Aufgaben 11 Wellen
Überlagerung/Interferenz, Stehende Wellen, Eigenschwingungen

Lernziele

- sich aus dem Studium eines schriftlichen Dokumentes neue Kenntnisse und Fähigkeiten erarbeiten können.
- einen bekannten oder neuen Sachverhalt analysieren und beurteilen können.
- aus einem Experiment neue Erkenntnisse gewinnen können.
- eine neue Problemstellung selbstständig bearbeiten und in einer Gruppe diskutieren können.
- das Prinzip der ungestörten Überlagerung von Wellen kennen und verstehen.
- wissen und verstehen, was konstruktive und destruktive Interferenz ist.
- die Überlagerung zweier in gleiche Richtung bzw. gegeneinander laufender Wellen beschreiben können und verstehen.
- wissen und verstehen, was ein Gangunterschied ist.
- die Interferenz zweier schräg zueinander laufender gleicher Sinuswellen verstehen.
- wissen, wie die Energie im Überkreuzungsbereich zweier Sinuswellen fliesst.
- wissen, wie eine Welle an einem festen und freien Ende eines Wellenträgers reflektiert wird.
- verstehen, wie eine stehende Welle entsteht.
- ausgewählte einfachere Problemstellungen zur Interferenz bearbeiten können.
- eine Eigenschwingung auf einem eindimensionalen Wellenträger als Überlagerung zweier entgegenlaufender Wellen verstehen.
- verstehen, dass sich auf einem endlichen Wellenträger nur bei bestimmten Frequenzen eine stehende Welle bzw. eine Eigenschwingung bildet.
- den Zusammenhang zwischen der Länge eines eindimensionalen Wellenträgers und den Wellenlängen bzw. Frequenzen der möglichen Eigenschwingungen verstehen und anwenden können.
- die mathematische Beschreibung einer stehenden Welle bzw. Eigenschwingung kennen, verstehen und anwenden können.
- wissen und verstehen, was es braucht, damit eine Eigenschwingung aufrecht erhalten werden kann.
- Beispiele von stehenden Wellen kennen.

Aufgaben

11.1 Studieren Sie im Lehrbuch KPK 3 die folgenden Abschnitte:
- 4.9 Zwei Wellen am selben Ort (Seite 34)
- 4.10 Zwei Sinuswellen – Interferenz (Seite 35)
- 4.11 Reflexion von Wellen (Seite 36)
- 4.12 Eigenschwingungen von Wellenträgern (Seite 37)
- 4.13 Die Interferenz von Wellen (Seite 38)

11.2 **Experiment Posten 1: Wellenmaschine** (20 min)

a) Führen Sie die im Lehrbuch KPK 3 im Abschnitt 4.9 (Seite 34, Abb. 4.23 bis 4.26) beschriebenen Experimente auf der Wellenmaschine durch.

Schicken Sie also gleichzeitig von links und von rechts eine Störung los. Beobachten und notieren Sie, was passiert, wenn die beiden Störungen in der Mitte aufeinander treffen.

Alternative zum Experiment
Studieren Sie die Animation in der folgenden ***GeoGebra-Datei****:*
- Überlagerung gegeneinanderlaufender Störungen

b) Die Wellenmaschine ist ein Wellenträger mit einer endlichen Länge. Trifft eine Welle auf das Ende des Wellenträgers, wird sie dort reflektiert.

Man unterscheidet zwischen festen und freien Enden. Bei einem festen Ende ist das letzte Teilchen des Wellenträgers unbeweglich, während es bei einem freien Ende frei beweglich ist.

(Fortsetzung siehe nächste Seite)

Auf der Wellenmaschine kann man ein festes Ende simulieren, indem man das letzte Teilchen von Hand oder mit einer entsprechenden Vorrichtung arretiert. Ohne Arretierung ist das Ende frei.

Untersuchen Sie auf der Wellenmaschine, wie eine Störung an einem ...

i) ... festen Ende ...

ii) ... freien Ende ...

