

Aufgaben 5 Schwingungen Gedämpfte Schwingung

Lernziele

- die Analogie zwischen einer Drehschwingung und einer linearen Schwingung kennen.
- verstehen, wie eine Schwingung gedämpft werden kann.
- verstehen, wie ein mechanischer Dämpfer funktioniert.
- verstehen, dass alle natürlich ablaufenden Schwingungen gedämpft sind.
- wissen, wie die Stärke der Dämpfung die Bewegung eines Schwingers beeinflusst.
- die bei einer mechanischen, gedämpften Schwingung auftretenden Impuls- und Energieflüsse verstehen.
- mit der Modellierungssoftware Insight Maker ein einfaches systemdynamisches Modell erstellen und damit einfache Simulationen und Parameterstudien ausführen können.

Aufgaben

5.1 Vorgängiges Selbststudium

- a) Studieren Sie im Lehrbuch KPK 3 die folgenden Abschnitte:
- 1.7 Drehschwingungen: Hin- und herfließender Drehimpuls (Seiten 15 und 16, ohne Aufgaben)
 - 1.9 Die Dämpfung von Schwingungen (Seiten 18 bis 20)

Hinweis zum Abschnitt 1.7:

- Es geht hier nur darum, das Drehpendel als Experimentiergerät zur Untersuchung von gedämpften Schwingungen kennenzulernen. Drehbewegungen und physikalische Größen zu deren Beschreibung (Drehimpuls, Drehmoment, Trägheitsmoment) werden wir später im Kurs diskutieren.

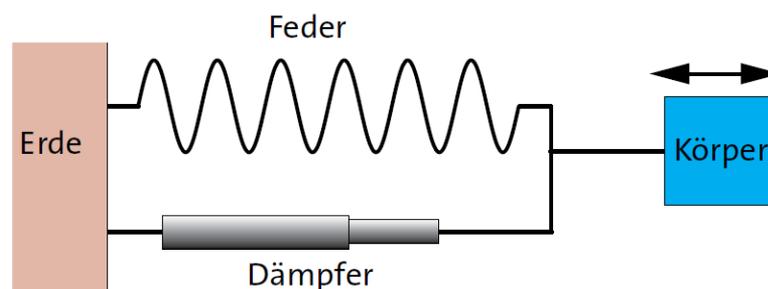
- b) Führen Sie in Moodle den [Test 5.1](#) durch.

5.2 Studieren Sie das folgende YouTube-Video:

- [Gedämpfte Schwingung Drehpendel](#) (1:29)

5.3 In dieser Aufgabe sollen Sie die Dynamik des gedämpften Federschwingers untersuchen.

Betrachten Sie also den folgenden gedämpften Federschwinger (Lehrbuch KPK 3, Abb. 1.29, Seite 18):



Das Koordinatensystem soll wie folgt festgelegt werden:

- Die Schwingung soll in x -Richtung erfolgen.
- Die positive x -Richtung soll nach rechts zeigen.
- Die Ruhelage soll bei $x = 0$ liegen.

Am Schwingkörper greifen zwei Kräfte an, die Federkraft F_F (Kraft, die die Feder ausübt) und die Dämpfungskraft F_D (Kraft, die der Dämpfer ausübt).

- a) Skizzieren Sie den Federschwinger, und zeichnen Sie die beiden Kräfte F_F und F_D ein. Berücksichtigen Sie dabei alle möglichen Fälle für die Richtungen der beiden Kräfte.
- b) Formulieren Sie für den Schwingkörper das (aus der Mechanik bekannte) Aktionsprinzip.

- c) Die in b) formulierte Gleichung enthält drei Grössen.
 Beurteilen Sie, ob und wie diese drei Grössen vom Ort x , der Geschwindigkeit v und der Beschleunigung a des Schwingkörpers abhängen.
 Setzen Sie dann die drei Ausdrücke in das Ergebnis von b) ein.

Der zeitliche Verlauf der Auslenkung x lautet bei schwacher und geschwindigkeitsproportionaler Dämpfung wie folgt (siehe Unterricht):

