# Repetitions-Aufgaben 2 — Differentialrechnung, Integralrechnung

## Aufgaben

R2.1 Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

a) "Die Ableitung (Ableitungsfunktion) einer Funktion ist eine Funktion."

b) "Die Ableitung (Änderungsrate) einer Funktion an einer bestimmten Stelle ist eine Zahl."

c) "Die Funktion f hat ein lokales Maximum bei $x = x_1$, falls $f'(x_1) = 0$ und $f''(x_1) > 0$."

d) "Falls $f''(x_2) = 0$ und $f'''(x_2) < 0$, dann hat die Funktion f einen Wendepunkt bei $x = x_2$."

e) "Falls $g' = f$, dann ist g eine Stammfunktion von f."

f) "f mit $f(x) = 2x + 20$ ist eine Stammfunktion von g mit $g(x) = x^2$."

g) "f mit $f(x) = 3x$ hat unendlich viele Stammfunktionen."

h) "Das unbestimmte Integral einer Funktion ist eine Menge von Funktionen."

R2.2 Bestimmen Sie den Funktionswert $f(x_0)$, die erste Ableitung $f'(x_0)$ und die zweite Ableitung $f''(x_0)$ an der Stelle $x_0$ für die folgenden Funktionen f:

a) $f(x) = 4x^2(x^2 - 1)$

i) $x_0 = 0$ ii) $x_0 = -1$

b) $f(x) = (-3x^2 + 2x - 1)\cdot e^x$

i) $x_0 = 0$ ii) $x_0 = -2$

c) $f(x) = (x^2 + 2)\cdot e^{-3x}$

i) $x_0 = 1$ ii) $x_0 = -\frac{1}{3}$

R2.3 Bestimmen Sie für die gegebene Gesamtkostenfunktion K(x) und Ertragsfunktion E(x) ...

i) ... die Grenzkostenfunktion K'(x).

ii) ... die Grenzertragsfunktion E'(x).

iii) ... die Grenzgewinnfunktion G'(x).

a) $K(x) = 200 + 40x$ $E(x) = 60x$

b) $K(x) = 100 + 20x + 5x^2$ $E(x) = 100x - 2x^2$

c) $K(x) = 50 + 20x^2 + 3e^{4x}$ $E(x) = 200x - e^{-4x^2}$

R2.4 Bestimmen Sie für jede Funktion …

i) … die lokalen Maxima und Minima.

ii) … die Wendepunkte.

a) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 1$

b) f(x) wie in R2.2 a)

R2.5 (siehe nächste Seite)

R2.5 Die Ertragsfunktion (Ertrag in CHF) für eine Ware ist gegeben durch

$$E(x) = 36x - 0.01x^2$$

Bestimmen Sie den maximalen Ertrag, falls die Produktion auf höchstens 1500 Einheiten begrenzt ist.

R2.6 Angenommen, die Gesamtkosten (in CHF) für ein Produkt sind

$$K(x) = 100 + x^2$$

Die Produktion wievieler Einheiten x führt zu minimalen Durchschnittskosten? Bestimmen Sie die minimalen Durchschnittskosten.

R2.7 Eine Firma kann pro Monat nur 1000 Einheiten herstellen. Die monatlichen Gesamtkosten (in CHF) sind gegeben durch

$$K(x) = 300 + 200x$$

wobei x die hergestellte Stückzahl ist. Angenommen, der Ertrag (in CHF) ist gegeben durch

$$E(x) = 250x - \frac{1}{100}x^2$$

Wieviele Einheiten sollte die Firma herstellen für einen maximalen Gewinn? Bestimmen Sie den maximalen Gewinn.

R2.8 Bestimmen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

a) $\int (x^4 - 3x^3 - 6)\ dx$

b) $\int \left(\frac{1}{2}x^6 - \frac{2}{3x^4}\right)\ dx$

R2.9 Die Funktionsgleichung der dritten Ableitung f ''' einer Funktion ist wie folgt gegeben:

$$f'''(x) = 3x + 1$$

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Funktion f, so dass $f''(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f(0) = 2$

R2.10 Angenommen, die Grenzkosten (in CHF) für die Herstellung eines Produktes sind $K'(x) = 5x + 10$, wobei die Fixkosten 800 CHF betragen. Was sind die Gesamtkosten für die Produktion von 20 Einheiten?

