Aufgaben 5 Thermodynamik
Kinetik des idealen Gases, Reales Gas

Lernziele

- die Brown'sche Bewegung von Gasteilchen kennen.
- die Mittelwerte der Geschwindigkeitskomponenten, der Quadrate der Geschwindigkeitskomponenten und des Quadrates des Geschwindigkeitsbetrages eines Gasteilchens in einem idealen Gas kennen, unterscheiden und bestimmen können.
- die molekulare Deutung des Druckes in einem Gas kennen und verstehen.
- den Zusammenhang zwischen der mittleren kinetischen Energie eines Gasteilchens und der Temperatur in einem idealen Gas kennen und anwenden können.
- den Gleichverteilungssatz kennen und verstehen.
- die Maxwell-Boltzmann-Geschwindigkeitsverteilung in einem Gas kennen, verstehen und anwenden können.
- die Unterschiede zwischen einem idealen und einem realen Gas kennen und verstehen.
- wissen und verstehen, wie die allgemeine Zustandsgleichung des idealen Gases korrigiert werden muss, um eine zutreffenderer Zustandsgleichung für ein reales Gas zu erhalten.
- die Van-der-Waals'sche Zustandsgleichung für reale Gase kennen, verstehen und anwenden können.
- die Druck-Volumen-Isothermen eines realen Gases kennen und verstehen.
- die Bedeutung des kritischen Punktes bei einem realen Gas kennen und verstehen.

Aufgaben

Kinetik des idealen Gases

Allgemeine Bemerkung:
- Für den Mittelwert einer Grösse x über alle betrachteten Gasteilchen sind zwei Schreibweisen üblich: <x> und $\overline{x}$
  Im Lehrbuch Tipler/Mosca und im Arbeitsbuch Mills zu Tipler/Mosca wird die Schreibweise <x> verwendet.
  In den Aufgaben, die nicht aus dem Arbeitsbuch Mills zu Tipler/Mosca stammen, wird die Schreibweise $\overline{x}$ verwendet.

5.1 Zeigen Sie, dass in einem stationären idealen Gas zwischen dem Mittelwert des Quadrates des Geschwindigkeitsbetrags $\overline{v^2}$ und den Mittelwerten der Quadrate der Geschwindigkeitskomponenten $\overline{v_x{}^2}$, $\overline{v_y{}^2}$ und $\overline{v_z{}^2}$ der folgende Zusammenhang besteht:

$$\overline{v^2} = 3\overline{v_x{}^2} = 3\overline{v_y{}^2} = 3\overline{v_z{}^2} \neq 0$$

Hinweise:
- Der Mittelwert einer Grösse x über alle Teilchen ist gegeben durch:

$$x = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

- Der Betrag der Geschwindigkeit v_i eines einzelnen Teilchens hängt mit seinen Geschwindigeitskomponenten v_{xi}, v_{yi} und v_{zi} wie folgt zusammen:

$$v_i{}^2 = v_{xi}{}^2 + v_{yi}{}^2 + v_{zi}{}^2$$

5.2 Betrachten Sie eine Gruppe von N = 10 Teilchen mit den folgenden Einzelgeschwindigkeiten:

Einzelgeschwindigkeit in m/s:	2.0	5.0	6.0	8.0
Anzahl Teilchen:	3	3	3	1

a) Bestimmen Sie den mittleren Geschwindigkeitsbetrag $\overline{v}$ der Teilchen.

b) Bestimmen Sie die mittlere quadratische Geschwindigkeit v_{rms} der Teilchen.

Hinweis:
- Die mittlere quadratische Geschwindigkeit ist definiert durch $v_{rms} := \sqrt{\overline{v^2}}$

5.3 Die mittlere kinetische Energie der Gasteilchen in einem idealen Gas beträgt (siehe Unterricht)

$$\overline{W_{\text{kin}}} = \frac{3}{2} \cdot k_{\text{B}} \cdot T = \frac{3}{2} \cdot \frac{R}{N_{\text{A}}} \cdot T$$

a) Zeigen Sie, dass für die mittlere quadratische Geschwindigkeit der Gasteilchen gilt:

$$v_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

Hinweis:
- Verwenden Sie die aus der Mechanik bekannte Beziehung zwischen der Geschwindigkeit v eines Körpers und dessen kinetischer Energie W_{kin}.

b) Bestimmen Sie v_{rms} für die Gase H_2 und N_2 bei 300 K.

Hinweis:
- Schlagen Sie die Molmassen von H_2 und N_2 in einem Periodensystem nach.

c) Bestimmen Sie, um welche Höhendifferenz man eine Gasmenge N_2 mit Anfangstemperatur 300 K anheben könnte, wenn dazu nichts als die kinetische Energie der Gasmoleküle zur Verfügung stände.

