Aufgaben 4 Mechanik
Drehimpuls, Drehimpulsstrom, Drehmoment

Lernziele

- den Drehimpuls bzw. Drehschwung als mengenartige Grundgrösse der Rotations-Mechanik verstehen.
- die Analogie zwischen Impuls und Drehimpuls sowie zwischen Geschwindigkeit und Winkelgeschwindigkeit kennen und verstehen.
- wissen, dass Drehimpuls in einem Körper gespeichert werden kann.
- verstehen, dass in einem Körper Drehimpuls gespeichert sein muss, damit er sich drehen kann.
- wissen, dass Drehimpuls in einen Körper hinein oder aus ihm heraus fliessen kann.
- wissen, dass Drehimpuls weder erzeugt noch vernichtet werden kann.
- verstehen, was ein Drehimpulsstrom ist.
- wissen und verstehen, dass sich die Wirkung einer Kraft nicht ändert, wenn man die Kraft auf ihrer Wirkungslinie verschiebt.
- wissen, wie die Wirkung einer Kraft von der Lage der Wirkungslinie und dem Betrag der Kraft abhängt.
- das Drehmoment einer Kraft bestimmen können.
- die Wirkung von Kräften beurteilen können, die an einem starren Körper angreifen.
- eine neue Problemstellung selbstständig bearbeiten und in einer Gruppe diskutieren können.

Aufgaben

4.1 Studieren Sie im Lehrbuch KPK 4 die folgenden Abschnitte:
- Einleitung zum Kapitel 3 Drehimpuls und Drehimpulsströme (Seite 32)
- 3.1 Der Drehimpuls (Seite 33)
- 3.2 Drehimpulspumpen (Seite 34)
- 3.5 Stromstärke und Änderungsrate des Drehimpulses (Seite 37, ohne Aufgaben)

4.2 **Experimente Posten 1: Drehstuhl**

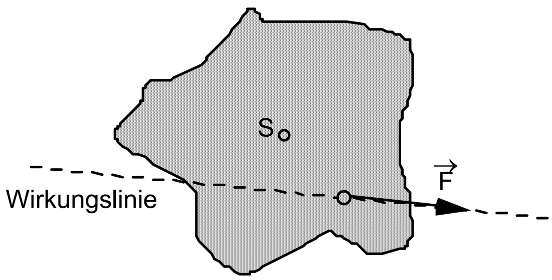
Sie haben im Selbststudium einen Text zu Drehimpuls und Drehimpulsströmen studiert (vgl. Aufgabe 4.1).

Führen Sie mit dem Drehstuhl und dem Rad die Experimente durch, die auf der Seite 34 und in den Abbildungen 3.8 und 3.9 (Abschnitt 3.2 Drehimpulspumpen) beschrieben sind.

Alternative zu den Experimenten
- Die Experimente werden im Unterricht vorgeführt.

4.3 **Experimente Posten 2: Scheibe und Stab**

An einem starren Körper greift eine **Kraft $\vec{F}$** an. Der Kraft $\vec{F}$ wird eine **Wirkungslinie** zugeordnet:



An der Wandtafel hängen zwei Modelle von starren Körpern, eine Scheibe und ein Stab. Die beiden Körper sind so an der Wandtafel montiert, dass deren Schwerpunkte fest mit der Wandtafel verbunden sind. Der einzelne Körper kann sich also nur um eine Drehachse drehen, die durch seinen Schwerpunkt läuft.

Man kann eine am Körper angreifende Kraft bewerkstelligen, indem man am Körper ein Gewichtsstück in einem bestimmten Abstand vom Schwerpunkt anhängt.

(Fortsetzung siehe nächste Seite)

a) Betrachten Sie die **Scheibe**.

i) Hängen Sie an der Scheibe zwei Gewichtsstücke an, so dass die Scheibe im Gleichgewicht ist.

ii) Verschieben Sie nun das eine Gewichtsstück so, dass die angreifende Kraft lediglich entlang ihrer Wirkungslinie verschoben wird.

iii) Stellen Sie fest, dass die Scheibe dabei im Gleichgewicht bleibt.

iv) Überlegen Sie sich mit Hilfe der Feststellung iii), dass sich die Wirkung einer angreifenden Kraft nicht ändert, wenn man die Kraft auf ihrer Wirkungslinie verschiebt.

b) Betrachten Sie den **Stab**.

i) Hängen Sie am Stab zwei Gewichtsstücke an, so dass der Stab im Gleichgewicht ist.

