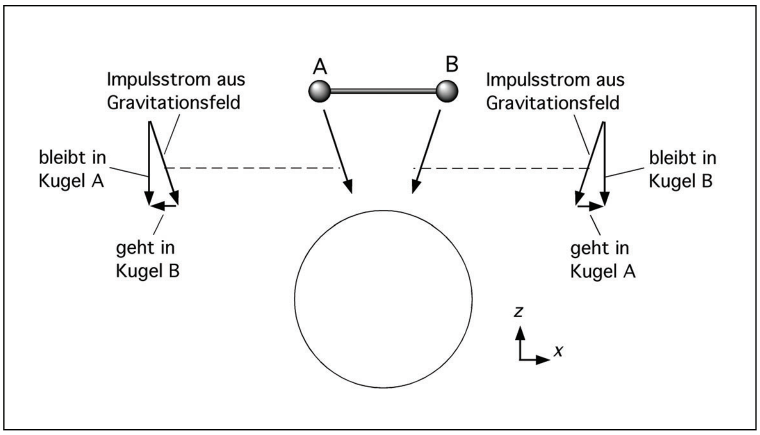


Abb. 4.2
Zu Abschnitt 4.9, Aufgabe **2**. In der Hantel häuft sich negativer z-Impuls an. Positiver x-Impuls fließt von A nach B.

5. Impuls und Energie

5.2 Der Impuls als Energieträger

1.

v = 20 km/h = 5,6 m/s
F = 900 N

$P = v \cdot F =$ 5,6 m/s · 900 N = 5040 W

Der Impuls fließt ab in die Erde und in die Luft. Die Energie wird bei der Entropieerzeugung verbraucht.

2.

v = 10 m/s
P = 800 W

$$F = \frac{P}{v} = \frac{800\ \text{W}}{10\ \text{m/s}} = 80\ \text{N}$$

3.

m = 50 kg
v = 0,8 m/s
h = 5 m

$F = m \cdot g$ = 50 kg · 10 N/kg = 500 N

$P = v \cdot F$ = 0,8 m/s · 500 N = 400 W

$$t = \frac{h}{v} = \frac{5\ \text{m}}{0{,}8\ \text{m/s}} = 6{,}25\ \text{s}$$

$E = P \cdot t$ = 400 W · 6,25 s = 2500 J

4.

s = 35 km
F = 900 N

$E = F \cdot s$ = 900 N · 35 km = 31 500 kJ

5.3 Der Drehimpuls als Energieträger

1.

P = 27 MW
ω = 100 Umdrehungen/Minute

$$\omega = \frac{100 \cdot 2\pi}{60}\ s^{-1} = 10{,}49\ s^{-1}$$

$$M = \frac{P}{\omega} = \frac{27 \cdot 10^6\ W}{10{,}49\ s^{-1}} = 2{,}57 \cdot 10^6\ E/s$$

2. Motor: Bipower SX

M = 130 Nm = 130 E/s
ω = 4000 Umdrehungen/Minute

$$\omega = \frac{4000 \cdot 2\pi}{60}\ s^{-1} = 419\ s^{-1}$$

$P = \omega \cdot M = 419\ s^{-1} \cdot 130$ E/s = 54,5 kW

Den Energiestrom (die Leistung) von 68 kW im Datenblatt erreicht der Motor bei einer höheren Winkelgeschwindigkeit.

5.4 Mechanische Energiespeicher

1.

m = 30 kg
t = 6 s
F = 20 N

$p = F \cdot t$ = 20 N · 6 s = 120 Hy

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{120^2\ Hy^2}{2 \cdot 30\ kg} = 240\ J$$

2.

m = 200 g
v = 0,8 m/s
s = 5 cm

$$E = \frac{m}{2}v^2 = 0{,}1\ kg \cdot 0{,}8^2\ m^2/s^2 = 0{,}064\ J$$

$$E = \frac{D}{2}s^2 \Rightarrow D = \frac{2E}{s^2} = \frac{2 \cdot 0{,}064\ J}{0{,}05^2\ m^2} = 51{,}2\ N/m$$

3.

Masse des leichteren Gleiters = m
Masse der drei Gleiter = $3m$

Der Impuls p vor und nach dem Stoß ist gleich.

$$E_{\text{vorher}} = \frac{p^2}{2m}$$

$$E_{\text{nachher}} = \frac{p^2}{3 \cdot 2m} = \frac{E_{\text{vorher}}}{3}$$

Die gesamte kinetische Energie hat beim Stoß auf 1/3 ihres ursprünglichen Wertes abgenommen. Die fehlenden 2/3 wurden zur Entropieerzeugung gebraucht.

4.

m = 20 kg
v_{vorher} = 0,5 m/s
D = 60 N/m

(a) $p_{\text{vorher}} = m \cdot v_{\text{vorher}}$ = 20 kg · 0,5 m/s = 10 Hy
$p_{\text{nachher}} = m \cdot v_{\text{nachher}}$ = 20 kg · –0,5 m/s = –10 Hy

(b)

$$E_{\text{kin}} = \frac{m}{2} v_{\text{vorher}}^2 = \frac{m}{2} v_{\text{nachher}}^2 = 10\ \text{kg} \cdot 0{,}25\ \text{m}^2/\text{s}^2 = 2{,}5\ \text{J}$$

(c)

$$E_{\text{Feder}} = \frac{D}{2} s^2 = E_{\text{kin}}$$

$$s = \sqrt{\frac{2E_{\text{kin}}}{D}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2{,}5\ \text{J}}{60\ \text{N/m}}} = 0{,}289\ \text{m}$$

(d) Wenn die Feder halb ausgelenkt ist, ist ihre Energie:

$$E'_{\text{Feder}} = \frac{D}{2}\left(\frac{s}{2}\right)^2 = \frac{E_{\text{Feder}}}{4}\ ,$$

also gleich einem Viertel der Gesamtenergie. Die kinetische Energie ist daher gleich drei Viertel der Gesamtenergie:

$$E'_{\text{kin}} = \frac{m}{2} v'^2 = \frac{3E_{\text{kin}}}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{m}{2} v,$$

Damit wird

$$v'^2 = \frac{3}{4}\ v_{\text{vorher}}{}^2$$

$$v' = \sqrt{\frac{3}{4}} v_{\text{vorher}} = \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot 0{,}5 \text{ m/s} = 0{,}43 \text{ m/s}$$

5. Die Energie fließt zwischen Feder und Körper hin und her. Der Impuls fließt zwischen Körper und Erde (über die Feder) hin und her.