... reflektiert wird. Schreiben Sie Ihre Beobachtungen in einigen Worten auf.

Alternative zum Experiment
Studieren Sie das folgende ***YouTube-Video****:*
- *Wellenabschluss, Reflexion, Stehende Welle*

11.3 **Experiment Posten 2: Zwei Lautsprecher** (20 min)

Zwei Lautsprecher senden den gleichen Ton aus. Über ein Mikrofon wird die Überlagerung der beiden Schallwellen in ein elektrisches Signal umgewandelt und auf einem Kathodenstrahloszilloskop (KO) dargestellt.

a) Schalten Sie nur einen Lautsprecher ein. Beobachten Sie das Signal auf dem KO. Beurteilen Sie, ob das Signal vom Abstand zwischen dem Lautsprecher und dem Mikrofon abhängt.

b) Wiederholen Sie a) mit dem anderen Lautsprecher.

c) Schalten Sie nun beide Lautsprecher ein. Beobachten Sie das Signal auf dem KO. Vergleichen Sie das Signal mit demjenigen, bei welchem nur ein Lautsprecher eingeschaltet war. Beurteilen Sie, wie das Signal von den Abständen der einzelnen Lautsprecher zum Mikrofon abhängt.

d) Interpretieren Sie Ihre Beobachtungen bzgl. der Überlagerung bzw. Interferenz von Wellen.

Alternative zum Experiment
Studieren Sie das folgende ***YouTube-Video****:*
- *Interferenz zweier Lautsprecher*

11.4 **Experiment Posten 3: Wellenwanne** (20 min)

Auf der Wellenwanne werden zwei periodische Kreiswellen erzeugt, indem zwei Spitzen ins Wasser eingetaucht und zu einer vertikalen Zitterbewegung mit hoher Frequenz gebracht werden. Das Wellenbild auf der Wasseroberfläche wird mit einer Beleuchtung des durchsichtigen Wannenbodens und über einen Spiegel an die Wand projiziert. Das Hell-Dunkel-Muster entspricht der Lage der Wellenberge und Wellentäler.

Das Wellenbild zeigt das Interferenzmuster der beiden Kreiswellen. Finden Sie Punkte oder Kurven im Interferenzmuster mit konstruktiver bzw. destruktiver Interferenz.

Hinweise:
- Sehr helle und sehr dunkle Stellen auf dem Interferenzbild entsprechen Orte mit konstruktiver Interferenz.
- Graue Stellen auf dem Interferenzbild entsprechen Orte mit destruktiver Interferenz.
- Es kann hilfreich sein, das Wellenbild stroboskopisch zu betrachten: Man schaut nicht kontinuierlich, sondern in sehr kleinen zeitlichen Abständen, die gerade der Frequenz der zu beobachtenden Wellen entsprechen. Dadurch entsteht ein stehendes Bild der Wellen.
- Da man die Augen nicht mit der hohen Frequenz der Wellen öffnen und schliessen kann, gibt es den folgenden Trick: Halten Sie eine Hand mit gespreizten, horizontal gerichteten Fingern etwa 10 cm vor Ihre Augen, und bewegen Sie die Hand vertikal auf und ab.

Alternative zum Experiment
Studieren Sie das folgende ***YouTube-Video****:*
- *Überlagerung von konzentrischen Kreiswellen auf Wasser*

11.5 (siehe nächste Seite)

11.5 **Experiment Posten 4: Kundt'sches Rohr** (August Kundt, 1839-1894) (15 min)

Das sogenannte Kundt'sche Rohr besteht aus einem Glasrohr, welches fein verteiltes, trockenes Korkmehl enthält. Das Glasrohr ist auf einer Seite durch einen Stöpsel verschlossen. Am offenen Ende befindet sich der Lautsprecher eines Tongenerators.