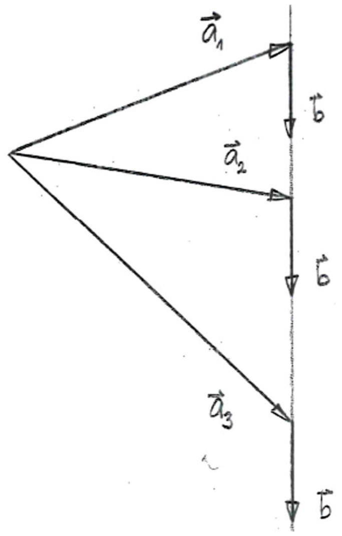
ii) Ersetzen Sie nun das eine Gewichtsstück so, dass der Stab weiterhin im Gleichgewicht bleibt.

Hinweise:
- Der Abstand der Wirkungslinie der angreifenden Kraft kann verändert werden, indem das Gewichtsstück weniger oder weiter von der Drehachse entfernt angehängt wird.
- Der Betrag der angreifenden Kraft kann verändert werden, indem man ein leichteres oder schwereres Gewichtsstück anhängt.

iii) Damit der Stab im Gleichgewicht bleibt, müssen die beiden folgenden Grössen eine bestimmte Beziehung erfüllen:
- Abstand der Wirkungslinie der angreifenden Kraft von der Drehachse
- Betrag der angreifenden Kraft
Finden Sie diese Beziehung mit Hilfe der Experimente unter ii).

Alternative zu den Experimenten
- Die Experimente werden im Unterricht vorgeführt.

4.4 Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ und $\vec{b}$:

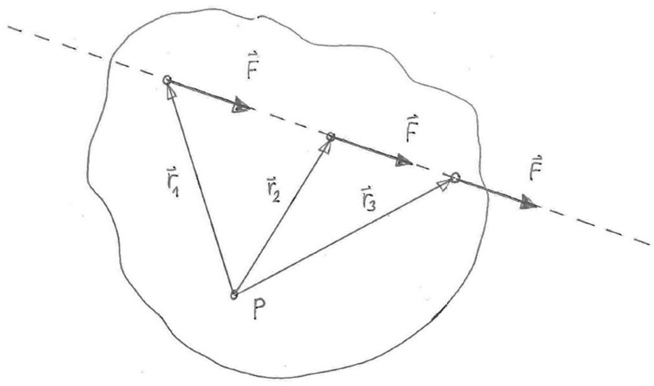


Erklären Sie, dass die drei Vektorprodukte $\vec{a}_1 \times \vec{b}$, $\vec{a}_2 \times \vec{b}$ und $\vec{a}_3 \times \vec{b}$ gleich sind, d.h. $\vec{a}_1 \times \vec{b} = \vec{a}_2 \times \vec{b} = \vec{a}_3 \times \vec{b}$.

Hinweis:
- Überlegen Sie sich, wie die Richtung und der Betrag des Vektorproduktes zweier Vektoren definiert sind.

4.5 (siehe nächste Seite)