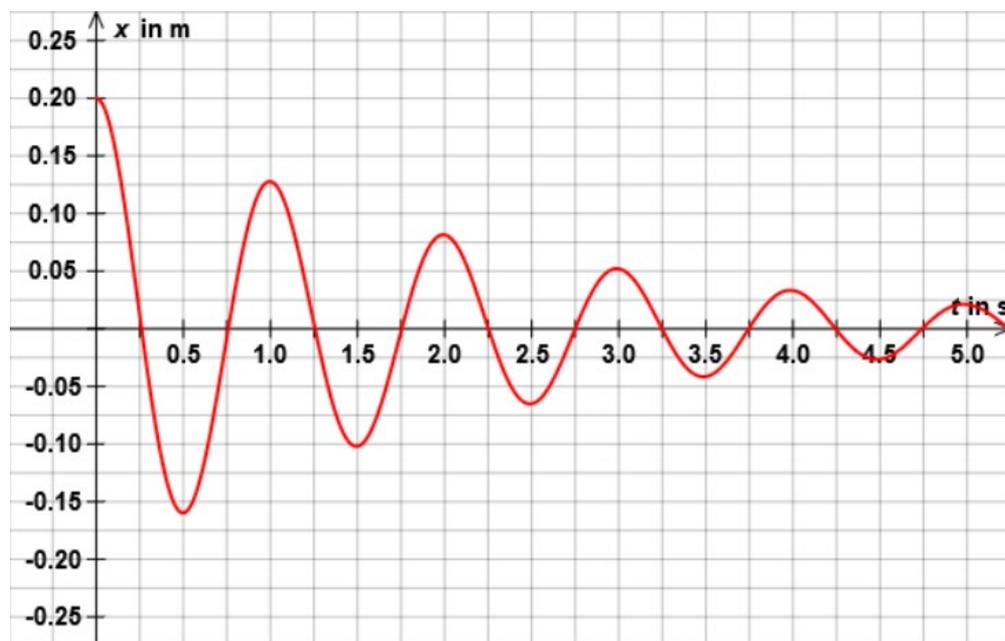
$$x = x(t) = \hat{x} e^{-\delta t} \sin(\omega_d t + \varphi)$$

wobei: $\delta := \frac{k}{2m}$

$$\omega_0 := \sqrt{\frac{D}{m}}$$

$$\omega_d := \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad (\delta < \omega_0, \text{ schwache Dämpfung})$$

Für bestimmte Zahlenwerte der Grössen m , D , k , \hat{x} und φ sieht der Graf von $x = x(t)$ für $t \geq 0$ s wie folgt aus:



- d) Bestimmen Sie aus dem Grafen die konkreten Zahlenwerte für die Periode T_d und die Kreisfrequenz ω_d .
- e) Bestimmen Sie aus dem Grafen die Zeitpunkte/Zeitintervalle, zu/in welchen ...
- i) ... in der Feder keine Energie gespeichert ist.
 - ii) ... im Dämpfer keine Energie dissipiert wird.
 - iii) ... im Schwingkörper kein Impuls gespeichert ist.
 - iv) ... Impuls von der Feder in den Schwingkörper fliesst.
 - v) ... Impuls vom Schwingkörper in den Dämpfer fliesst.
 - vi) ... Impuls von der Feder in die Erde fliesst.
 - vii) ... Energie von der Feder in die Erde fliesst.
 - viii) ... Energie in den Dämpfer fliesst.

5.4 Bearbeiten Sie die Aufgabe 5.3 a) bis c) für den Fall ohne Dämpfung ($k = 0$ Ns/m).

5.5 (siehe nächste Seite)

- 5.5 Die Schwingung des gedämpften Federschwingers in der Aufgabe 5.3 soll systemdynamisch modelliert und simuliert werden.
- a) Erstellen Sie mit Insight Maker ein systemdynamisches Modell. Dabei sollen die folgenden Größen durch je einen Behälter modelliert werden:
- Impuls p des Schwingkörpers
 - Ort x des Schwingkörpers
 - Kinetische Energie W_{kin} des Schwingkörpers
 - Federenergie W_{F}
 - im Dämpfer dissipierte Energie W_{diss}
- Die Dämpfungskraft F_{D} soll proportional zur Geschwindigkeit v des Schwingkörpers sein, d.h. $F_{\text{D}} \sim v$ bzw. $F_{\text{D}} = -k \cdot v$ (k = Dämpfungskonstante)
- b) Simulieren Sie die gedämpfte Schwingung für verschiedene Werte der Dämpfungskonstanten k . Betrachten Sie dabei alle Fälle für die Stärke der Dämpfung (Lehrbuch KPK 3, Abb. 1.32, Seite 19). Stellen Sie jeweils die folgenden Größen je in einem gemeinsamen Diagramm dar:
- Ort x
 - Kinetische Energie W_{kin} , im Dämpfer dissipierte Energie W_{diss}

Lösungen

5.1 -

5.2 -

5.3 a) Die Richtungen der beiden Kräfte F_F und F_D hängen vom Ort x und der Geschwindigkeit v des Schwingkörpers ab.

Fälle:

- $x = 0, v > 0$ (Nulldurchgang nach rechts): $F_F = 0, F_D < 0$ (F_F ist gleich null, F_D zeigt nach links)
- $x > 0, v > 0$: $F_F < 0, F_D < 0$ (F_F und F_D zeigen nach links)
- $x > 0, v = 0$ (rechter Umkehrpunkt): $F_F < 0, F_D = 0$ (F_F zeigt nach links, F_D ist gleich null)
- $x > 0, v < 0$: $F_F < 0, F_D > 0$ (F_F zeigt nach links, F_D zeigt nach rechts)
- $x = 0, v < 0$ (Nulldurchgang nach links): $F_F = 0, F_D > 0$ (F_F ist gleich null, F_D zeigt nach rechts)
- $x < 0, v < 0$: $F_F > 0, F_D > 0$ (F_F und F_D zeigen nach rechts)
- $x < 0, v = 0$ (linker Umkehrpunkt): $F_F > 0, F_D = 0$ (F_F zeigt nach rechts, F_D ist gleich null)
- $x < 0, v > 0$: $F_F > 0, F_D < 0$ (F_F zeigt nach rechts, F_D zeigt nach links)

b) $F_F + F_D = \dot{p}$

c) $F_F = -D \cdot x$

$F_D = -k \cdot v$

$\dot{p} = m \cdot \dot{v} = m \cdot a$

$\Rightarrow -D \cdot x - k \cdot v = m \cdot a$

d) Periode $T_d = 1.0 \text{ s}$

Kreisfrequenz $\omega_d = \frac{2\pi}{T_d} = 6.3 \text{ s}^{-1}$

- e) i) Zeitpunkte, zu welchen die Feder entspannt ist
 \Rightarrow Zeitpunkte, zu welchen für den Ort x des Schwingkörpers gilt: $x = 0 \text{ m}$
 \Rightarrow Zeitpunkte, zu welchen der Graf die Zeitachse schneidet
 $\Rightarrow t = 0.25 \text{ s}, 0.75 \text{ s}, 1.25 \text{ s}, \dots$
- ii) Zeitpunkte, zu welchen der Schwingkörper in Ruhe ist
 \Rightarrow Zeitpunkte, zu welchen für die Geschwindigkeit v des Schwingkörpers gilt: $v = 0 \text{ m/s}$
 \Rightarrow Zeitpunkte, zu welchen der Graf ein lokales Maximum/Minimum annimmt
 $\Rightarrow t = 0.0 \text{ s}, 0.5 \text{ s}, 1.0 \text{ s}, \dots$
- iii) gleiche Zeitpunkte wie in ii)
- iv) Zeitintervalle, in welchen die Feder gestaucht, d.h. weder entspannt noch gestreckt ist
 \Rightarrow Zeitintervalle, in welchen für den Ort x des Schwingkörpers gilt: $x < 0 \text{ m}$
 \Rightarrow Zeitintervalle, in welchen der Graf unterhalb der Zeitachse verläuft
 $\Rightarrow 0.25 \text{ s} < t < 0.75 \text{ s}, 1.25 \text{ s} < t < 1.75 \text{ s}, 2.25 \text{ s} < t < 2.75 \text{ s}, \dots$
- v) Zeitintervalle, in welchen sich der Schwingkörper in die positive Richtung bewegt
 \Rightarrow Zeitintervalle, in welchen für die Geschwindigkeit v des Schwingkörpers gilt: $v > 0 \text{ m/s}$
 \Rightarrow Zeitintervalle, in welchen der Graf nach oben verläuft
 $\Rightarrow 0.5 \text{ s} < t < 1.0 \text{ s}, 1.5 \text{ s} < t < 2.0 \text{ s}, 2.5 \text{ s} < t < 3.0 \text{ s}, \dots$
- vi) Zeitintervalle, in welchen die Feder gestreckt, d.h. weder entspannt noch gestaucht ist
 \Rightarrow Zeitintervalle, in welchen für den Ort x des Schwingkörpers gilt: $x > 0 \text{ m}$
 \Rightarrow Zeitintervalle, in welchen der Graf oberhalb der Zeitachse verläuft
 $\Rightarrow 0.0 \text{ s} < t < 0.25 \text{ s}, 0.75 \text{ s} < t < 1.25 \text{ s}, 1.75 \text{ s} < t < 2.25 \text{ s}, \dots$
- vii) nie
- viii) Zeitintervalle, in welchen im Dämpfer Energie dissipiert wird
 \Rightarrow Zeitintervalle zwischen den in ii) bestimmten Zeitpunkten

5.4 a) Die Richtung der Kraft F_F hängt vom Ort x des Schwingkörpers ab.

Fälle:

- $x = 0$ (Nulldurchgänge): $F_F = 0$ (F_F ist gleich null)

- $x > 0$: $F_F < 0$ (F_F zeigt nach links)

- $x < 0$: $F_F > 0$ (F_F zeigt nach rechts)

b) $F_F = \dot{p}$

c) $F_F = -D \cdot x$

$\dot{p} = m \cdot a$

$\Rightarrow -D \cdot x = m \cdot a$

5.5 Insight-Maker-Modell [Horizontaler Federschwinger \(frei, gedämpft\)](#)

Annahmen:

- Die positive x -Achse zeigt nach rechts.

- Der Schwingkörper wird am Ort $x = 0.2$ m aus der Ruhe losgelassen.

Anfangswerte (folgen aus den Annahmen):

$p = 0$ Hy, $W_{\text{kin}} = 0$ J, $x = 0.2$ m

Parameterwerte:

$m = 2$ kg, $D = 50$ N/m, $k = 1$ Ns/m (schwache Dämpfung)