R2.11 Die Grenzkosten $K'(x)$ (Kosten in CHF) und die Ableitung des Durchschnittsertrages $\overline{E}'(x)$ (Ertrag in CHF) einer bestimmten Firma sind wie folgt gegeben:

$$K'(x) = 6x + 60$$

$$\overline{E}'(x) = -1$$

Die Gesamtkosten und der Ertrag bei einer Produktion von 10 Einheiten sind 1000 CHF bzw. 1700 CHF.

Wieviele Einheiten führen zu einem maximalen Gewinn? Bestimmen Sie den maximalen Gewinn.

R2.12 (siehe nächste Seite)

R2.12 Die Nachfragefunktion (Preis in CHF) für ein Produkt ist

$$p = f(x) = 49 - x^2$$

und die Angebotsfunktion (Preis in CHF) ist

$$p = g(x) = 4x + 4$$

Bestimmen Sie das Marktgleichgewicht sowie die Konsumenten- und die Produzentenrente beim Marktgleichwicht.

R2.13 Die Nachfragefunktion (Preis in CHF) für ein Produkt ist

$$p = f(x) = 110 - ax^2$$

und die Angebotsfunktion (Preis in CHF) ist

$$p = g(x) = 2 - \frac{6}{5}x + bx^2$$

mit den unbekannten Parametern a und b. Der Gleichgewichtspreis ist 10 CHF, und die Produzentenrente beträgt 73.33 CHF (gerundet).

Bestimmen Sie die beiden unbekannten Parameter a und b.

Hinweis:
- Verwenden Sie den ungerundeten Wert $\left(73 + \frac{1}{3}\right)$ CHF = $\frac{220}{3}$ CHF für die Produzentenrente.

**Lösungen**

R2.1 a) wahr  b) wahr  c) falsch
d) wahr  e) wahr  f) falsch
g) wahr  h) wahr

R2.2 a) $f'(x) = 16x^3 - 8x$
$f''(x) = 48x^2 - 8$

i) $f(0) = 0$  $f'(0) = 0$  $f''(0) = -8$

ii) $f(-1) = 0$  $f'(-1) = -8$  $f''(-1) = 40$

b) $f'(x) = (-3x^2 - 4x + 1)\cdot e^x$
$f''(x) = (-3x^2 - 10x - 3)\cdot e^x$

i) $f(0) = -1$  $f'(0) = 1$  $f''(0) = -3$

ii) $f(-2) = -17\cdot e^{-2} = -2.300\ldots$
$f'(-2) = -3\cdot e^{-2} = -0.406\ldots$
$f''(-2) = 5\cdot e^{-2} = 0.676\ldots$

c) $f'(x) = (-3x^2 + 2x - 6)\cdot e^{-3x}$
$f''(x) = (9x^2 - 12x + 20)\cdot e^{-3x}$

i) $f(1) = 3\cdot e^{-3} = 0.149\ldots$
$f'(1) = -7\cdot e^{-3} = -0.348\ldots$
$f''(1) = 17\cdot e^{-3} = 0.846\ldots$

ii) $f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{19}{9}e = 5.738\ldots$
$f'\left(-\frac{1}{3}\right) = -7e = -19.027\ldots$
$f''\left(-\frac{1}{3}\right) = 25e = 67.957\ldots$

R2.3 a) i) $K'(x) = 40$  ii) $E'(x) = 60$

iii) $G'(x) = 20$

b) i) $K'(x) = 20 + 10x$  ii) $E'(x) = 100 - 4x$

iii) $G'(x) = 80 - 14x$

c) i) $K'(x) = 40x + 12e^{4x}$  ii) $E'(x) = 200 + 8x\, e^{-4x^2}$

iii) $G'(x) = 200 - 40x - 12e^{4x} + 8x\, e^{-4x^2}$

R2.4 a) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 1$
$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$
$f''(x) = 12x - 18$
$f'''(x) = 12$

i) $f'(x) = 0$ bei $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$
$f''(x_1) = -6 < 0$  $\Rightarrow$  lokales Maximum bei $x_1 = 1$
$f''(x_2) = 6 > 0$  $\Rightarrow$  lokales Minimum bei $x_2 = 2$

ii) $f''(x) = 0$ bei $x_3 = \frac{3}{2}$
$f'''(x_3) = 12 \neq 0$  $\Rightarrow$  Wendepunkt bei $x_3 = \frac{3}{2}$