4.5 Der Angriffspunkt einer an einem Körper angreifenden Kraft $\vec{F}$ wird entlang ihrer Wirkungslinie verschoben:

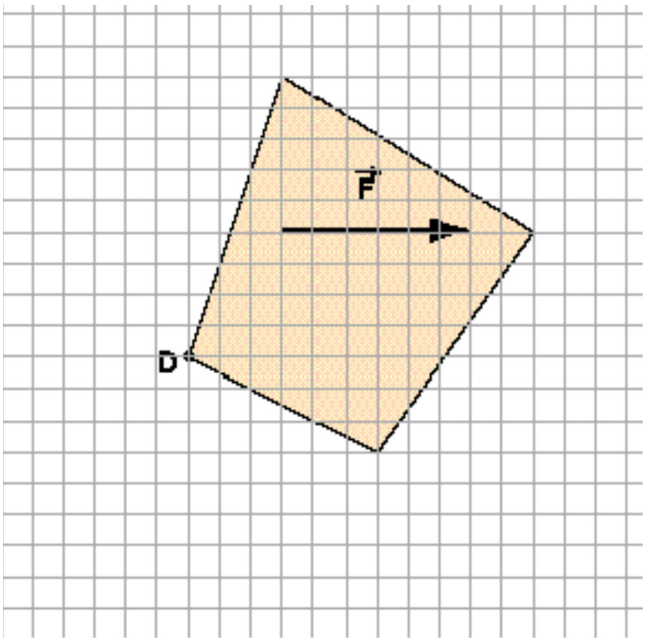


Zeigen Sie, dass sich das Drehmoment der Kraft $\vec{F}$ bezüglich eines Punktes P nicht verändert, wenn man den Angriffspunkt der Kraft $\vec{F}$ entlang ihrer Wirkungslinie verschiebt.

Erklären Sie also, dass alle drei Drehmomente $\vec{M}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}$, $\vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}$ und $\vec{M}_3 = \vec{r}_3 \times \vec{F}$ bezüglich des Punktes P die gleichen Richtungen und Beträge besitzen.

Hinweis:
- Verwenden Sie die Erkenntnisse aus der Aufgabe 4.4.

4.6 Eine Kraft $\vec{F}$ mit dem Betrag 60 N wirkt auf einen Körper, welcher um eine Achse senkrecht durch den Punkt D drehbar ist:



Für die Abmessungen des Körpers gilt, dass ein gezeichnetes Häuschen die Länge 10 cm hat.

a) Bestimmen Sie das Drehmoment $\vec{M}$ der Kraft $\vec{F}$ bezüglich des Punktes D.
Geben Sie sowohl die Richtung als auch den Betrag des Vektors $\vec{M}$ an.

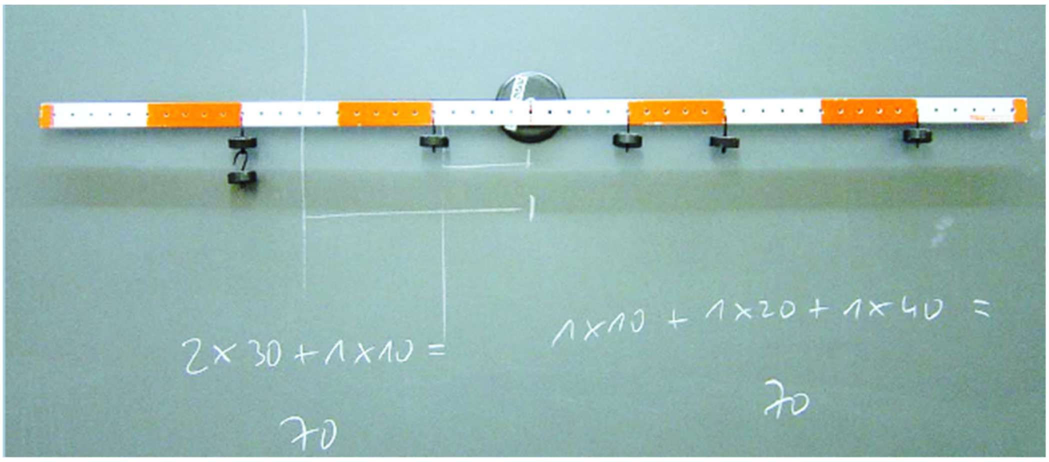
b) Bestimmen Sie die Drehmomente der Kraft $\vec{F}$ bezüglich der anderen drei Eckpunkte des Körpers.
Geben Sie auch wieder jeweils die Richtungen und Beträge der Drehmomente an.

c) Ersetzen Sie die Kraft $\vec{F}$ durch eine Kraft $\vec{F}'$, dessen Drehmoment $\vec{M}'$ bezüglich des Punktes D gleich dem Drehmoment $\vec{M}$ der ursprünglichen Kraft $\vec{F}$ ist.

i) Die Kraft $\vec{F}'$ soll den gleichen Betrag besitzen wie die Kraft $\vec{F}$, jedoch vertikal gerichtet sein.

ii) Die Kraft $\vec{F}'$ soll den doppelten Betrag besitzen wie die Kraft $\vec{F}$ und zu $\vec{F}$ entgegengesetzt gerichtet sein.

