

## Aufgaben 11      Exponentialfunktion und -gleichungen Zinseszins, Unterjährige Verzinsung

### Lernziele

- das zukünftige Kapital berechnen können, welches bei unterjähriger Verzinsung angelegt ist.
- wissen und verstehen, was ein nomineller und ein effektiver Jahreszinssatz ist.
- ausgewählte Zinseszinsaufgaben bearbeiten können.

### Aufgaben

11.1 Ein Anfangskapital  $K_0 = 1000$  CHF wird zu einem nominellen Jahreszinssatz  $i_a = 10\%$  angelegt, wobei die Verzinsung ...

- a) ... vierteljährlich erfolgt.
  - i) Bestimmen Sie den vierteljährlichen Zinssatz.
  - ii) Bestimmen Sie das Kapital  $K_1$ ,  $K_2$  und  $K_3$  nach einem, zwei und drei Jahr(en).
  - iii) Bestimmen Sie den effektiven Jahreszinssatz  $i_a^*$ .
- b) ... monatlich erfolgt.
  - i) Bestimmen Sie den monatlichen Zinssatz.
  - ii) Bestimmen Sie das Kapital  $K_1$ ,  $K_2$  und  $K_3$  nach einem, zwei und drei Jahr(en).
  - iii) Bestimmen Sie den effektiven Jahreszinssatz  $i_a^*$ .

11.2 Bestimmen Sie den effektiven Jahreszinssatz für einen nominalen Jahreszinssatz von 6% und einer ...

- a) ... jährlichen Verzinsung.
- b) ... halbjährlichen Verzinsung.
- c) ... vierteljährlichen Verzinsung.
- d) ... monatlichen Verzinsung.
- e) ... täglichen Verzinsung (1 Jahr = 360 Tage).

11.3 Was ist der zukünftige Wert, wenn 3200 CHF 5 Jahre lang zu 8% bei vierteljährlicher Verzinsung angelegt werden?

11.4 Bestimmen Sie den Zins, den 10'000 CHF tragen, wenn das Geld 3 Jahre lang zu 9% bei monatlicher Verzinsung angelegt werden.

11.5 Die Formel

$$K_n = K_0 \left(1 + \frac{i_a}{m}\right)^n$$

wird verwendet, um das zukünftige Kapital  $K_n$  bei unterjähriger Verzinsung zu berechnen.

Lösen Sie die Formel nach  $K_0$ ,  $i_a$  und  $n$ .

11.6 Welchen Geldbetrag müssen Eltern auf ein Konto einzahlen, welches bei nominell 10% monatlich verzinst wird, damit das Geld für die Ausbildung ihres Sohnes in 18 Jahren auf 40'000 CHF anwächst?