$m = 300$ g
$D = 7{,}5$ N/m
$v = 0{,}5$ m/s

Die kinetische Energie beim Durchgang durch die Ruhelage ist gleich der Federenergie bei maximaler Auslenkung.

$$\frac{D}{2}s^2 = \frac{m}{2}v^2$$

$$D \cdot s^2 = m \cdot v^2$$

$$s = \sqrt{\frac{m}{D}} \cdot v = \sqrt{\frac{0{,}3 \text{ kg}}{7{,}5 \text{ N/m}}} \cdot 0{,}5 \text{ m/s} = 0{,}1 \text{ m}$$

6. Die Bewegung verlaufe am Anfang in x- und am Ende in y-Richtung.

Die Energie hat in jedem Augenblick denselben Wert. Der gesamte x-Impuls wird an die Erde abgegeben, und der y-Impuls, den das Fahrzeug am Ende hat, kommt aus der Erde.

7.

$d = 2{,}2$ m
$m = 1{,}8$ t
$\omega = 2$ Umdrehungen/Sekunde

$L = m \cdot r^2 \cdot \omega = 1800 \text{ kg} \cdot 1{,}1^2 \text{ m}^2 \cdot 2 \cdot 2\pi \, s^{-1} = 27\,370 \text{ E}$

$$E = \frac{J}{2}\omega^2 = \frac{L \cdot \omega}{2} = \frac{27\,370 \text{ E} \cdot 2 \cdot 2\pi \text{ s}^{-1}}{2} = 172 \text{ kJ}$$

8. Index v: vorher, Index n: nachher

$J_A = J_B = 2 \text{ kgm}^2$
$\omega_{A,v} = 2$ Umdrehungen/Sekunde$_A$

(a) $L_{A,v} = J_A \cdot \omega_{A,v} = 2 \cdot 2 \cdot 2\pi \text{ E} = 25{,}13 \text{ E}$

(b) $E = \frac{L \cdot \omega}{2} = \frac{25{,}13\ \mathrm{E} \cdot 2 \cdot 2\pi\ \mathrm{s}^{-1}}{2} = 158\ \mathrm{kJ}$

(c) $L_{\mathrm{A,n}} = L_{\mathrm{B,n}} = \frac{L_{\mathrm{A,v}}}{2} = 12{,}56\ \mathrm{E}$

(d) $E_{\mathrm{A,n}} = \frac{{L_{\mathrm{A,n}}}^2}{2J} = \frac{(L_{\mathrm{A,v}}/2)^2}{2J} = \frac{{L_{\mathrm{A,v}}}^2}{8J} = \frac{E_{\mathrm{A,v}}}{4}$

$E_{\mathrm{A,n}} + E_{\mathrm{B,n}} = \frac{E}{2}$

(e) Beim Einkuppeln geht die Hälfte der Energie der Drehung verloren. Sie wird zur Entropieerzeugung gebraucht. Der Vorgang ist analog zu einem inelastischen Stoß eines Fahrzeugs gegen ein gleich schweres ruhendes.

9.

t = 10 s
P = 150 MW

$\omega = 1600$ Umdr./Minute $= \frac{1600 \cdot 2\pi}{60}\mathrm{s}^{-1} = 167{,}55\ \mathrm{s}^{-1}$

$E = P \cdot t$ = 150 MW · 10 s = 1,5 · 109 J

$E = \frac{J}{2}\omega^2 \Rightarrow J = \frac{2E}{\omega^2} = \frac{2 \cdot 1{,}5 \cdot 10^9\,\mathrm{J}}{167{,}55^2\ \mathrm{s}^{-2}} = 1{,}07 \cdot 10^5\ \mathrm{kgm}^2$

5.5 Das Gravitationsfeld als Energiespeicher – das Gravitationspotenzial

1. Siehe Abb. 5.1

h_2 = 880 m
h_1 = 550 m
V = 12 · 106 m³

$\psi_2 = g \cdot h_2$ = 9,8 N/kg · 880 m = 8624 J/kg
$\psi_1 = g \cdot h_1$ = 9,8 N/kg · 550 m = 5390 J/kg

$\Delta\psi = \psi_2 - \psi_1$ = 3234 J/kg

$m = \rho \cdot V$ = 1000 kg/m³ · 12 · 106 m3 = 12 · 109 kg

$E = m \cdot \Delta\psi$ = 12 · 109 kg · 3234 J/kg = 38,8 · 1012 J

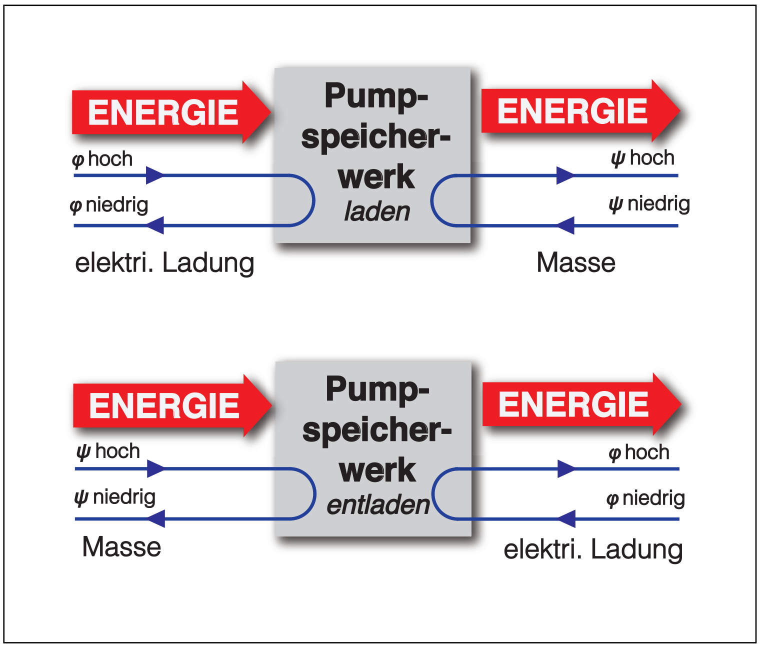


Abb. 5.1
Zu Abschnitt 5.5, Aufgabe **1**

$$P = \frac{E}{t} \Rightarrow t = \frac{E}{P} = \frac{38{,}8 \cdot 10^{12}\ \text{J}}{1{,}06 \cdot 10^{9}\ \text{W}} = 36{,}6 \cdot 10^{3}\ \text{s} \approx 10\ \text{h}$$

2.