5.4 In einer Integraltafel steht das folgende bestimmte Integral:

$$\int_0^\infty e^{-ax^2} x^{2n}\, dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2^{n+1}} \sqrt{\pi\, a^{-2n-1}} \qquad (a > 0,\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$$

a) Zeigen Sie mit Hilfe dieser Beziehung, dass für die Maxwell-Boltzmann-Geschwindigkeitsverteilung f(v) gilt:

$$\int_0^\infty f(v)\, dv = 1$$

b) Interpretieren Sie den Wert 1 des Integrals in a).

5.5 Bearbeiten Sie im Arbeitsbuch Mills zu Tipler/Mosca die folgenden Aufgaben:
14.18, 14.20 (Seite 265)

Hinweis zu 14.18:
- Gesucht ist nicht die mittlere kinetische Energie $\overline{W_{kin}}$ eines einzelnen Gasteilchens, sondern die gesamte kinetische Energie W_{kin} aller Gasteilchen.
- Es gilt: $W_{kin} = N \cdot \overline{W_{kin}}$
- Verwenden Sie die Zusammenhänge zwischen den Grössen n, N, N_A, k_B und R.

Reales Gas

5.6 In einem festen Behälter mit Volumen 30.0 l befinden sich 1.00 mol Wasserdampf unter einem Druck von 1.00 bar.

Bestimmen Sie die Temperatur des Wasserdampfes mit Hilfe der …

a) … allgemeinen Zustandsgleichung für ein ideales Gas.

b) … Van-der-Waals'schen Zustandsgleichung für reale Gase.

5.7 Betrachten Sie ein reales Gas mit den Van-der-Waals-Konstanten a und b.

a) Zeigen Sie mit Hilfe der Van-der-Waals'schen Zustandsgleichung, dass für das kritische Volumen, die kritische Temperatur und den kritischen Druck allgemein gilt:

$$V_k = 3bn \qquad T_k = \frac{8a}{27Rb} \qquad p_k = \frac{a}{27b^2}$$

b) (siehe nächste Seite)

b) Bestimmen Sie die kritischen Zustandsgrössen V_k, T_k und p_k für 1.00 mol Stickstoff.

c) Bestimmen Sie die kritische Massendichte ρ_k von Stickstoff.

5.8 Führen Sie in Moodle den Test 5.1 durch.

Lehrbuch Tipler/Mosca

Teil IV Thermodynamik

14 Die kinetische Gastheorie

14.2 Druck und Teilchengeschwindigkeit (Seiten 561 bis 566)
14.3 Der Gleichverteilungssatz (Seite 567)
14.5 Die Van-der-Waals-Gleichung und Flüssigkeits-Dampf-Isothermen (Seiten 568 bis 572)

Lösungen

5.1 …

5.2 a) $\bar{v} = 4.7$ m/s

b) $v_{rms} = 5.1$ m/s

5.3 a) …

b) H_2: $v_{rms} = 1.93 \cdot 10^3$ m/s
N_2: $v_{rms} = 517$ m/s

c) $h = 13.6$ km

5.4 a) …

b) Der Wert des Integrals ist gleich der Wahrscheinlichkeit, dass der Geschwindigkeitsbetrag eines zufällig ausgewählten Gasteilchens irgendeinen positiven Wert aufweist. Jedes Gasteilchen hat aber einen positiven Geschwindigkeitsbetrag. Deshalb ist die Wahrscheinlichkeit gleich 1.

5.5 (siehe Arbeitsbuch Mills zu Tipler/Mosca)

5.6 a) $T = 361$ K

b) $T = 363$ K

5.7 a)

Van-der-Waals-Gleichung

$$\left(p + a\frac{n^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

$$\Rightarrow \quad p = p(V) = \frac{nRT}{V-nb} - \frac{an^2}{V^2}$$

- p_k, V_k, T_k erfüllen Van-der-Waals-Gleichung

$$\Rightarrow \quad p_k = \frac{nRT_k}{V_k - nb} - \frac{an^2}{V_k^2} \qquad \underline{\mathrm{I}}$$