- 11.7 Ein Anfangskapital von 1000 CHF steigt auf 1500 CHF an, wenn es 10 Jahre lang zu einem unbekanntem Jahreszinssatz und vierteljährlicher Verzinsung angelegt wird.  
Bestimmen Sie den ...
- a) ... nominellen Jahreszinssatz.
  - b) ... effektiven Jahreszinssatz.
- 11.8 Wie lange (in Monaten) müsste ein Kapital bei 6% und monatlicher Verzinsung angelegt werden, um seinen Wert zu verdoppeln?
- 11.9 Frau Good möchte 100'000 CHF investieren. Ihre Bank unterbreitet ihr zwei Angebote:
- A effektiver Jahreszinssatz von 8.5%
  - B nomineller Jahreszinssatz von 8%, monatliche Verzinsung
- Welches Angebot ist besser, Angebot A oder Angebot B?
- 11.10 Wie lange (in Jahren) müssten 1000 CHF zu 2.5% bei täglicher Verzinsung angelegt werden, um einen Zins von 250 CHF zu erzielen?
- 11.11 Zu welchem nominellen Jahreszinssatz müssten 20'000 CHF angelegt werden, um bei vierteljährlicher Verzinsung nach 7 Jahren 26'400 CHF zu erzielen?
- 11.12 Ein Paar benötigt 150'000 CHF für eine erste Anzahlung an ihr Eigenheim. Angenommen, sie investieren die 100'000 CHF, die sie jetzt haben, zu 8% bei vierteljährlicher Verzinsung. Wie lange würde es dauern, bis das Geld auf 150'000 CHF angewachsen ist?
- 11.13 Entscheiden Sie, welche Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie das entsprechende Kästchen an. In jeder Aufgabe a) bis c) ist genau eine Aussage wahr.
- a) Der nominale Jahreszinssatz ...
    - ... ist allgemein höher als der effektive Jahreszinssatz.
    - ... ist gleich hoch wie der effektive Jahreszinssatz, falls die Verzinsung jährlich erfolgt.
    - ... ist halb so hoch wie der effektive Jahreszinssatz, falls die Verzinsung halbjährlich erfolgt.
    - ... hängt von der Zinsperiode ab.
  - b) Bei einer Anlage mit Zinseszins und  $m$  ( $m > 1$ ) Zinsperioden pro Jahr ...
    - ... ist der Wachstumsfaktor  $m$  mal höher als bei einer einzigen Verzinsung pro Jahr.
    - ... ist der effektive Jahreszinssatz  $m$  mal tiefer als bei einer einzigen Verzinsung pro Jahr.
    - ... wächst das Kapital schneller als bei einer einzigen Verzinsung pro Jahr.
    - ... wächst das Kapital langsamer als bei einer einzigen Verzinsung pro Jahr.
  - c) Wenn ein Anfangskapital von 1000 CHF bei halbjährlicher Verzinsung in einem Jahr auf 1100 CHF anwächst, dann ist der ...
    - ... effektive Jahreszins tiefer als 10%.
    - ... effektive Jahreszins höher als 10%.
    - ... nominale Jahreszins tiefer als 10%.
    - ... nominale Jahreszins höher als 10%.

**Lösungen**

- 11.1 a) i)  $i = \frac{i_a}{m} = \frac{10\%}{4} = 2.5\%$
- ii)  $K_n = K_0 \left(1 + \frac{i_a}{m}\right)^n$  mit  $m = 4$ ,  $n = \text{Anzahl Quartale}$
- nach 1 Jahr:  $n = 4$   
 $K_4 = 1000 \left(1 + \frac{10\%}{4}\right)^4 \text{ CHF} = 1103.81 \text{ CHF (gerundet)}$
- nach 2 Jahren:  $n = 8$   
 $K_8 = 1000 \left(1 + \frac{10\%}{4}\right)^8 \text{ CHF} = 1218.40 \text{ CHF (gerundet)}$
- nach 3 Jahren:  $n = 12$   
 $K_{12} = 1000 \left(1 + \frac{10\%}{4}\right)^{12} \text{ CHF} = 1344.89 \text{ CHF (gerundet)}$
- iii)  $i_a^* = \left(1 + \frac{i_a}{m}\right)^m - 1 = \left(1 + \frac{10\%}{4}\right)^4 - 1 = 0.1038 = 10.38\% \text{ (gerundet)}$
- b) i)  $i = \frac{i_a}{m} = \frac{10\%}{12} = 0.83\% \text{ (gerundet)}$
- ii)  $K_n = K_0 \left(1 + \frac{i_a}{m}\right)^n$  mit  $m = 12$ ,  $n = \text{Anzahl Monate}$
- nach 1 Jahr:  $n = 12$   
 $K_{12} = 1000 \left(1 + \frac{10\%}{12}\right)^{12} \text{ CHF} = 1104.71 \text{ CHF (gerundet)}$
- nach 2 Jahren:  $n = 24$   
 $K_{24} = 1000 \left(1 + \frac{10\%}{12}\right)^{24} \text{ CHF} = 1220.39 \text{ CHF (gerundet)}$
- nach 3 Jahren:  $n = 36$   
 $K_{36} = 1000 \left(1 + \frac{10\%}{12}\right)^{36} \text{ CHF} = 1348.18 \text{ CHF (gerundet)}$
- iii)  $i_a^* = \left(1 + \frac{i_a}{m}\right)^m - 1 = \left(1 + \frac{10\%}{12}\right)^{12} - 1 = 0.1047 = 10.47\% \text{ (gerundet)}$