Wird mit Hilfe des Tongenerators ein Ton (harmonische Schallwelle) erzeugt, so beginnt das Korkmehl leicht zu vibrieren. Bei bestimmten Frequenzen entsteht im Rohr eine stehende Schallwelle bzw. eine Eigenschwingung, und das Korkmehl bewegt sich besonders stark: Es entstehen regelmässige Staubfiguren (sog. Kundt'sche Staubfiguren). Das Korkmehl wird dort weggeblasen, wo sich die Luftteilchen besonders stark bewegen, also in den Schwingungs- oder Bewegungsbäuchen der stehenden Schallwelle. Es bilden sich dort kleine Staubhäufchen, wo sich die Luftteilchen nicht bewegen, also in den Schwingungs- oder Bewegungsknoten der stehenden Schallwelle.

Verändern Sie am Drehknopf des Tongenerators langsam die Frequenz des erzeugten Tones.
Beobachten Sie dabei das Korkmehl im Glasrohr.

a) Überzeugen Sie sich davon, dass nur bei bestimmten Frequenzen eine stehende Schallwelle entsteht.

b) Erzeugen Sie mindestens drei verschiedene Eigenschwingungen.

   i) Notieren Sie sich die Frequenzen, bei welchen die Eigenschwingung bzw. die stehende Welle auftritt.

   ii) Finden Sie eine Beziehung zwischen diesen Eigenfrequenzen.

   iii) Messen Sie bei allen beobachteten Eigenschwingungen mit einem Massstab den Abstand der Schwingungsknoten, und bestimmen Sie daraus die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Schallwellen in Luft.

Alternative zum Experiment
*Studieren Sie das folgende **YouTube-Video**:*
- *Kundtsches Rohr*

11.6 **Experiment Posten 5: Chladni'sche Klangfiguren** (Ernst Chladni, 1756-1827) (15 min)

In diesem Experiment sollen Sie stehende Wellen bzw. Eigenschwingungen auf einem endlichen zweidimensionalen Wellenträger beobachten. Als Wellenträger dient eine Glasplatte.

Die waagrecht montierte, quadratische Glasplatte ist mit feinverteiltem Sand bedeckt. Daneben liegt auf dem Tisch ein Cellobogen.

a) Streichen Sie mit dem Cellobogen über den Rand der Glasplatte. Beobachten Sie dabei das Verhalten des Sandes auf der Glasplatte. Wenn Sie eine Eigenschwingung anregen, entsteht ein Sandmuster, das die zur entsprechenden Eigenschwingung gehörenden Knoten und Bäuche sichtbar macht.

b) Versuchen Sie, mindestens zwei Eigenschwingungen der Glasplatte anzuregen.

c) Wiederholen Sie a) und b) mit der runden Glasplatte.

Alternative zum Experiment
*Studieren Sie das folgende **YouTube-Video**:*
- *Chladnische Klangfiguren*
(Bem.: Im Video werden die Chladnischen Klangfiguren mit einem Schwingungsgenerator erzeugt, nicht mit einem Cellobogen.)

11.7 (siehe nächste Seite)

11.7 Studieren Sie die folgenden **Applets**:

a) Stehende Welle

i) Beobachten Sie, wie die von links einfallende rote Welle am festen bzw. losen Ende reflektiert wird. Beurteilen Sie den Unterschied zwischen der Reflexion an einem festen und der Reflexion an einem losen Ende (vgl. Aufgabe 11.2 b)).

ii) Beobachten und beschreiben Sie die Entstehung einer stehenden Welle bei der Reflexion einer Welle an einem festen bzw. freien Ende des Wellenträgers.

iii) Beurteilen Sie, ob die stehende Welle am Ende des Wellenträgers einen Schwingungsknoten oder einen Schwingungsbauch aufweist.

b) Stehende Longitudinalwellen

i) Beobachten und beschreiben Sie eine stehende Schallwelle in einem Rohr für die drei folgenden Fälle:
- beidseitig offen
- einseitig offen
- beidseitig geschlossen

ii) Beobachten Sie, welche Wellengrössen an den Rohrenden jeweils einen Knoten bzw. einen Bauch aufweisen.

c) Interferenz zweier Kreiswellen (1)

Die wandernden schwarzen Kreise symbolisieren die von den beiden Erregerzentren ausgehenden Wellenberge, die grauen Kreise die Wellentäler.

i) Beschreiben Sie die Orte, welche durch die **roten** Linien gekennzeichnet sind.