- Graf von $p = p(V)$ besitzt für $T = T_k$ bei $V = V_k$ einen Sattelpunkt

$$\Rightarrow \quad \frac{dp}{dV}(V_k) = 0, \quad \frac{d^2p}{dV^2}(V_k) = 0, \quad \frac{d^3p}{dV^3}(V_k) \neq 0$$

$$\frac{dp}{dV}(V) = nRT\left(-\frac{1}{(V-nb)^2}\right)\cdot 1 - an^2\left(-\frac{2}{V^3}\right)$$

$$= -\frac{nRT}{(V-nb)^2} + \frac{2an^2}{V^3}$$

$$\Rightarrow \quad -\frac{nRT_k}{(V_k-nb)^2} + \frac{2an^2}{V_k^3} = 0 \qquad \text{II}$$

$$\frac{d^2p}{dV^2}(V) = -nRT\left(-\frac{2}{(V-nb)^3}\right)\cdot 1 + 2an^2\left(-\frac{3}{V^4}\right)$$

$$= \frac{2nRT}{(V-nb)^3} - \frac{6an^2}{V^4}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{2nRT_k}{(V_k-nb)^3} - \frac{6an^2}{V_k^4} = 0 \qquad \text{III}$$

Gleichungssystem	Unb.	Bek.
I	p_k	n
II	T_k	R
III	V_k	b
		a

$$\text{II}: \quad T_k = \frac{2an^2}{V_k^3}\,\frac{(V_k-nb)^2}{nR}$$

$$= \frac{2an}{V_k^3}\,\frac{(V_k-nb)^2}{R} \qquad *$$

$$\text{III}: \quad T_k = \frac{6an^2}{V_k^4}\,\frac{(V_k-nb)^3}{2nR}$$

$$= \frac{3an}{V_k^4}\,\frac{(V_k-nb)^3}{R} \qquad **$$

$$*, ** : \quad \frac{2an}{V_k^3}\,\frac{(V_k-nb)^2}{R} = \frac{3an}{V_k^4}\,\frac{(V_k-nb)^3}{R}$$

$$2V_k = 3(V_k-nb)$$

$$= 3V_k - 3nb$$

$$V_k = 3nb \qquad ***$$

$$*** \text{ in } * : \quad T_k = \frac{2an}{(3nb)^3}\,\frac{(3nb-nb)^2}{R}$$

$$= \frac{2an}{27(nb)^3}\,\frac{4(nb)^2}{R}$$

$$= \frac{8a}{27Rb} \qquad ****$$

, * in I :

$$p_k = \frac{nR\frac{8a}{27Rb}}{3nb-nb} - \frac{an^2}{(3nb)^2}$$

$$= \frac{8a}{27\cdot 2b^2} - \frac{a}{9b^2}$$

$$= \frac{4a-3a}{27b^2}$$

$$= \frac{a}{27b^2}$$

Test, ob $\frac{d^3p}{dV^3}(V_k) \neq 0$

$$\frac{d^3p}{dV^3}(V) = 2nRT\left(-\frac{3}{(V-nb)^4}\right)\cdot 1 - 6an^2\left(-\frac{4}{V^5}\right)$$

$$= -\frac{6nRT}{(V-nb)^4} + \frac{24an^2}{V^5}$$

$$\frac{d^3p}{dV^3}(V_k) = -\frac{6nRT_k}{(V_k-nb)^4} + \frac{24an^2}{V_k^5}$$

$$= -\frac{6nR\frac{8a}{27Rb}}{(3nb-nb)^4} + \frac{24an^2}{(3nb)^5}$$

$$= -\frac{48an}{27b\cdot 16(nb)^4} + \frac{24an^2}{243(nb)^5}$$

$$= -\frac{a}{9n^3b^5} + \frac{8a}{81n^3b^5}$$

$$\frac{d^3p}{dV^3}(V_k) = \frac{-9a+8a}{81n^3b^5}$$

$$= -\frac{a}{81n^3b^5} \neq 0$$

$\Rightarrow$ $V_k = 3nb$

$$T_k = \frac{8a}{27Rb}$$

$$p_k = \frac{a}{27b^2}$$

b)

$$V_k = 3nb$$
$$= 1.17\,dl$$

$$T_k = \frac{8a}{27Rb}$$
$$= 128\,K \quad (\hat{=}\ \vartheta_k = -145\,°C)$$

$$p_k = \frac{a}{27b^2}$$
$$= 34.1\,bar$$

c)

$m = \rho_k \cdot V_k$	I	Unb.	Bek.
$m = n \cdot M$	II	m	n
$V_k = 3nb$ (aus a))	III	ρ_k	$M = 28.0\,g/mol$ (N_2)
		V_k	$b = 3.91 \cdot 10^{-5}\,m^3/mol$

$$\mathrm{I}: \quad \rho_k = \frac{m}{V_k}$$
$$\overset{\mathrm{II},\mathrm{III}}{=} \frac{nM}{3nb}$$
$$= \frac{M}{3b}$$
$$= 239\,kg/m^3$$

5.8 -