b) $f(x) = 4x^2(x^2 - 1)$
$f'(x) = 16x^3 - 8x = 8x(2x^2 - 1)$
$f''(x) = 48x^2 - 8 = 8(6x^2 - 1)$
$f'''(x) = 96x$

i) $f'(x) = 0$ bei $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $x_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$
$f''(x_1) = -8 < 0 \Rightarrow$ lokales Maximum bei $x_1 = 0$
$f''(x_2) = 16 > 0 \Rightarrow$ lokales Minimum bei $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$
$f''(x_3) = 16 > 0 \Rightarrow$ lokales Minimum bei $x_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

ii) $f''(x) = 0$ bei $x_4 = \frac{1}{\sqrt{6}}$ und $x_5 = -\frac{1}{\sqrt{6}}$
$f'''(x_4) = \frac{96}{\sqrt{6}} \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt bei $x_4 = \frac{1}{\sqrt{6}}$
$f'''(x_5) = -\frac{96}{\sqrt{6}} \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt bei $x_5 = -\frac{1}{\sqrt{6}}$

R2.5 **Lokales** Maximum bei $x = 1800$ liegt ausserhalb des möglichen Intervalls $0 \leq x \leq 1500$
$E(1500) = 31'500$ CHF $> E(0) = 0$ CHF
$\Rightarrow$ $E = 31'500$ CHF ist der **globale** maximale Erlös bei $x = 1500$.

R2.6 $\overline{K}(x) = \frac{K(x)}{x} = \frac{100}{x} + x$
$\overline{K}(x)$ hat ein **lokales** Minimum bei $x_1 = 10$
$\overline{K}(10) = 20$ CHF
$\overline{K}(x) > \overline{K}(x_1)$ falls $x \neq x_1$, da es kein lokales Maximum gibt
$\Rightarrow$ $\overline{K} = 20$ CHF sind die **globalen** minimalen Durchschnittskosten bei $x = 10$.

R2.7 $G(x) = E(x) - K(x) = -\frac{1}{100}x^2 + 50x - 300$
$G(x)$ hat ein **lokales** Maximum bei $x_1 = 2500$. Dieses liegt ausserhalb des möglichen Intervalls $0 \leq x \leq 1000$
$G(1000) = 39'700$ CHF $> G(0) = -300$ CHF
$\Rightarrow$ $G = 39'700$ CHF ist der **globale** maximale Profit am Endpunkt $x = 1000$.

R2.8 a) $\int (x^4 - 3x^3 - 6)\,dx = \frac{x^5}{5} - \frac{3x^4}{4} - 6x + C$

b) $\int \left(\frac{1}{2}x^6 - \frac{2}{3x^4}\right)\,dx = \frac{x^7}{14} + \frac{2}{9x^3} + C$

R2.9 $f(x) = \frac{x^4}{8} + \frac{x^3}{6} + x + 2$

R2.10 $K(20) = 2000$ CHF

Hinweis:
- Bestimmen Sie zuerst die Gesamtkostenfunktion $K(x)$ $\Rightarrow$ $K(x) = \frac{5}{2}x^2 + 10x + 800$

R2.11 (siehe nächste Seite)

R2.11 $G = 800$ CHF ist der globale maximale Gewinn bei $x = 15$ Einheiten.

Hinweise:
- Bestimmen Sie die Gesamtkostenfunktion $K(x) \Rightarrow K(x) = 3x^2 + 60x + 100$
- Bestimmen Sie die Durchschnittserlösfunktion $\overline{E}(x) \Rightarrow \overline{E}(x) = - x + C$
- Bestimmen Sie die Ertragsfunktion $E(x) \Rightarrow E(x) = - x^2 + 180x$
- Bestimmen Sie die Gewinnfunktion $G(x) \Rightarrow G(x) = - 4x^2 + 120x - 100$
- Bestimmen Sie die lokalen Maxima der Gewinnfunktion $G(x)$.
- Überprüfen Sie, ob eines der lokalen Maxima das globale Maximum ist.

R2.12

| | |
|---|---|
| Gleichgewichtsmenge | $x = 5$ |
| Gleichgewichtspreis | $p = 24$ CHF |
| Konsumentenrente | $CS = 83.33$ CHF (gerundet) |
| Produzentenrente | $PS = 50$ CHF |

R2.13 $a = 1$
$b = 0.2$