4.7 Ein Hebel ist an einer Wand montiert. An ihm greifen mehrere Kräfte an (vgl. Experiment in der Aufgabe 4.3 b)):



a) Bestimmen Sie die Drehmomente (Richtungen und Beträge) aller Kräfte bezüglich des Aufhängepunktes.

b) Bestimmen Sie die vektorielle Summe aller Drehmomente, wenn vorausgesetzt wird, dass sich der Hebel im Gleichgewicht befindet.

Hinweise:
- Die Farbsegmente (rot-weiss-rot-...) am Hebel haben je eine Länge von 10 cm.
- Die am Hebel angehängten Gewichtsstücke haben je eine Masse von 50 g.

4.8 Ein Radfahrer übt auf ein Pedal der Hebellänge $r = 20$ cm eine Kraft mit dem Betrag $F = 500$ N aus.

Bestimmen Sie den Betrag des Drehmomentes bezüglich des Befestigungspunktes des Pedalhebels an der Tretlagerachse in Abhängigkeit des Winkels φ zwischen der Richtung des Pedalhebels und der Wirkungslinie der Kraft:

a) $\varphi = 0°$

b) $\varphi = 45°$

c) $\varphi = 90°$

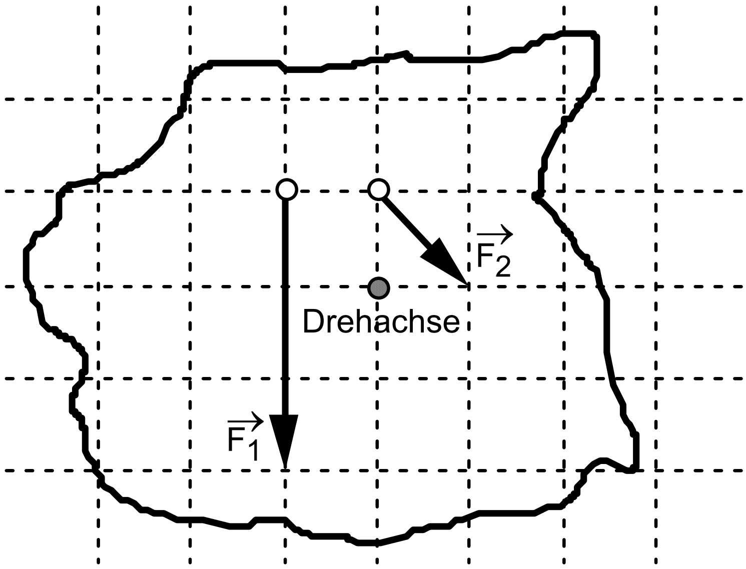
d) $\varphi = 180°$

4.9 Gegeben ist ein starrer Körper. Er ist an einer festen Drehachse montiert, die durch den Schwerpunkt des Körpers verläuft und senkrecht zur Blattebene steht.

Am ruhenden, starren Körper greifen die Gewichtskraft und eine Lagerkraft an, die die Gewichtskraft kompensiert. Diese beiden Kräfte sind für die folgenden Betrachtungen bedeutungslos.

Betrachten Sie die beiden weiteren, am Körper angreifenden Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$, deren Wirkungslinien in der Blattebene liegen:

(Fortsetzung siehe nächste Seite)