$\Delta h = 120$ m
$I_V = 12\,000$ m³/s

$I_m = 12 \cdot 106$ kg/s

$\Delta\psi = g \cdot \Delta h = 9{,}8$ N/kg $\cdot$ 120 m = 1176 J/kg

$$P = \frac{E}{t} = \frac{m \cdot \Delta\psi}{t} = \Delta\psi \cdot I_m$$
$$= 1176\ \text{J/kg} \cdot 12 \cdot 10^{6}\ \text{kg/s} = 14 \cdot 10^{9}\ \text{W} = 14\ \text{GW}$$

3.

$v = 5$ m/s

$$\frac{m}{2} v^2 = m \cdot g \cdot h$$

$$\frac{v^2}{2} = g \cdot h$$

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{5^2 \text{m}^2/\text{s}^2}{2 \cdot 9{,}8\ \text{N/kg}} = 1{,}28\ \text{m}$$

4.

(a) Beim Werfen wird der Stein mit Energie und mit negativem Impuls (Zählrichtung nach unten positiv) geladen.

(b) Beim Hinauffliegen gibt er die Energie ans Gravitationsfeld ab. Im Umkehrpunkt ist die Energie null. In den Stein fließt ständig positiver Impuls hinein, sodass sein negativer Impuls abnimmt und im Umkehrpunkt null wird.

(c) Beim Herunterfliegen nimmt er Energie aus dem Gravitationsfeld auf, sein (positiver) Impuls nimmt zu.

5.

$r = 10$ cm
$m = 2$ kg
$v = 0{,}8$ m/s

Gesamtenergie am Anfang (Index a):

$J = m \cdot r^2 = 2\ \text{kg} \cdot 0{,}12\ \text{m}^2 = 0{,}02\ \text{kgm}^2$

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{0{,}8\ \text{m/s}}{0{,}1\ \text{m}} = 8\ \text{s}^{-1}$$

$$E_\text{a} = \frac{m}{2}v^2 + \frac{J}{2}\omega^2$$

$$= \frac{2\text{kg}}{2} \cdot 0{,}8^2\ \text{m}^2 + \frac{0{,}02\ \text{kgm}^2}{2} \cdot 8^2\ \text{s}^{-2} = 1{,}28\ \text{J}$$

Die Gesamtenergie am Anfang ist gleich der Energie am Ende (Index e):

$E_\text{a} = E_\text{e} = m \cdot g \cdot h$

$$h = \frac{E_\text{a}}{m \cdot g} = \frac{1{,}28\ \text{J}}{2\ \text{kg} \cdot 9{,}8\ \text{N/kg}} = 0{,}065\ \text{m}$$

5.6 Flaschenzug, Zahnradgetriebe, Ketten- und Riemenantrieb

1. Bei B dreimal so groß wie bei A, Abb. 5.2a

2. Bei B viermal so groß wie bei A, Abb. 5.2b

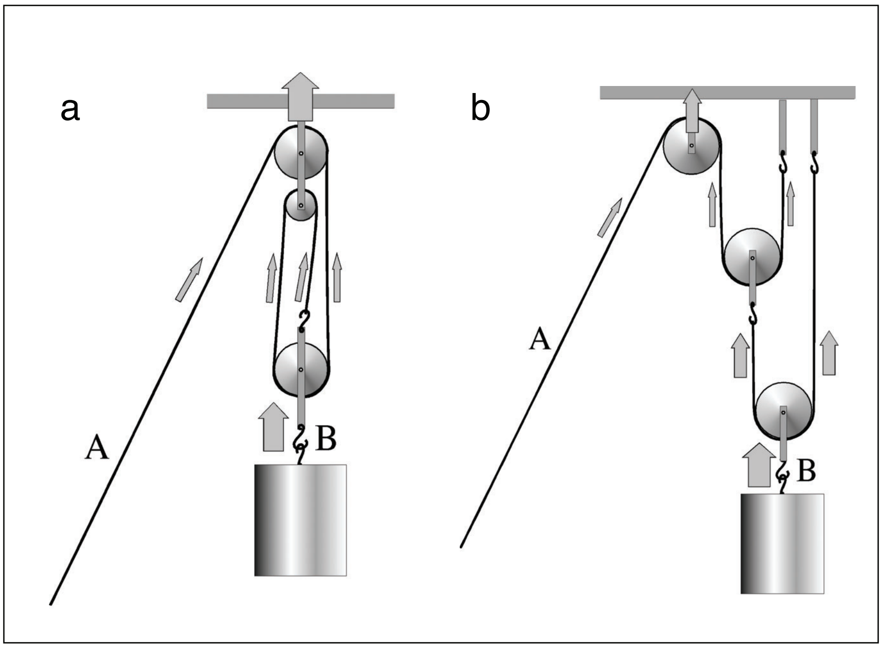


Abb. 5.2
Zu Abschnitt 5.6, Aufgaben **1** und **2**

5.7 Reibung

1. Siehe Abb. 5.3

2. Je langsamer das Fahrzeug ist, desto unwirksamer wird die Bremse. Das Fahrzeug kann also gut von einer hohen auf eine weniger hohe Geschwindigkeit gebremst, aber es kann nicht zum Stillstand gebracht werden. Dazu ist eine zweite, anders funktionierende Bremse nötig.

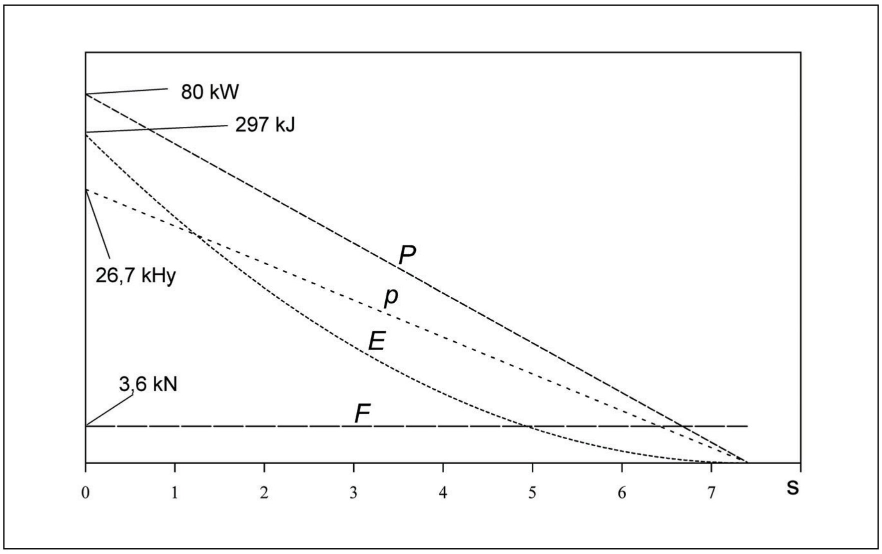


Abb. 5.3
Zu Abschnitt 5.7, Aufgabe **2**

6. Bezugssysteme

6.2 Erscheinungen in unterschiedlichen Bezugssystemen

1.