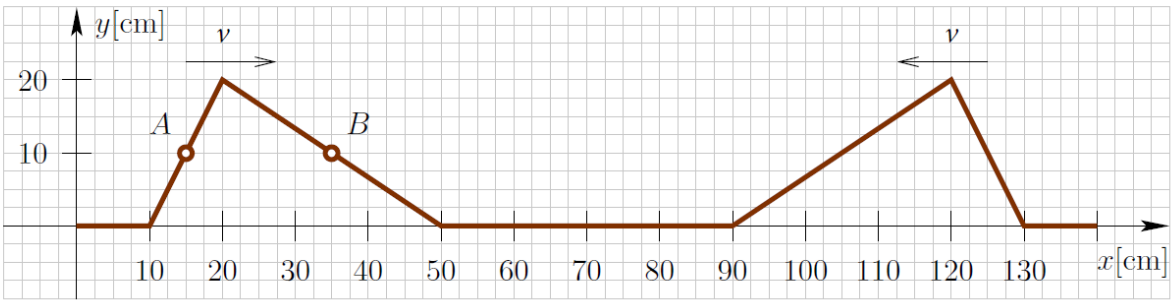
ii) Beschreiben Sie die Orte, welche durch die **blauen** Linien gekennzeichnet sind.

iii) Bestimmen Sie, wie die Anzahl der zwischen den beiden Erregerzentren liegenden roten Linien vom Abstand d der beiden Erregerzentren und von der Wellenlänge λ abhängt.

iv) Begründen Sie, warum es sich bei den roten und blauen Linien (ausser bei der roten Mittelsenkrechten) um Hyperbeln handelt.

Hinweis:
- Schlagen Sie die geometrische Definition einer Hyperbel nach.

11.8 Auf einem Seil nähern sich zwei Pulse mit entgegengesetzt gleichen Geschwindigkeiten v. Die Situation zum Zeitpunkt t_0 = 0s ist in der folgenden Skizze dargestellt:



Die Fronten der Pulse treffen sich zum Zeitpunkt t_1 = 500 ms.

a) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit v der Pulse in x-Richtung.

b) Skizzieren Sie die Situation zum Zeitpunkt t_2 = 750 ms.

11.9 (siehe nächste Seite)

11.9 Betrachten Sie die Überlagerung zweier Sinus-Wellen, welche durch die beiden Funktionen y_1 und y_2 mit den folgenden Funktionsgleichungen beschrieben werden:

$y_1(x,t) = \hat{y} \cdot \sin(kx - \omega t)$ mit $\hat{y} = 0.30$ m, $k = 2.0$ m^{-1}, $\omega = 1.0$ s^{-1}

$y_2(x,t) = \hat{y} \cdot \sin(kx + \omega t)$ mit $\hat{y} = 0.30$ m, $k = 2.0$ m^{-1}, $\omega = 1.0$ s^{-1}

a) Bestimmen Sie die Periodendauer, die Frequenz und die Wellenlänge der beiden Wellen.

b) Begründen Sie schlüssig, dass die erste Welle in die positive und die zweite Welle in die negative x-Richtung läuft.

Hinweise:
- Betrachten Sie jede Einzelwelle zu zwei nahe beieinanderliegenden Zeitpunkten t_1 und t_2 ($t_2 > t_1$).
- Überlegen Sie sich, ob sich für einen Punkt konstanter Phase, z.B. für einen Wellenberg, die x-Koordinate in der Zeitspanne von t_1 bis t_2 vergrössert oder verkleinert.
- Die Phase ist das Argument der Sinusfunktion, d.h. $kx - \omega t$ bzw. $kx + \omega t$.

c) Bilden Sie die Überlagerung der beiden Wellen:

$$y(x,t) := y_1(x,t) + y_2(x,t)$$

Interpretieren Sie das Ergebnis: Begründen Sie, dass es sich bei dieser Überlagerung um eine stehende Welle handelt.