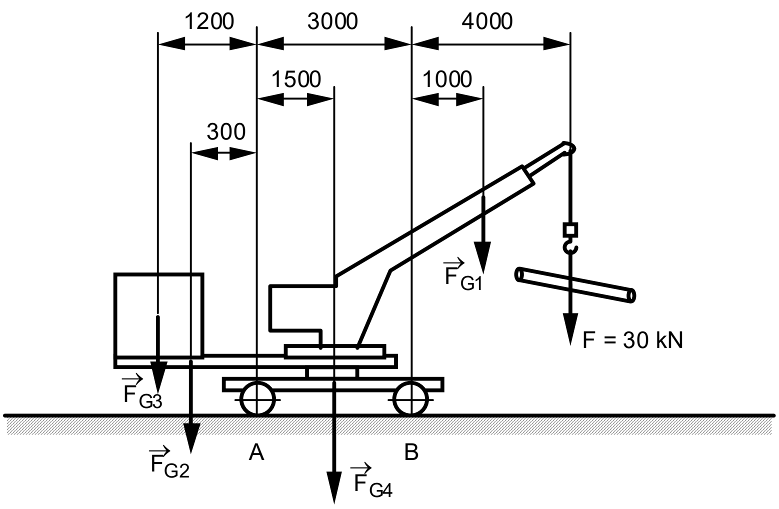


a) **Ersetzen** Sie die beiden Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ durch eine einzige angreifende Kraft $\vec{F}_3$.
$\vec{F}_3$ soll auf den Körper dieselbe Wirkung haben wie die beiden Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ zusammen.
Machen Sie **zwei** Vorschläge für die Kraft $\vec{F}_3$.
Zeichnen Sie dazu Ihre zwei Vorschläge für $\vec{F}_3$ mit korrektem Angriffspunkt, korrekter Richtung und massstabsgetreuem Betrag in die Grafik ein.

b) Bestimmen Sie die Richtung, in welche sich der Körper aufgrund der angreifenden Kräfte zu drehen beginnt.

c) **Ergänzen** Sie die beiden Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ durch eine dritte angreifende Kraft $\vec{F}_3$, so dass sich der starre Körper im Gleichgewicht befindet.
Machen Sie **zwei** Vorschläge für die Kraft $\vec{F}_3$.
Zeichnen Sie dazu Ihre zwei Vorschläge für $\vec{F}_3$ mit korrektem Angriffspunkt, korrekter Richtung und massstabsgetreuem Betrag in die Grafik ein.

4.10 Betrachten Sie den folgenden fahrbaren Drehkran:



Der Kran hält eine Last vom Betrag F = 30 kN. Die auf den Kran wirkende Gewichtskraft kann in Teil-Gewichtskräfte aufgeteilt werden. Sie betragen $F_{G1} = 10$ kN, $F_{G2} = 8.0$ kN, $F_{G3} = 16$ kN, $F_{G4} = 20$ kN.
Die Längen sind in der Zeichnung in Millimeter (Fehler ± 1 cm) angegeben.

Beurteilen Sie, ob der Kran sicher steht, oder ob er nach vorne oder nach hinten kippt.

Hinweise: (siehe nächste Seite)

Hinweise:
- Betrachten Sie die Drehmomente der Last F sowie der einzelnen Gewichtskräfte bzgl. der Auflagepunkte A und B der Räder am Boden.
- Hier soll also das allfällige Kippen nach vorne bzw. hinten als reine Rotationsbewegung um eine Drehachse um B bzw. A betrachtet werden.
- Da für das statische Gleichgewicht eines starren Körpers die Summe aller Drehmomente bzgl. irgend eines Punktes der Nullvektor sein muss (ohne Beweis), ist es hier einfacher, die Drehmomente bzgl. A und B zu betrachten als bzgl. des Schwerpunktes.

4.11 Die acht Eckpunkte P_1 bis P_8 eines Würfels haben die folgenden Koordinaten:

P_1 (1.00 m | - 1.00 m | - 1.00 m) P_2 (1.00 m | 1.00 m | - 1.00 m)

P_3 (- 1.00 m | 1.00 m | - 1.00 m) P_4 (-1.00 m | -1.00 m | -1.00 m)

P_5 (1.00 m | - 1.00 m | 1.00 m) P_6 (1.00 m | 1.00 m | 1.00 m)

P_7 (- 1.00 m | 1.00 m | 1.00 m) P_8 (- 1.00 m | - 1.00 m | 1.00 m)

Am Würfel greifen die folgenden vier Kräfte an:

$$\vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 20.0\ \text{N} \\ 0\ \text{N} \\ 0\ \text{N} \end{pmatrix} \qquad \text{am Eckpunkt } P_2$$

$$\vec{F}_5 = \begin{pmatrix} -\ 10.0\ \text{N} \\ 10.0\ \text{N} \\ 10.0\ \text{N} \end{pmatrix} \qquad \text{am Eckpunkt } P_5$$

$$\vec{F}_6 = \begin{pmatrix} 0\ \text{N} \\ 0\ \text{N} \\ 10.0\ \text{N} \end{pmatrix} \qquad \text{am Eckpunkt } P_6$$

$$\vec{F}_7 = \begin{pmatrix} 0\ \text{N} \\ 20.0\ \text{N} \\ 10.0\ \text{N} \end{pmatrix} \qquad \text{am Eckpunkt } P_7$$

a) Skizzieren Sie das Koordinatensystem, den Würfel und die angreifenden Kräfte.

b) Bestimmen Sie die Beträge der vier Kräfte.

c) Bestimmen Sie die einzelnen Drehmomente aller vier Kräfte bezüglich des Koordinatenursprungs.

d) Bestimmen Sie die Beträge aller Drehmomente.

e) Bestimmen Sie das resultierende Drehmoment.

f) Bestimmen Sie den Betrag des resultierenden Drehmoments.

