Aufgaben 9 Schwingungen
Erzwungene Schwingung, Resonanz

Lernziele

- sich aus dem Studium eines schriftlichen Dokumentes neue Kenntnisse und Fähigkeiten erarbeiten können.
- verstehen, was eine erzwungene Schwingung ist.
- wissen und verstehen, was die Eigenfrequenz eines Schwingers, ein Erreger und die Erregerfrequenz sind.
- wissen und verstehen, dass bei einer erzwungenen Schwingung die im zeitlichen Mittel vom Erreger zum Schwinger fliessende Energie im Dämpfer dissipiert wird.
- wissen, von welchen Grössen die Energie abhängt, die bei einer erzwungenen Schwingung im Dämpfer im zeitlichen Mittel dissipiert wird.
- wissen, dass eine erzwungene Schwingung einen Einschwingvorgang durchläuft.
- aus einem grafisch dargestellten zeitlichen Verlauf einer Schwingungsgrösse den Einschwingvorgang und die stationäre Phase einer erzwungenen Schwingung erkennen können.
- wissen, dass bei einer sinusförmig angeregten erzwungenen Schwingung die Frequenz in der stationären Phase gleich gross ist wie die Erregerfrequenz.
- das mathematische Modell zur Beschreibung einer erzwungenen mechanischen Schwingung kennen und verstehen.
- das Phänomen Resonanz kennen und verstehen.
- wissen und verstehen, was eine Resonanzkurve ist.
- den qualitativen Verlauf einer Resonanzkurve kennen und verstehen.
- wissen und verstehen, dass bei Resonanz der zeitlich gemittelte Energiestrom vom Erreger zum Schwinger maximal ist.
- wissen und verstehen, von welchen Grössen die Resonanzfrequenz abhängt.
- aus einem Experiment neue Erkenntnisse gewinnen können.

Aufgaben

9.1 Studieren Sie im Buch KPK 3 die folgenden Abschnitte:
- 2.1 Was ist Resonanz? (Seite 14)
- 2.2 Resonanz eines mechanischen Schwingers (Seite 15)
- 2.3 Wie man eine Resonanzkurve aufnimmt (Seite 16)

9.2 Studieren Sie die folgenden **YouTube-Videos**:
- Federpendel
- Mechanik-Experiment: Erzwungene Schwingung, Resonanz

9.3 **Experiment Posten 1: Fadenpendel, Federschwinger**

a) Führen Sie das im Buch KPK 3 im Abschnitt 2.1 auf der Seite 21 beschriebene Experiment mit dem vorliegenden **Fadenpendel** (Holzklotz an einer Schnur) durch.

b) Führen Sie das zu a) analoge Experiment mit dem **Federschwinger** durch.

Beobachten und beschreiben Sie jeweils, ...

i) ... wie sich die erzwungene Schwingung des Pendelkörpers aufbaut.

ii) ... mit welcher Frequenz das Pendel schlussendlich schwingt.

iii) ... bei welcher Frequenz die erzwungene Schwingung besonders heftig ist.

Alternative zu den Experimenten
YouTube-Videos in Aufgabe 9.2

9.4 **Experiment Posten 2: Drehpendel**

Mit Hilfe eines Motors kann das äussere Ende der Spiralfeder in eine Hin- und Her-Bewegung versetzt werden. Das Drehpendel führt dann eine erzwungene Drehschwingung aus.

Regen Sie das Drehpendel zu erzwungenen Drehschwingungen an.

a) Beobachten und beschreiben Sie, ...

i) ... wie sich die erzwungene Drehschwingung aufbaut.

ii) ... mit welcher Frequenz das Drehpendel schlussendlich schwingt.

b) Versuchen Sie für eine nicht allzu starke Dämpfung, das Drehpendel in Resonanz zu bringen.

Alternative zum Experiment
YouTube-Videos in Aufgabe 9.2

9.5 Betrachten Sie die erzwungene Schwingung eines Federschwingers (Lehrbuch KPK 3, Abb. 2.3, Seite 15).

Das Koordinatensystem soll wie folgt festgelegt werden:
- Die Schwingung soll in x-Richtung erfolgen.
- Die positive x-Richtung soll nach rechts zeigen.
- Die Ruhelage soll bei $x = 0$ liegen.

Am Schwingkörper greifen zwei Kräfte an, die Federkraft $\vec{F}_F$ (Kraft, die die Feder ausübt) und die Dämpfungskraft $\vec{F}_D$ (Kraft, die der Dämpfer ausübt) (siehe Unterricht).

a) Formulieren Sie für den Schwingkörper das Aktionsprinzip in allgemeiner vektorieller Form.

b) Formulieren Sie für den Schwingkörper die skalare x-Komponente des Aktionsprinzips.

Die drei Grössen in der in b) formulierten Gleichung hängen vom Ort x, der Geschwindigkeit v, der Beschleunigung a des Schwingkörpers sowie vom Ort x_E des Erregers ab. x, v, a und x_E sind dabei jeweils die skalaren x-Komponenten der entsprechenden Vektoren.

c) Geben Sie an, wie die drei Grössen von x, v, a und x_E abhängen, und setzen Sie die Ausdrücke in das Ergebnis von b) ein.