Bezugssystem Erde:

	A	B	zusammen
vorher			
v	3 m/s	–3 m/s	
p	6 Hy	–6 Hy	0 Hy
E_{kin}	9 J	9 J	18 J
nachher			
v	–3 m/s	3 m/s	
p	0 Hy	0 Hy	0 Hy
E_{kin}	0 J	0 J	0 J

Bezugssystem von Körper A vor dem Stoß:

	A	B	zusammen
vorher			
v'	0 m/s	–6 m/s	
p'	0 Hy	–12 Hy	–12 Hy
E'_{kin}	0 J	36 J	36 J
nachher			
v'	–3 m/s	–3 m/s	
p'	–6 Hy	–6 Hy	–12 Hy
E'_{kin}	9 J	9 J	18 J

2. Siehe Abb.6.1

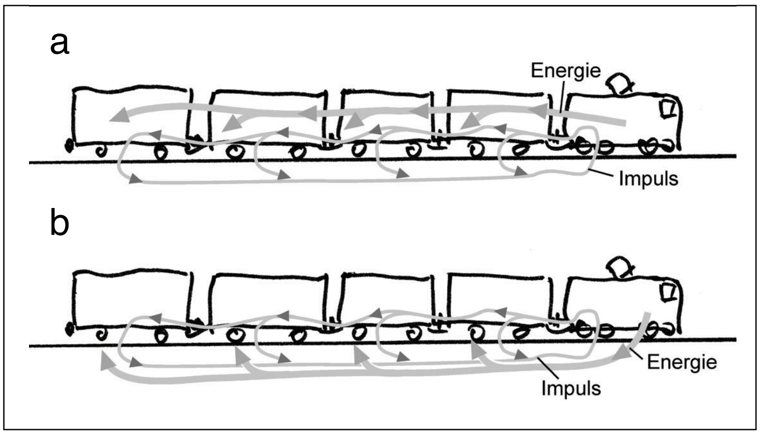


Abb. 6.1
Zu Abschnitt 6.2, Aufgabe **2**

3. Den Raketenmotor starten, so dass das Raumschiff beschleunigt wird. In Willys Bezugssystem ist jetzt die Gravitationsfeldstärke nicht mehr null. (Die Frage war schon in Aufgabe 2, Abschnitt 4,6 gestellt worden. Dort war aber eine andere Antwort naheliegend.)

6.3 Schwebende Bezugssysteme

1. $v = g \cdot t \approx 10\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 5\,\text{s} = 50\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Willy fühlt sich schwerelos. Für ihn ist die Gravitationsfeldstärke null.

Im Boden des Fallturm befindet sich ein Katapult. Mit Hilfe dieses Katapults lässt sich Willy mit der Geschwindigkeit v = 50 m/s nach oben schleudern. Den ganzen Vorgang, also vom Zeitpunkt wo er das Katapult verlässt bis zum Landen, beschreibt Willy als schweben. Der ganze Vorgang dauert jetzt 2 · t = 10 s.

2. Beide spüren kein Gravitationsfeld, schweben also während der Dauer des Experiments. Schwebende Bezugsysteme bewegen sich zueinander mit konstanter Geschwindigkeit. Willy sagt, dass Lilly mit der konstanten Geschwindigkeit v = 50 m/s auf ihn zu schwebt. Das gleiche sagt Lilly von Willy. Nachdem sich beide auf halber Strecke begegnet sind, bewegen sie sich bis zum Ende des Experiments mit der gleichen Geschwindigkeit wieder voneinander weg.

3. Der Fallschirmspringer spürt das Gravitationsfeld, die Feldstärke ist für ihn nicht null. Es fließt also Impuls aus dem Gravitationsfeld in den Fallschirmspringer. Da ihn wegen der Luftreibung ein gleich grosser Impulsstrom verlässt, bleibt seine Geschwindigkeit konstant. Es hat sich ein Fließgleichgewicht eingestellt.

7. Die Grenzgeschwindigkeit

7.2 Energie hat die Eigenschaften von Masse

1.

$E = 5 \cdot 1016$ J

$$m = \frac{E}{k} = \frac{5 \cdot 10^{16}\ \text{J}}{9 \cdot 10^{16}\ \text{J/kg}} = \ 0{,}56\ \text{kg}$$

2. Wir berechnen die Oberfläche einer Kugel mit einem Radius von 150 Millionen Kilometer:

$A = 4\pi r^2 = 4\pi \cdot 1{,}5^2 \cdot 10^{22}\ \text{m}^2 = 287 \cdot 10^{21}\ \text{m}^2$

Der gesamte Energiestrom durch diese Fläche ist:

$P = A \cdot 1400\ \text{W} = 396 \cdot 10^{24}\ \text{W}$

Damit ist der Energieverlust der Sonne in einer Sekunde:

$E = 396 \cdot 10^{24}\ \text{J}$

$$m = \frac{E}{k} = \frac{396 \cdot 10^{24}\ \text{J}}{9 \cdot 10^{16}\ \text{J/kg}} = \ 4{,}4 \cdot 10^{9}\ \text{kg}$$

3. Auf einen Quadratmeter fallen 1400 J.

$$m = \frac{E}{k} = \frac{1400\ \text{J}}{9 \cdot 10^{16}\ \text{J/kg}} = \ 1{,}56 \cdot 10^{-14}\ \text{kg}$$

$$\frac{m}{t} = 1{,}56 \cdot 10^{-14}\ \text{kg/s}$$

$$t = \frac{m}{1{,}56 \cdot 10^{-14}\ \text{kg/s}} = \frac{0{,}001\ \text{kg}}{1{,}56 \cdot 10^{-14}\ \text{kg/s}} = 6{,}4 \cdot 10^{10}\ \text{s}$$

$$\approx 2000\ \text{Jahre}$$

4.