Lösungen

4.1 ...

4.2 ...

4.3 a) ...

b) Das Produkt der beiden Grössen muss konstant bleiben.

4.4 ...

4.5 ...

4.6 a) Drehmoment $\vec{M}$ bzgl. Punkt D
Richtung von $\vec{M}$: nach hinten, d.h. senkrecht in die Zeichenebene hinein
Betrag von $\vec{M}$: $M = r_\perp \cdot F = 40\text{ cm} \cdot 60\text{ N} = 0.40\text{ m} \cdot 60\text{ N} = 24\text{ Nm}$

b) Drehmoment $\vec{M}$ bzgl. Eckpunkt oben
Richtung von $\vec{M}$: nach vorne, d.h. senkrecht aus der Zeichenebene heraus
Betrag von $\vec{M}$: $M = r_\perp \cdot F = 50\text{ cm} \cdot 60\text{ N} = 0.50\text{ m} \cdot 60\text{ N} = 30\text{ Nm}$

Drehmoment $\vec{M}$ bzgl. Eckpunkt unten
Richtung von $\vec{M}$: nach hinten, d.h. senkrecht in die Zeichenebene hinein
Betrag von $\vec{M}$: $M = r_\perp \cdot F = 70\text{ cm} \cdot 60\text{ N} = 0.70\text{ m} \cdot 60\text{ N} = 42\text{ Nm}$

Drehmoment $\vec{M}$ bzgl. Eckpunkt rechts
Richtung von $\vec{M}$: unbestimmt, da $\vec{M} = \vec{0}$
Betrag von $\vec{M}$: $M = r_\perp \cdot F = 0\text{ cm} \cdot 60\text{ N} = 0\text{ m} \cdot 60\text{ N} = 0\text{ Nm}$

c) i) ...

ii) ...

4.7 a) Drehmomente der Kräfte von links nach rechts:

$\vec{M}_1$: Richtung: nach vorne, d.h. senkrecht aus der Wandebene heraus
Betrag: $M_1 = 30\text{ cm} \cdot (2 \cdot 0.50\text{ N}) = 0.30\text{ m} \cdot 1.0\text{ N} = 0.30\text{ Nm}$

$\vec{M}_2$: Richtung: nach vorne, d.h. senkrecht aus der Wandebene heraus
Betrag: $M_2 = 10\text{ cm} \cdot 0.50\text{ N} = 0.10\text{ m} \cdot 0.50\text{ N} = 0.050\text{ Nm}$

$\vec{M}_3$: Richtung: nach hinten, d.h. senkrecht in die Wandebene hinein
Betrag: $M_3 = 10\text{ cm} \cdot 0.50\text{ N} = 0.10\text{ m} \cdot 0.50\text{ N} = 0.050\text{ Nm}$

$\vec{M}_4$: Richtung: nach hinten, d.h. senkrecht in die Wandebene hinein
Betrag: $M_4 = 20\text{ cm} \cdot 0.50\text{ N} = 0.20\text{ m} \cdot 0.50\text{ N} = 0.10\text{ Nm}$

$\vec{M}_5$: Richtung: nach hinten, d.h. senkrecht in die Wandebene hinein
Betrag: $M_5 = 40\text{ cm} \cdot 0.50\text{ N} = 0.40\text{ m} \cdot 0.50\text{ N} = 0.20\text{ Nm}$

b) $\vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \vec{M}_4 + \vec{M}_5 = \vec{0}$

4.8 a) $M = 0\text{ Nm}$

b) $M = 71\text{ Nm}$

(Fortsetzung siehe nächste Seite)

c) $M = 0.10$ kNm

d) $M = 0$ Nm

4.9 a) ...

b) Drehrichtung im Gegenuhrzeigersinn

c) ...