- 11.2  $i_a^* = \left(1 + \frac{i_a}{m}\right)^m - 1$   $i_a = 6\%$
- a)  $m = 1$   $i_a^* = 6\%$
- b)  $m = 2$   $i_a^* = 6.09\%$
- c)  $m = 4$   $i_a^* = 6.136\% \text{ (gerundet)}$
- d)  $m = 12$   $i_a^* = 6.168\% \text{ (gerundet)}$
- e)  $m = 360$   $i_a^* = 6.183\% \text{ (gerundet)}$

11.3  $K_n = K_0 \left(1 + \frac{i_a}{m}\right)^n$  mit  $K_0 = 3200 \text{ CHF}$ ,  $i_a = 8\%$ ,  $m = 4$ ,  $n = 5 \cdot 4 = 20$   
 $\Rightarrow K_{20} = 4755.03 \text{ CHF (gerundet)}$

11.4 Zins =  $K_n - K_0$   
 $K_n = K_0 \left(1 + \frac{i_a}{m}\right)^n$  mit  $K_0 = 10'000 \text{ CHF}$ ,  $i_a = 9\%$ ,  $m = 12$ ,  $n = 3 \cdot 12 = 36$   
 $\Rightarrow K_{36} - K_0 = 3086.45 \text{ CHF (gerundet)}$

11.5 siehe Formelsammlung

11.6  $K_0 = \frac{K_n}{\left(1 + \frac{i_a}{m}\right)^n}$  mit  $K_n = 40'000$  CHF,  $i_a = 10\%$ ,  $m = 12$ ,  $n = 18 \cdot 12 = 216$   
 $\Rightarrow K_0 = 6661.46$  CHF (gerundet)

11.7 a)  $i_a = m \left( \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1 \right)$  mit  $K_0 = 1000$  CHF,  $K_n = 1500$  CHF,  $m = 4$ ,  $n = 10 \cdot 4 = 40$   
 $\Rightarrow i_a = 4.08\%$  (gerundet)  
b)  $i_a^* = \left(1 + \frac{i_a}{m}\right)^m - 1$   
 $\Rightarrow i_a^* = 4.14\%$  (gerundet)

11.8  $n = \frac{\lg\left(\frac{K_n}{K_0}\right)}{\lg\left(1 + \frac{i_a}{m}\right)}$  mit  $\frac{K_n}{K_0} = 2$ ,  $i_a = 6\%$ ,  $m = 12$   
 $\Rightarrow n = 138.98... \rightarrow 139$  Monate

11.9 A  $i_a^*(A) = 8.5\%$   
B  $i_a^*(B) = \left(1 + \frac{i_a}{m}\right)^m - 1$  mit  $i_a = 8\%$ ,  $m = 12$   
 $\Rightarrow i_a^*(B) = 8.3\%$   
 $\Rightarrow i_a^*(A) > i_a^*(B)$ , d.h. Angebot A ist besser als Angebot B

11.10  $n = \frac{\lg\left(\frac{K_n}{K_0}\right)}{\lg\left(1 + \frac{i_a}{m}\right)}$  mit  $K_0 = 1000$  CHF,  $K_n = 1250$  CHF,  $i_a = 2.5\%$ ,  $m = 360$   
 $\Rightarrow n = 3213.38... \rightarrow 3214$  Tage =  $8.92... \text{ Jahre} \rightarrow 9$  Jahre

11.11  $i_a = m \left( \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1 \right)$  mit  $K_0 = 20'000$  CHF,  $K_n = 26'400$  CHF,  $m = 4$ ,  $n = 7 \cdot 4 = 28$   
 $\Rightarrow i_a = 4.0\%$  (gerundet)

11.12  $n = \frac{\lg\left(\frac{K_n}{K_0}\right)}{\lg\left(1 + \frac{i_a}{m}\right)}$  mit  $K_0 = 100'000$  CHF,  $K_n = 150'000$  CHF,  $i_a = 8\%$ ,  $m = 4$   
 $\Rightarrow n = 20.47... \rightarrow 21$  Quartale = 5 Jahre 3 Monate

- 11.13 a) 2. Aussage  
b) 3. Aussage  
c) 3. Aussage