

## Aufgaben 5                      Thermodynamik Kinetik des idealen Gases, Reales Gas

### Lernziele

- die Brown'sche Bewegung von Gasteilchen kennen.
- die Mittelwerte der Geschwindigkeitskomponenten, der Quadrate der Geschwindigkeitskomponenten und des Quadrates des Geschwindigkeitsbetrages eines Gasteilchens in einem idealen Gas kennen, unterscheiden und bestimmen können.
- die molekulare Deutung des Druckes in einem Gas kennen und verstehen.
- den Zusammenhang zwischen der mittleren kinetischen Energie eines Gasteilchens und der Temperatur in einem idealen Gas kennen und anwenden können.
- den Gleichverteilungssatz kennen und verstehen.
- die Maxwell-Boltzmann-Geschwindigkeitsverteilung in einem Gas kennen, verstehen und anwenden können.
- die Unterschiede zwischen einem idealen und einem realen Gas kennen und verstehen.
- wissen und verstehen, wie die allgemeine Zustandsgleichung des idealen Gases korrigiert werden muss, um eine zutreffenderer Zustandsgleichung für ein reales Gas zu erhalten.
- die Van-der-Waals'sche Zustandsgleichung für reale Gase kennen, verstehen und anwenden können.
- die Druck-Volumen-Isothermen eines realen Gases kennen und verstehen.
- die Bedeutung des kritischen Punktes bei einem realen Gas kennen und verstehen.

### Aufgaben

#### Kinetik des idealen Gases

##### Allgemeine Bemerkung:

- Für den Mittelwert einer Grösse  $x$  über alle betrachteten Gasteilchen sind zwei Schreibweisen üblich:  $\langle x \rangle$  und  $\bar{x}$ . Im Lehrbuch Tipler/Mosca und im Arbeitsbuch Mills zu Tipler/Mosca wird die Schreibweise  $\langle x \rangle$  verwendet. In den Aufgaben, die nicht aus dem Arbeitsbuch Mills zu Tipler/Mosca stammen, wird die Schreibweise  $\bar{x}$  verwendet.

- 5.1      Zeigen Sie, dass in einem stationären idealen Gas zwischen dem Mittelwert des Quadrates des Geschwindigkeitsbetrags  $\overline{v^2}$  und den Mittelwerten der Quadrate der Geschwindigkeitskomponenten  $\overline{v_x^2}$ ,  $\overline{v_y^2}$  und  $\overline{v_z^2}$  der folgende Zusammenhang besteht:

$$\overline{v^2} = 3\overline{v_x^2} = 3\overline{v_y^2} = 3\overline{v_z^2} \neq 0$$

##### Hinweise:

- Der Mittelwert einer Grösse  $x$  über alle Teilchen ist gegeben durch:

$$x = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

- Der Betrag der Geschwindigkeit  $v_i$  eines einzelnen Teilchens hängt mit seinen Geschwindigkeitskomponenten  $v_{xi}$ ,  $v_{yi}$  und  $v_{zi}$  wie folgt zusammen:

$$v_i^2 = v_{xi}^2 + v_{yi}^2 + v_{zi}^2$$

- 5.2      Betrachten Sie eine Gruppe von  $N = 10$  Teilchen mit den folgenden Einzelgeschwindigkeiten:

Einzelgeschwindigkeit in m/s:	2.0	5.0	6.0	8.0
Anzahl Teilchen:	3	3	3	1

- Bestimmen Sie den mittleren Geschwindigkeitsbetrag  $\bar{v}$  der Teilchen.
- Bestimmen Sie die mittlere quadratische Geschwindigkeit  $v_{\text{rms}}$  der Teilchen.