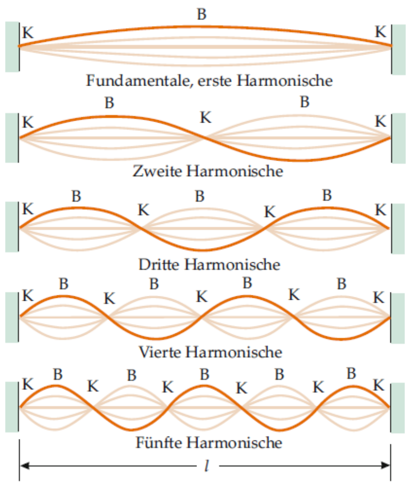
Hinweis:
- Verwenden Sie die folgende trigonometrische Identität:
$\sin(\alpha) + \sin(\beta) \equiv 2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

11.10 Die Wellenlängen bzw. die Frequenzen der Eigenschwingungen auf einem Wellenträger der Länge l seien wie folgt bezeichnet:

	Wellenlänge	**Frequenz**
Grundschwingung	λ_0	f_0
1. Oberschwingung	λ_1	f_1
2. Oberschwingung	λ_2	f_2
3. Oberschwingung	λ_3	f_3
...		
m. Oberschwingung	λ_m	f_m

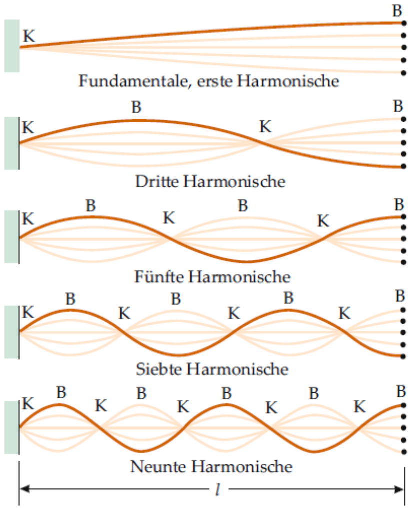
Leiten Sie für die nachfolgend genannten drei Fälle a), b) und c) mit Hilfe der entsprechenden Abbildungen (vgl. Unterricht) eine Beziehung zwischen der Frequenz f_m der m-ten Oberschwingung und der Frequenz f_0 der Grundschwingung her.

a) Der Wellenträger hat zwei feste Enden.



b) Der Wellenträger hat zwei freie Enden.

c) Der Wellenträger hat ein festes und ein freies Ende.



(Quelle: Tipler/Mosca, Physik für Studierende der Naturwissenschaften und Technik, Berlin 2019, Springer Spektrum, 8. Auflage, Seiten 508 und 523)

Vorgehen:

i) Drücken Sie mit Hilfe der entsprechenden Abbildung die Grundwellenlänge λ_0 durch die Länge l des Wellenträgers aus.

ii) Drücken Sie mit Hilfe der entsprechenden Abbildung die Wellenlänge λ_m der m-ten Oberschwingung durch die ganze Zahl m und die Länge l des Wellenträgers aus.

iii) Drücken Sie die Grundfrequenz f_0 durch die Grundwellenlänge λ_0 und die Ausbreitungsgeschwindigkeit v aus.

iv) Drücken Sie die Frequenz f_m der m-ten Oberschwingung durch die Wellenlänge λ_m der m-ten Oberschwingung und die Ausbreitungsgeschwindigkeit v aus.

v) Drücken Sie durch Kombination der Ergebnisse aus i) bis iv) die Frequenz f_m der m-ten Oberschwingung durch die ganze Zahl m und die Grundfrequenz f_0 aus.

vi) Drücken Sie das Ergebnis aus v) in Worten aus.
Welche Frequenzen treten in den Eigenschwingungen (Grundschwingung und Oberschwingungen) im Vergleich zur Grundfrequenz auf?