$E = 500$ kJ

$$m = \frac{E}{k} = \frac{500\ \text{kJ}}{9 \cdot 10^{16}\ \text{J/kg}} = \ 5{,}6 \cdot 10^{-12}\ \text{kg}$$

Ein Auto braucht etwa 10 Liter pro 100 km, d.h. etwa 10 kg/100 km. Mit $v = 100$ km/h folgt, dass es etwa 10 kg/h braucht, oder $3 \cdot 10^{-3}$ kg/s. Der Beschleunigungsvorgang dauert etwa 10 s. Das Auto wird dabei also um $30 \cdot 10^{-3}$ kg = 30 g leichter. Diese Abnahme ist $5 \cdot 10^9$ mal größer als die zuvor berechnete Zunahme.

7.6 Die Geschwindigkeit bei Bezugssystemwechsel

1.

Geschwindigkeiten relativ zur Erde:

Uranus $v_{UE} = 0{,}9\ c$
Wostok $v_{WE} = -0{,}5\ c$
Shenzhou $v_{SE} = 0{,}5\ c$

Es folgt:

$v_{EW} = 0{,}5\ c$
$v_{ES} = -0{,}5\ c$

$$v_{UW} = \frac{v_{UE} + v_{EW}}{1 + \frac{v_{UE} \cdot v_{EW}}{c^2}} = 0{,}966\ c \qquad v_{US} = \frac{v_{UE} + v_{ES}}{1 + \frac{v_{UE} \cdot v_{ES}}{c^2}} = 0{,}727\ c$$

2.

$v' = 140\ \text{km/h}$

$v_0 = 30\ \text{km/s}$

$$v - v_0 = \frac{v' + v_0}{1 + \frac{v' \cdot v_0}{c^2}} - v_0 = v' \cdot \frac{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}{1 + \frac{v' \cdot v_0}{c^2}}$$

Der zweite Summand im Nenner ist klein gegen eins und viel kleiner als der zweite Summand im Zähler. Er kann gegen die eins vernachlässigt werden.

$$v - v_0 \approx v' \cdot \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)$$

$$= 140\ \text{km/h}\ \left(1 - \frac{3^2 \cdot 10^8}{3^2 \cdot 10^{16}}\right) = (1 - 10^{-8}) \cdot 140\ \text{km/h}$$

Die Abweichung von 140 km/h ist sicher kleiner als die Genauigkeit, mit der diese Geschwindigkeit gemessen wurde.

7.7 Wie die Energie vom Impuls abhängt

1. Siehe Abb. 7.1

$$E(v) = \frac{E_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Für kleine Geschwindigkeiten ist die Energie/Masse nahezu unabhängig von der Geschwindigkeit. Für $v \to c$ geht sie asymptotisch gegen unendlich.

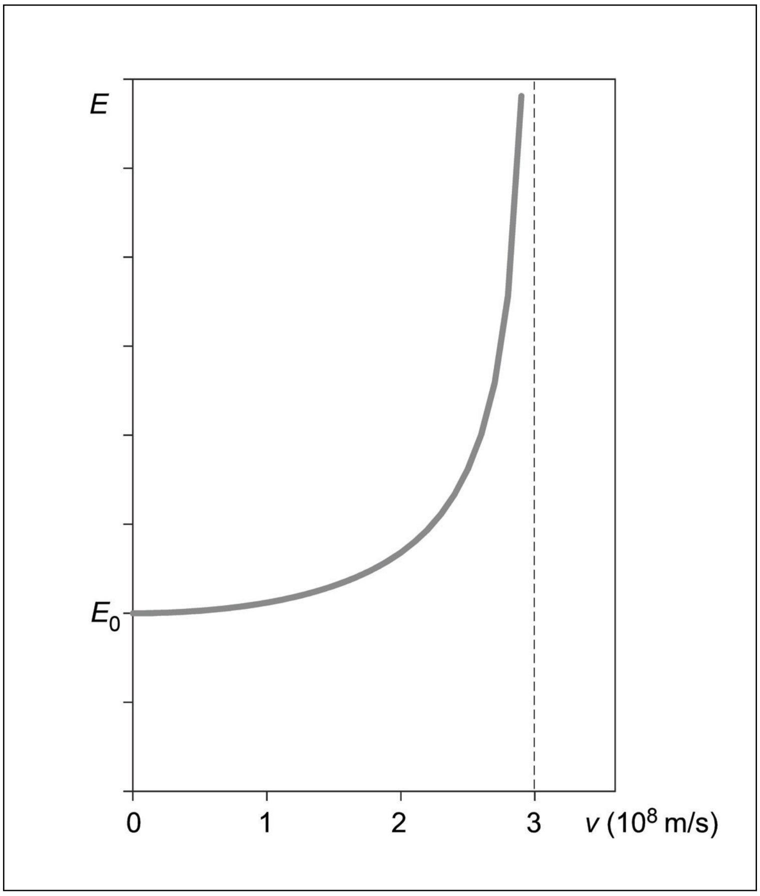


Abb. 7.1
Zu Abschnitt 7.6, Aufgabe **1**

Die Bedingung für $E(v) = 2E_0$ lautet

$$2E_0 = \frac{E_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

Daraus folgt

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2}c = 0{,}866\ c = 2{,}6 \cdot 10^8\ \text{m/s}$$