Unter der Annahme, dass der zeitliche Verlauf der Erreger-Auslenkung x_E sinus-förmig ist, d.h.

$$x_E = x_E(t) = \hat{x}_E \sin(\omega_E t)$$

lautet der zeitliche Verlauf der Auslenkung x bei schwacher Dämpfung wie folgt (siehe Unterricht):

$$x = x(t) = C_1 e^{-\delta t} \sin(\omega_d t + C_2) + \hat{x} \sin(\omega_E t + \varphi)$$

wobei: $\delta := \frac{k}{2m}$

$$\omega_0 := \sqrt{\frac{D}{m}}$$

$$\omega_d := \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad (\delta < \omega_0\text{, schwache Dämpfung})$$

Im eingeschwungenen bzw. stationären Zustand, d.h. für $t \to \infty$, gilt:

$$x = x(t) = \hat{x} \sin(\omega_E t + \varphi)$$

Dabei gilt für die Amplitude $\hat{x}$:

$$\hat{x} = \hat{x}(\omega_E) = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega_E^2\right)^2 + 4\delta^2\omega_E^2}}\,\hat{x}_E$$

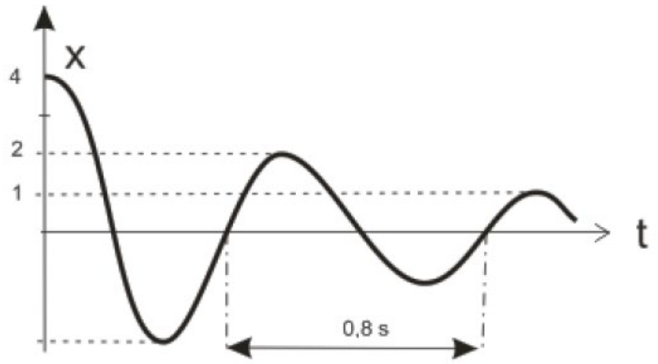
d) Überprüfen Sie, dass im eingeschwungenen Zustand die Ortsamplitude $\hat{x}$ maximal ist für

$$\omega_E = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$$

Hinweise: (siehe nächste Seite)

Hinweise:
- Es genügt zu zeigen, dass der Ausdruck unter der Wurzel minimal ist.
- Der Ausdruck unter der Wurzel ist eine quadratische Funktion in $z := \omega_E^2$.
- Das Maximum bzw. Minimum einer quadratischen Funktion liegt an der Stelle des Scheitelpunktes des Funktionsgrafen.

9.6 Erfährt ein schwingungsfähiges Bauteil (z.B. ein Balken) einen Schlag, führt es eine gedämpfte Schwingung aus. Der zeitliche Verlauf des Ausschlags x sieht wie folgt aus:



Die in der Grafik angegebenen Grössen sollen auf zwei signifikante Stellen genau angenommen werden, also 0.8 = 0.80, 1 = 1.0, 2 = 2.0, 4 = 4.0.

a) Bestimmen Sie ...

i) ... die Kreisfrequenz ω_d der gedämpften Schwingung.

ii) ... die Dämpfungskontante δ.

Hinweis:
- Die Zeitpunkte, zu welchen der Sinusterm $\sin(\omega_d t + ...)$ im Ausdruck $x(t) = ...$ (siehe Unterricht) jeweils den Wert 1 annimmt, liegen 0.8 s auseinander.

Wird das Bauteil von aussen mit der Frequenz ω_E angeregt, ergibt sich eine erzwungene Schwingung.

b) Bestimmen Sie die Frequenz ω_E, bei welcher ...

i) ... die Geschwindigkeitsamplitude $\hat{v}$ der erzwungenen Schwingung maximal ist.

ii) ... die Ortsamplitude $\hat{x}$ der erzwungenen Schwingung maximal ist.

Lösungen

9.1 ...

9.2 ...

9.3 ...

9.4 ...

9.5 a) $\vec{F}_F + \vec{F}_D = \dot{\vec{p}}$

b) $\vec{F}_F = \begin{pmatrix} F_F \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{F}_D = \begin{pmatrix} F_D \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \dot{\vec{p}} = \begin{pmatrix} \dot{p} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow F_F + F_D = \dot{p}$

c) $F_F = - D\cdot(x - x_E)$ $\quad F_D = - k\cdot v$ $\quad \dot{p} = m\cdot a$

$\Rightarrow - D\cdot(x - x_E) - k\cdot v = m\cdot a$

d) ...

9.6 a) i) $\omega_d = \frac{2\pi}{T_d} = \frac{2\pi}{0.80\text{ s}} = 7.9\text{ s}^{-1}$

ii) $\frac{e^{-\delta(t+T_d)}}{e^{-\delta t}} = e^{-\delta T_d} = 0.50$

$\Rightarrow \delta = -\frac{\ln(0.50)}{T_d} = -\frac{\ln(0.50)}{0.80\text{ s}} = 0.87\text{ s}^{-1}$

b) i) $\omega_E = \omega_0$

$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

$\Rightarrow \omega_E = \sqrt{\omega_d^2 + \delta^2} = \ldots$ (Zahlenwerte aus a)) $= 7.9\text{ s}^{-1}$

ii) $\omega_E = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$

$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

$\Rightarrow \omega_E = \sqrt{\omega_d^2 - \delta^2} = \ldots$ (Zahlenwerte aus a)) $= 7.8\text{ s}^{-1}$