11.11 Ein 4.00 m langes Seil ist an einem Ende eingespannt, und das andere Ende ist an einer langen, leichten Schnur befestigt, so dass es sich frei bewegen kann (loses Ende). Die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Wellen auf dem Seil beträgt 20.0 m/s.

Bestimmen Sie die Frequenz …

a) … der Grundschwingung.

b) … der zweiten Oberschwingung.

c) … der dritten Oberschwingung.

11.12 (siehe nächste Seite)

11.12 Von einer beidseitig offenen Orgelpfeife kennt man die Frequenzen von drei aufeinanderfolgenden Obertönen:

465.6 Hz 582.0 Hz 698.4 Hz

a) Bestimmen Sie die Grundfrequenz.

Hinweis:
- Überlegen Sie sich, wie die Differenz der Frequenzen aufeinanderfolgender Obertöne mit der Grundfrequenz zusammenhängen.

b) Geben Sie an, den wievielten Obertönen die angegebenen Frequenzen entsprechen.

c) Bestimmen Sie die Länge der Orgelpfeife.

Lösungen

11.1 ...

11.2 a) ...

b) i) Bei der Reflexion am festen Ende gibt es einen Phasensprung von einer halben Wellenlänge: Die Störung wird gespiegelt, d.h. aus einer Auslenkung nach oben wird eine Auslenkung nach unten und umgekehrt.

ii) Bei der Reflexion am freien Ende gibt es keinen Phasensprung:
Die Störung wird nicht gespiegelt, d.h. sie läuft so zurück, wie sie ohne Reflexion weiterlaufen würde.

11.3 ...

11.4 ...

11.5 a) ...

b) i) ...

ii) Die Frequenzen sind ungerade ganzzahlige Vielfache einer Grundfrequenz.

iii) $v \approx 300$ m/s

11.6 …

11.7 a) i) Bei der Reflexion am festen Ende gibt es einen Phasensprung von einer halben Wellenlänge: Die Welle wird gespiegelt, d.h. aus einer Auslenkung nach oben wird eine Auslenkung nach unten und umgekehrt.

Bei der Reflexion am losen Ende gibt es keinen Phasensprung:
Die Welle wird nicht gespiegelt, d.h. sie läuft so zurück, wie sie ohne Reflexion weiterlaufen würde.

ii) ...

ii) festes Ende: Schwingungsknoten
freies Ende: Schwingungsbauch

b) i) ...

ii) geschlossenes Ende: Knoten für die Auslenkung y
Bauch für die Druckdifferenz Δp

offenes Ende: Bauch für die Auslenkung y
Knoten für die Druckdifferenz Δp

c) i) Orte
- mit einem Gangunterschied (Differenz der Distanzen zu den beiden Erregerzentren) $\Delta s = m \cdot \lambda$ ($m \in \mathbb{Z}$)
- konstruktiver Interferenz
- wo sich die Wellenberge bzw. die Wellentäler der beiden Kreiswellen gleichzeitig treffen

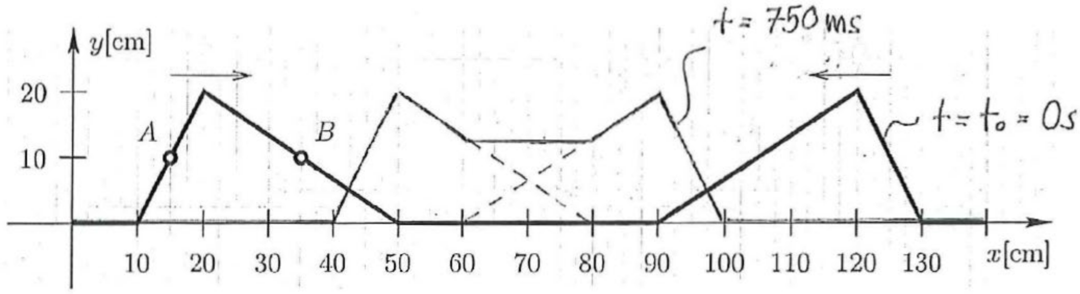
ii) Orte
- mit einem Gangunterschied $\Delta s = \lambda/2 + m \cdot \lambda$ ($m \in \mathbb{Z}$)
- destruktiver Interferenz
- wo sich jeweils ein Wellenberg der einen Kreiswelle mit einem Wellental der anderen Kreiswelle trifft

iii) $d \leq \lambda \Rightarrow$ 1 rote Linie
$\lambda < d \leq 2\lambda \Rightarrow$ 3 rote Linien
$2\lambda < d \leq 3\lambda \Rightarrow$ 5 rote Linien
usw.

iv) ...