4.10 Drehmoment bezüglich **A**

Betrag des resultierenden Drehmomentes der Kräfte mit Wirkungslinien **rechts** von A:

$$M_{AR} = r_{A4} \cdot F_{G4} + r_{A1} \cdot F_{G1} + r_A \cdot F = 1.50\text{ m} \cdot 20\text{ kN} + 4.00\text{ m} \cdot 10\text{ kN} + 7.00\text{ m} \cdot 30\text{ kN} = 2.8 \cdot 10^5\text{ Nm}$$

Betrag des resultierenden Drehmomentes der Kräfte mit Wirkungslinien **links** von A:

$$M_{AL} = r_{A2} \cdot F_{G2} + r_{A3} \cdot F_{G3} = 0.30\text{ m} \cdot 8.0\text{ kN} + 1.20\text{ m} \cdot 16\text{ kN} = 2.2 \cdot 10^4\text{ Nm}$$

$M_{AR} > M_{AL}$ $\Rightarrow$ Der Kran **kippt nicht** nach **hinten**.

Drehmoment bezüglich **B**

Betrag des resultierenden Drehmomentes der Kräfte mit Wirkungslinien **rechts** von B:

$$M_{BR} = r_{B1} \cdot F_{G1} + r_B \cdot F = 1.00\text{ m} \cdot 10\text{ kN} + 4.00\text{ m} \cdot 30\text{ kN} = 1.3 \cdot 10^5\text{ Nm}$$

Betrag des resultierenden Drehmomentes der Kräfte mit Wirkungslinien **links** von B:

$$M_{BL} = r_{B4} \cdot F_{G4} + r_{B2} \cdot F_{G2} + r_{B3} \cdot F_{G3} = 1.50\text{ m} \cdot 20\text{ kN} + 3.30\text{ m} \cdot 8.0\text{ kN} + 4.20\text{ m} \cdot 16\text{ kN} = 1.2 \cdot 10^5\text{ Nm}$$

$M_{BR} > M_{BL}$ $\Rightarrow$ Der Kran **kippt** nach **vorne**.

4.11 a) ...

b) $|\vec{F}_2| = 20.0$ N $\quad |\vec{F}_5| = 17.3$ N $\quad |\vec{F}_6| = 10.0$ N $\quad |\vec{F}_7| = 22.4$ N

c)
$$\vec{M}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 1.00\text{ m} \\ 1.00\text{ m} \\ -1.00\text{ m} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 20.0\text{ N} \\ 0\text{ N} \\ 0\text{ N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\text{ Nm} \\ -20.0\text{ Nm} \\ -20.0\text{ Nm} \end{pmatrix}$$

$$\vec{M}_5 = \vec{r}_5 \times \vec{F}_5 = \begin{pmatrix} 1.00\text{ m} \\ -1.00\text{ m} \\ 1.00\text{ m} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -10.0\text{ N} \\ 10.0\text{ N} \\ 10.0\text{ N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20.0\text{ Nm} \\ -20.0\text{ Nm} \\ 0\text{ Nm} \end{pmatrix}$$

$$\vec{M}_6 = \vec{r}_6 \times \vec{F}_6 = \begin{pmatrix} 1.00\text{ m} \\ 1.00\text{ m} \\ 1.00\text{ m} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0\text{ N} \\ 0\text{ N} \\ 10.0\text{ N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10.0\text{ Nm} \\ -10.0\text{ Nm} \\ 0\text{ Nm} \end{pmatrix}$$

$$\vec{M}_7 = \vec{r}_7 \times \vec{F}_7 = \begin{pmatrix} -1.00\text{ m} \\ 1.00\text{ m} \\ 1.00\text{ m} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0\text{ N} \\ 20.0\text{ N} \\ 10.0\text{ N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10.0\text{ Nm} \\ 10.0\text{ Nm} \\ -20.0\text{ Nm} \end{pmatrix}$$

d) $|\vec{M}_2| = 28.3$ Nm $\quad |\vec{M}_5| = 28.3$ Nm $\quad |\vec{M}_6| = 14.1$ Nm $\quad |\vec{M}_7| = 24.5$ Nm

e)
$$\vec{M}_{res} = \vec{M}_2 + \vec{M}_5 + \vec{M}_6 + \vec{M}_7 = \begin{pmatrix} -20.0\text{ Nm} \\ -40.0\text{ Nm} \\ -40.0\text{ Nm} \end{pmatrix}$$

f) $|\vec{M}_{res}| = 60.0$ Nm