2. Siehe Abb. 7.2

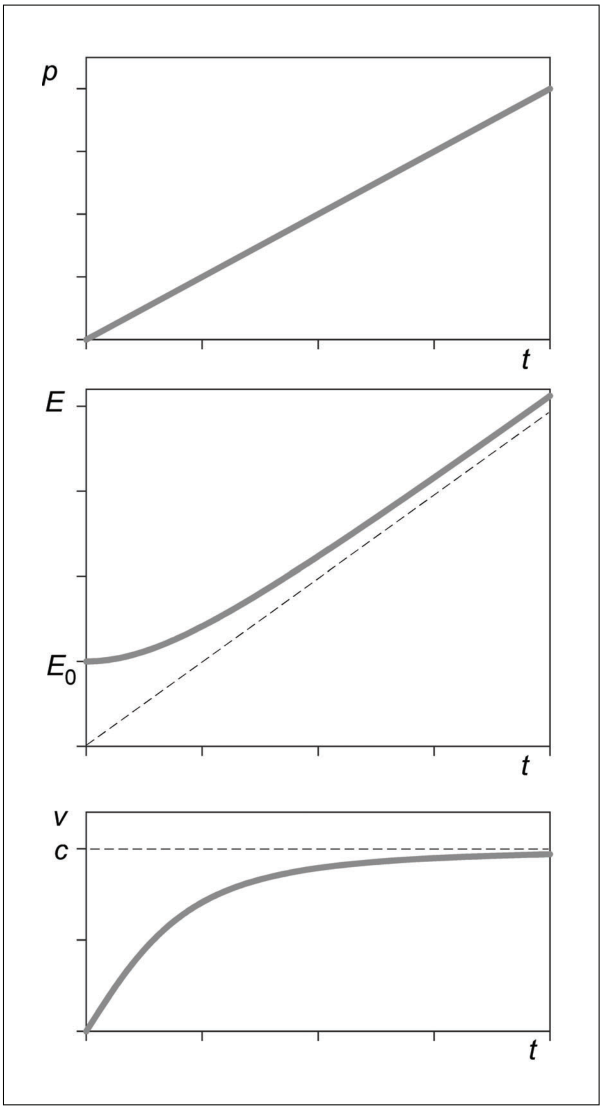


Abb. 7.2
Zu Abschnitt 7.6, Aufgabe **2**

7.8 Teilchenbeschleuniger

Aus

$$E(v) = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

folgt

$$v = c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E}\right)^2}$$

Proton-Synchrotron-Booster:
$E = 1{,}5\ E_0$
$v = 0{,}75\ c$

Proton-Synchrotron:
$E = 20\ E_0$
$v = 0{,}9987\ c$

Super-Proton-Synchrotron:
$E = 400\ E_0$
$v = 0{,}999996875\ c$

LHC:
$E = 7000\ E_0$
$v = 0{,}9999999898\ c$

7.10 Uhren im Gravitationsfeld

1.

t = 2 Jahre = 6,3 · 107 s
Δh = 400 m

$$\Delta t = \frac{t \cdot g \cdot \Delta h}{k} = \frac{6{,}3 \cdot 10^7\,\text{s} \cdot 9{,}8\ \text{N/kg} \cdot 400\ \text{m}}{9 \cdot 10^{16}\ \text{J/kg}} = 2{,}7 \cdot 10^{-6}\,\text{s}$$

2.

Auf das alltägliche Leben wirkt es sich gar nicht aus. Dass er schneller altert, merkt Willy nur über die Nachrichten, die er von Lilly bekommt und er sieht es, wenn Lilly ihn besucht: Sie ist jünger, als sie wäre, wenn sie auf derselben Höhe wie Willy gelebt hätte.

8. Die Raumzeit

8.1 Darstellungsfragen, Bezeichnungen

1. Siehe Abb. 8.1

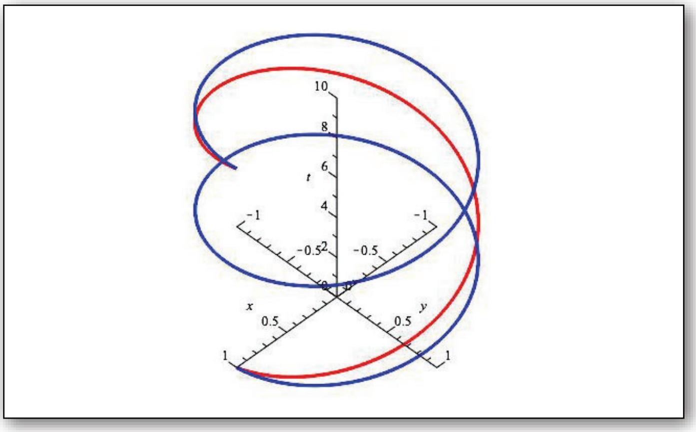


Abb. 8.1
Zu Abschnitt 8.1, Aufgabe **1**

2. Siehe Abb. 8.2

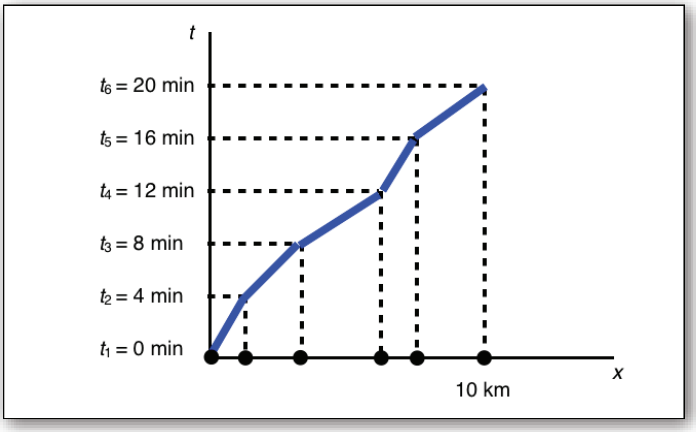


Abb. 8.2
Zu Abschnitt 8.1, Aufgabe **2**

3. (1) und (3) bewegen sich mit konstanter Geschwindigkeit, (1) ist der schnellere. (2) wird langsamer, (4) wird schneller.

4. Siehe Abb. 8.3

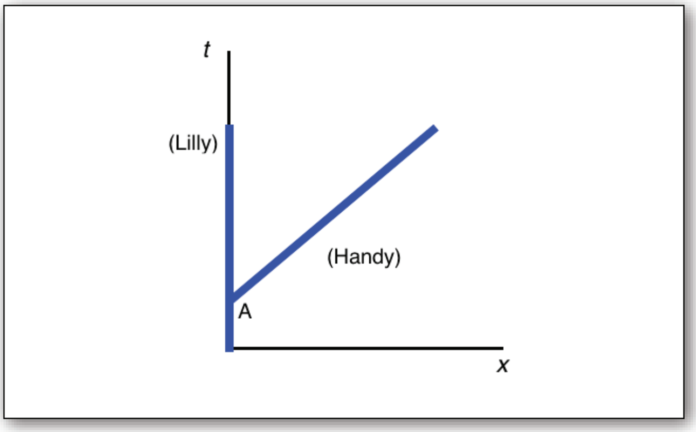


Abb. 8.3
Zu Abschnitt 8.1, Aufgabe **4**

5. Siehe Abb. 8.4

Lilly kehrt um: $x = 7{,}5$ km; $t = 8{:}30$ h

Lilly trifft Willy: $x = 0$ km; $t = 9{:}00$ h

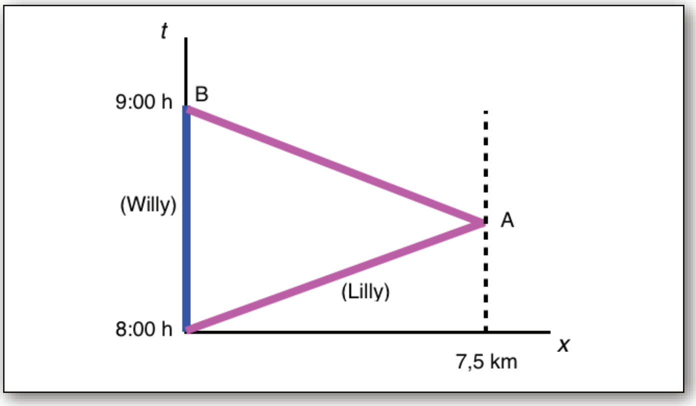


Abb. 8.4
Zu Abschnitt 8.1, Aufgabe **5**

8.2 Der zeitliche Abstand zwischen zwei Raumzeit-Punkten

1. (a) Alle Reisen bis auf (3) sind erlaubt. Die Reisenden (3) würden sich mit einer Geschwindigkeit bewegen, die größer als die Grenzgeschwindigkeit ist.