##### Hinweis:

- Die mittlere quadratische Geschwindigkeit ist definiert durch  $v_{\text{rms}} := \sqrt{\overline{v^2}}$

5.3 Die mittlere kinetische Energie der Gasteilchen in einem idealen Gas beträgt (siehe Unterricht)

$$\overline{W_{\text{kin}}} = \frac{3}{2} \cdot k_B \cdot T = \frac{3}{2} \cdot \frac{R}{N_A} \cdot T$$

a) Zeigen Sie, dass für die mittlere quadratische Geschwindigkeit der Gasteilchen gilt:

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

Hinweis:

- Verwenden Sie die aus der Mechanik bekannte Beziehung zwischen der Geschwindigkeit  $v$  eines Körpers und dessen kinetischer Energie  $W_{\text{kin}}$ .

b) Bestimmen Sie  $v_{\text{rms}}$  für die Gase  $\text{H}_2$  und  $\text{N}_2$  bei 300 K.

Hinweis:

- Schlagen Sie die Molmassen von  $\text{H}_2$  und  $\text{N}_2$  in einem Periodensystem nach.

c) Bestimmen Sie, um welche Höhendifferenz man eine Gasmenge  $\text{N}_2$  mit Anfangstemperatur 300 K anheben könnte, wenn dazu nichts als die kinetische Energie der Gasmoleküle zur Verfügung stände.

5.4 In einer Integraltafel steht das folgende bestimmte Integral:

$$\int_0^\infty e^{-ax^2} x^{2n} dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2^{n+1}} \sqrt{\pi} a^{-2n-1} \quad (a > 0, n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$$

a) Zeigen Sie mit Hilfe dieser Beziehung, dass für die Maxwell-Boltzmann-Geschwindigkeitsverteilung  $f(v)$  gilt:

$$\int_0^\infty f(v) dv = 1$$

b) Interpretieren Sie den Wert 1 des Integrals in a).

5.5 Bearbeiten Sie im Arbeitsbuch Mills zu Tipler/Mosca die folgenden Aufgaben:  
 14.18, 14.20 (Seite 265)

Hinweis zu 14.18:

- Gesucht ist nicht die mittlere kinetische Energie  $\overline{W_{\text{kin}}}$  eines einzelnen Gasteilchens, sondern die gesamte kinetische Energie  $W_{\text{kin}}$  aller Gasteilchen.

- Es gilt:  $W_{\text{kin}} = N \cdot \overline{W_{\text{kin}}}$

- Verwenden Sie die Zusammenhänge zwischen den Grössen  $n$ ,  $N$ ,  $N_A$ ,  $k_B$  und  $R$ .

### Reales Gas

5.6 In einem festen Behälter mit Volumen 30.0 l befinden sich 1.00 mol Wasserdampf unter einem Druck von 1.00 bar.

Bestimmen Sie die Temperatur des Wasserdampfes mit Hilfe der ...

a) ... allgemeinen Zustandsgleichung für ein ideales Gas.

b) ... Van-der-Waals'schen Zustandsgleichung für reale Gase.

5.7 Betrachten Sie ein reales Gas mit den Van-der-Waals-Konstanten  $a$  und  $b$ .

a) Zeigen Sie mit Hilfe der Van-der-Waals'schen Zustandsgleichung, dass für das kritische Volumen, die kritische Temperatur und den kritischen Druck allgemein gilt:

$$V_k = 3bn \quad T_k = \frac{8a}{27Rb} \quad p_k = \frac{a}{27b^2}$$

b) (siehe nächste Seite)

- b) Bestimmen Sie die kritischen Zustandsgrößen  $V_k$ ,  $T_k$  und  $p_k$  für 1.00 mol Stickstoff.
- c) Bestimmen Sie die kritische Massendichte  $\rho_k$  von Stickstoff.

5.8 Führen Sie in Moodle den [Test 5.1](#) durch.

### **Lehrbuch Tipler/Mosca**

#### Teil IV Thermodynamik

##### 14 Die kinetische Gastheorie

14.2 Druck und Teilchengeschwindigkeit (Seiten 561 bis 566)

14.3 Der Gleichverteilungssatz (Seite 567)

14.5 Die Van-der-Waals-Gleichung und Flüssigkeits-Dampf-Isothermen (Seiten 568 bis 572)