11.8 a) Die Fronten legen in der Zeitspanne $\Delta t = 500$ ms die Strecke $\Delta x = 20$ cm zurück.
$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 40$ cm/s

b)



11.9 a) $T = 2\pi$ s, $f = \frac{1}{2\pi}$ s^{-1}, $\lambda = \pi$ m

b) Erste Welle: Wenn t grösser wird, bleibt die Phase kx - ωt konstant, wenn auch x **grösser** wird. Ein Punkt gleicher Phase, z.B. ein Wellenberg, bewegt sich also in die positive x-Richtung. Die ganze Welle läuft daher in die **positive** x-Richtung.

Zweite Welle: Wenn t grösser wird, bleibt die Phase kx + ωt konstant, wenn x **kleiner** wird. Ein Punkt gleicher Phase, z.B. ein Wellenberg, bewegt sich also in die negative x-Richtung. Die ganze Welle läuft daher in die **negative** x-Richtung.

c) $y(x,t) = 2\,\hat{y}\,\sin(kx)\cos(\omega t)$

Die Variablen x und t sind voneinander „getrennt“: Die Variable x steht nur im Argument der Sinus-Funktion, die Variable t nur im Argument der Cosinus-Funktion.

11.10 a) i) $\lambda_0 = 2l$

ii) $\lambda_m = \frac{2}{m+1}\,l$

iii) $f_0 = \frac{v}{\lambda_0}$

iv) $f_m = \frac{v}{\lambda_m}$

v) $f_m = (m+1)\,f_0$

vi) In den Eigenschwingungen (Grundschwingung und Oberschwingungen) treten als Frequenzen alle ganzzahligen Vielfachen der Grundfrequenz auf:
$f_0, 2 \cdot f_0, 3 \cdot f_0, ...$

b) wie bei a)

c) i) $\lambda_0 = 4l$

ii) $\lambda_m = \frac{4}{2m+1}\,l$

iii) $f_0 = \frac{v}{\lambda_0}$

iv) $f_m = \frac{v}{\lambda_m}$

v) $f_m = (2m + 1)\, f_0$

vi) In den Eigenschwingungen (Grundschwingung und Oberschwingungen) treten als Frequenzen nur die ungeraden ganzzahligen Vielfachen der Grundfrequenz auf:
f_0, $3 \cdot f_0$, $5 \cdot f_0$, ...

11.11 a) $l = \frac{\lambda_0}{4}$
$v = \lambda_0 \cdot f_0$

$\Rightarrow \quad f_0 = \frac{v}{4l} = 1.25$ Hz

b) $f_2 = 5 \cdot f_0 = 6.25$ Hz

c) $f_3 = 7 \cdot f_0 = 8.75$ Hz

11.12 a) $f_0 = \Delta f = 116.4$ Hz

b) $465.6 \text{ Hz} = 4 \cdot 116.4 \text{ Hz} = 4 \cdot f_0 \;\hat{=}\; 3.$ OS
$582.0 \text{ Hz} = 5 \cdot 116.4 \text{ Hz} = 5 \cdot f_0 \;\hat{=}\; 4.$ OS
$698.4 \text{ Hz} = 6 \cdot 116.4 \text{ Hz} = 6 \cdot f_0 \;\hat{=}\; 5.$ OS

c) $l = \frac{\lambda_0}{2}$
$v = \lambda_0 \cdot f_0$

$\Rightarrow \quad l = \frac{v}{2 \cdot f_0} = 1.48$ m