(b) Zeit (5) < Zeit (2) < Zeit (4) < Zeit (1) (Reisender (4) kehrt vor der ausgemachten Zeit zurück und wartet zusammen mit (1) bis die anderen zurückkehren.)

2. (a) Ereignis A: Aussenden des Lichtpulses auf der Erde;
Ereignis B: Ankommen des Lichtpulses auf der Erde.

(b) Siehe Abb. 8.5

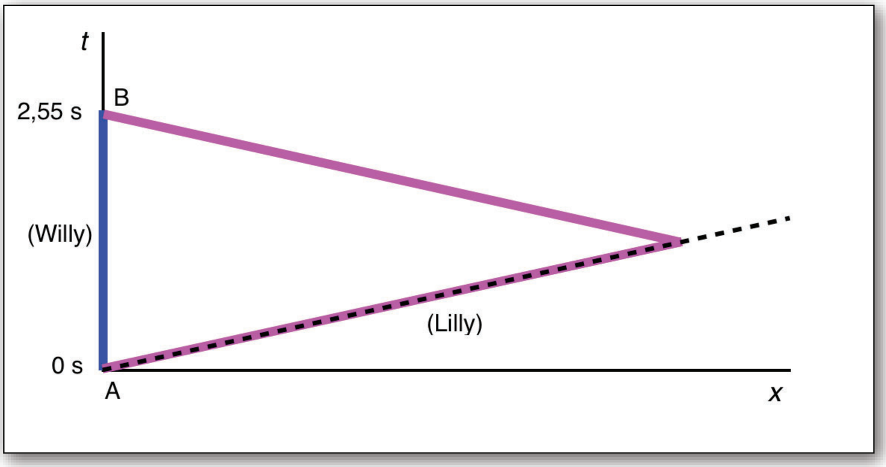


Abb. 8.5
Zu Abschnitt 8.2, Aufgabe **2**

(c) Lillys Uhr zeigt eine Reisedauer von 0 s an.
(d) Da $s = vt$ ist, schließt Lilly, dass für die der Abstand Mond-Erde 0 km ist.

3.

(a) Willy hat errechnet, dass Lilly
$s = ct = 3 \cdot 10^8$ m/s $\cdot$ 1a = $3 \cdot 10^8$ m/s $\cdot 3{,}15 \cdot 10^7$ s = $9{,}5 \cdot 10^{12}$ km
zurückgelegt haben muss.

(b) Während Willy seinen 16. Geburtstag feiert, ist Lilly immer noch genau 16 Jahre alt.

8.3 Zeitreisen – das Zwillingsparadoxon

1.

$T_k = 0{,}5 \cdot T_g$ in $T_k = T_g \cdot \sqrt{1 - v^2/c^2}$ eingesetzt liefert

$$v = \frac{\sqrt{3}}{2} c = 2{,}6 \cdot 10^8 \text{ m/s} = 87\,\%\, c\,.$$

2.

(a) Willy rechnet die Zeit aus, die für ihn vergeht bis Lilly ihr Ziel erreicht hat: T_W = 0,99 Lj/98 c = $3{,}2 \cdot 10^9$ s = 101 Jahre. Er müsste also 202 Jahre warten bis Lilly zurückkehrt.

(b) $T_L = T_W \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 20$ Jahre

(c) v = 99Lj/20 Jahre = 5c. Sie ist überrascht, da sie weiß, dass niemand mit einer Geschwindigkeit größer als c reisen kann.

(d) Sie schließt, dass sie in ihrer Rechnung die Entfernung 99 Lichtjahre nicht verwenden durfte. Die Entfernung vom Start bis zum Ziel muss für sie deutlich kleiner gewesen sein.

8.4 Bewegung auf einer Kreisbahn – GPS

1.

r_N = 4500 Millionen km = $4{,}5 \cdot 10^{12}$ m; T_N = 165 a = $5{,}2 \cdot 10^9$ s
r_M = 58 Millionen km = $5{,}8 \cdot 10^{10}$ m; T_M = 88 d = $7{,}6 \cdot 10^6$ s

Mit $T_k = T \cdot \sqrt{1 - (4\pi^2 r^2)/(c^2 T^2)}$ ergibt sich

Neptun:	$3{,}1535999994 \cdot 10^{15}$ s
Merkur:	$3{,}1535999597 \cdot 10^{15}$ s

und damit der Unterschied: $3{,}97 \cdot 10^7$ s = 1,26 a

2. Da $T_k = T \cdot \sqrt{1-(4\pi^2 {r_M}^2)/(c^2 {T_M}^2)}$, ist $T_K < T$.
Uhren auf dem Mond laufen langsamer als Uhren auf der Erde. Da die Halbwertszeit eines radioaktiven Materials eine Materialeigenschaft ist, wird auf der Erde und auf dem Mond für das gleiche Material die gleiche Halbwertszeit gemessen. Die Uhren, mit denen man die Halbwertszeit misst, laufen auf dem Mond langsamer als auf der Erde. Daher zerfällt das Material auf dem Mond auch langsamer. Ist auf der Erde also die Hälfte davon zerfallen, so existiert auf dem Mond noch etwas mehr als die Hälfte.

9. Der gekrümmte Raum

9.2 Masse krümmt den Raum – Geodäten

1. (a) Die Linien kreuzen sich, obwohl sie gerade sind. Ursache: der zweidimensionale Raum, in dem sie verlaufen, ist gekrümmt.

(b) Die Linien kreuzen sich nicht, obwohl sie nicht gerade sind. Die Wirkung der Krümmung der Linien hebt sich mit der des gekrümmten Raumes auf.

2. Nein, die eindimensionalen Wesen haben kein Mittel, eine Krümmung ihrer Welt festzustellen. Es gibt auch keine krummen Linien in dieser Welt. Die Wesen der 2D-Welt, in die die 1D-Welt eingebettet ist, behaupten allerdings, dass die 1D-Welt sehr wohl gekrümmt sein kann.

4. (a) Für die 2D-Menschen ist der Bogen MA der Radius. Der eigentliche Radius, den man in die Formel einsetzen müsste, um zum richtigen Ergebnis zu kommen, ist die Länge der Strecke M'A, Abb. 9.1.

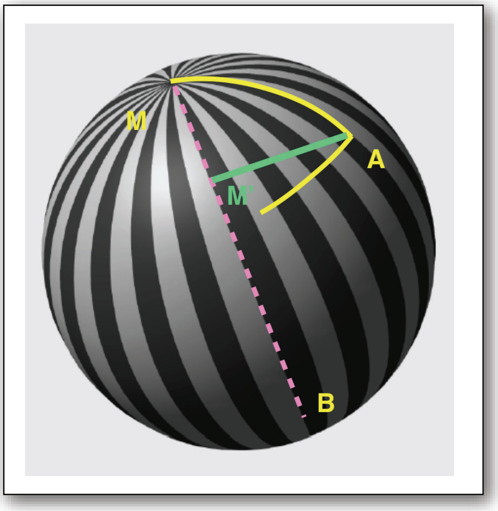


Abb. 9.1
Zu Abschnitt 9.2, Aufgabe **4**

Diese ist kürzer als der Bogen. In ihrer Welt ist den 2D-Menschen diese Strecke nicht zugänglich. Sie können sie aber berechnen, indem sie den Umfang messen und durch 2π teilen.

(b) Mit wachsender Entfernung des Punktes A von M wächst auch der Umfang, aber nicht in dem Maße, wie es die 2D-Menschen unter der Verwendung der Formel erwarten. Der Fehler wird immer größer. Schließlich ist A so weit von M entfernt, dass ein weiteres Entfernen kleiner werdende Umfangswerte liefert. Wenn A schließlich mit B zusammenfällt, schrumpft der Kreisumfang auf 0. A liegt dann auf dem einen Ende eines Durchmessers MB.

9.3 Die Raumkrümmung in der Umgebung von Himmelskörpern

1. A = Oberfläche, V = Volumen

$$V = \frac{\pi}{6} \cdot \left(\frac{A}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}$$

2.

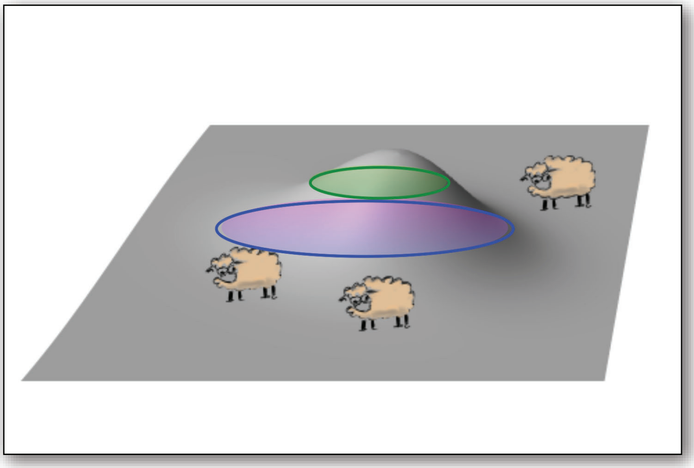


Abb. 9.2
Zu Abschnitt 9.3,
Aufgabe **2**

Gegenüber der flachen Wiese passt in einen Kreis mehr Fläche, wenn sich in der Mitte ein Hügel befindet.

9.4 Flugbahnen im Gravitationsfeld

1. (a) Ablenkwinkel 50,9 grad

(b) Masse der Erde $6 \cdot 10^{24}$ kg, Radius 6350 km. Ablenkwinkel $1{,}61 \cdot 10^{-7}$ grad.

2. Licht, das von der hell dargestellten Oberfläche der Sonne kommt, Abb. 9.3 links, trifft den Beobachter nicht. Das Gravitationsfeld des Neutronensternen ist stark genug, das Licht so abzulenken, dass der Beobachter mehr als die Hälfte der Oberfläche sieht (rechts).

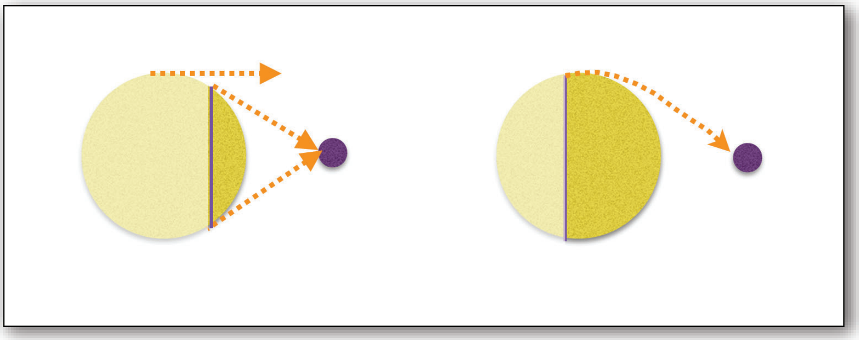


Abb. 9.3
Zu Abschnitt 9.4,
Aufgabe **2**

9.8 Gravitationswellen

1. Die Wellenlänge der gemessenen Gravitationswelle beträgt $\lambda_{gr} = 10^6$ m und ist damit $1{,}4 \cdot 10^{12}$ mal so groß wie die Wellenlänge von rotem Licht ($\lambda_{rot} = 700 \cdot 10^{-9}$ m).

2. In dem betrachteten Moment wird der Raum horizontal größer und vertikal kleiner. Wählt man B als Bezugspunkt, dann bewegen sich Lilly und Wille von B weg.

10. Kosmologie

10.4 Die Expansion des Universums

Gesuchte Vergrößerung = x

$$H = \frac{2{,}1\ \text{m/s}}{100\ \text{Lj}} = \frac{\text{x/Jahr}}{1\ \text{km}}$$

$$x = \frac{2{,}1\ \text{m/s} \cdot 1\ \text{km}}{100\ \text{Lj}} \cdot \text{Jahr} = \frac{2{,}1\ \text{m/s} \cdot 1\ \text{km}}{100 \cdot c \cdot \text{Jahr}} \cdot \text{Jahr} = 7 \cdot 10^{-8}\ \text{m}$$

10.6 Was wir vom Universum sehen

Wir würden alles sehen, was sich zum Zeitpunkt der Entstehung innerhalb einer Entfernung von 14 Milliarden Lj befunden hat.