

Aufgaben 5 Lineare Funktion und Gleichungen Lineare Gleichungen

Lernziele

- eine lineare Gleichung lösen können.
- die Lösungsmenge einer linearen Gleichung bestimmen können.
- eine lineare Gleichung mit Parametern lösen können.
- angewandte Problemstellungen aus dem Bereich Volks- und Betriebswirtschaft mit Hilfe von linearen Gleichungen bearbeiten können.

Aufgaben

5.1 Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen:

- a) $19x - 32 + 17x = 18x - 30 + 16x - 4$
- b) $25x - 16 - 9x = 20 + 24x - 10 - 10x$
- c) $105 - 72x - 53 - 69 = 55x + 43x - 23 - 170x + 6$
- d) $56x - 43 - 52 - 19x = 7 - 72x - 56x + 165x - 112$

5.2 Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen:

- a) $22(x - 11) - 5(x - 40) = 110 - (x + 53)$
- b) $184 - 6(x - 24) = 214 - 3(2x - 38)$
- c) $(x + 3)(x - 5) = (x - 3)^2$
- d) $(x - 5)(x - 2) = (x - 4)(x - 3)$
- e) $5x(x - 1) - (2x + 3)^2 - (x - 5)(x + 3) - 6 = 0$

5.3 Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen:

- a) $\frac{x+3}{5} = \frac{2x-8}{3}$
- b) $\frac{x+3}{4} + \frac{1-3x}{7} = 0$
- c) $\frac{2}{x-1} = \frac{1}{x-2}$
- d) $\frac{x}{x-1} = \frac{x-1}{x-2}$

5.4 Die folgenden Gleichungen sind Gleichungen in der Variablen x . Sie enthalten jedoch Parameter a und b . Deshalb hängen die Lösungsmengen der Gleichungen von den Werten dieser Parameter ab.

Lösen Sie die Gleichungen nach x , und bestimmen Sie die Lösungsmengen.
Berücksichtigen Sie dabei, dass die Parameter a und b beliebige reelle Zahlen sein können.

a) $x(a - 3) = a$

Hinweise:

- Möglicherweise möchten Sie beide Seiten der Gleichung durch $a - 3$ dividieren. Dies ist jedoch nicht erlaubt, falls $a - 3 = 0$, d.h. falls $a = 3$, da eine Division durch 0 nicht definiert ist.
- Lösen Sie die Gleichung für die beiden Fälle $a \neq 3$ und $a = 3$.

b) $(x + 1)(b - 2) = 2bx$

c) (siehe nächste Seite)

- c) $a(1 + x) - 1 = x(2a - 1)$
d) $(a - b)x = a$

5.5 Der Graf einer linearen Funktion hat die Steigung a und enthält den Punkt P . Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der linearen Funktion.

- a) $a = -5$ $P(5|-3)$
b) $a = 2$ $P(3|0)$
c) $a = 0$ $P(2|3)$

5.6 Alps Bikes verwendet die Formel $B(t) = -400t + 5000$, um den Buchwert $B(t)$ (in CHF) eines Mountain Bikes nach der Zeit t (in Jahren) nach dem Verkauf zu bestimmen.

- a) Was bedeuten die Zahlen -400 und 5000 ?
b) Wie lange geht es, bis das Mountain Bike vollständig entwertet bzw. abgeschrieben ist?

5.7 Zwei Artikel A und B werden linear abgeschrieben:

Artikel A	Anfangswert = 200 CHF Abschreibung = 16 CHF/Jahr
Artikel B	Anfangswert = 240 CHF Abschreibung = 32 CHF/Jahr

- a) Wie lange geht es, bis die beiden Artikel vollständig abgeschrieben sind?
b) Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu welchem beide Artikel den gleichen Wert besitzen.

Hinweis:

- Betrachten Sie den zeitlichen Verlauf der Werte der Artikel als lineare Funktionen.

5.8 Ein Startkapital von 5000 CHF wird zu einem unbekanntem Zinssatz einfach verzinst. Nach fünf Jahren beträgt das Kapital 5625 CHF.

- a) Bestimmen Sie den Zinssatz.
b) Wie lange würde es dauern, bis das Kapital den Wert 7000 CHF erreicht?

5.9 Entscheiden Sie, welche Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie das entsprechende Kästchen an. In jeder Aufgabe a) bis c) ist genau eine Aussage wahr.

a) Die Lösungsmenge einer linearen Gleichung ...

- ... enthält immer mindestens ein Element.
 ... enthält nie zwei Elemente.
 ... enthält nur Elemente, falls die lineare Gleichung einer konstanten Funktion entspricht.
 ... kann nicht die leere Menge sein.

b) Wenn eine lineare Gleichung genau eine Lösung hat, dann ...

- ... schneidet der Graf der entsprechenden linearen Funktion die x-Achse.
 ... enthält die Gleichung keine Parameter.
 ... ist die Lösung sicher eine ganze Zahl.
 ... kann keine andere lineare Gleichung die gleiche Lösung haben.

c) (siehe nächste Seite)

- c) Wenn eine lineare Gleichung die Lösung $x = 2$ hat, dann kann gefolgert werden, dass ...
- ... $x = 3$ keine Lösung ist.
 - ... der Graf der entsprechenden linearen Funktion die x -Achse an der Stelle $x = 2$ schneidet.
 - ... $P(2|0)$ ein Punkt auf dem Grafen der entsprechenden linearen Funktion ist.
 - ... $P(0|2)$ ein Punkt auf dem Grafen der entsprechenden linearen Funktion ist.

Lösungen

- 5.1 a) $L = \{-1\}$
 b) $L = \{13\}$
 c) $L = \mathbb{R}$
 d) $L = \{ \}$

- 5.2 a) $L = \left\{ \frac{11}{2} \right\}$
 b) $L = \mathbb{R}$
 c) $L = \{6\}$
 d) $L = \{ \}$
 e) $L = \{0\}$

- 5.3 a) $L = \{7\}$
 b) $L = \{5\}$
 c) $L = \{3\}$
 d) $L = \{ \}$

- 5.4 a) falls $a = 3$: keine Lösung $\Rightarrow L = \{ \}$
 falls $a \neq 3$: $x = \frac{a}{a-3}$ $\Rightarrow L = \left\{ \frac{a}{a-3} \right\}$
 b) falls $b = -2$: keine Lösung $\Rightarrow L = \{ \}$
 falls $b \neq -2$: $x = \frac{b-2}{b+2}$ $\Rightarrow L = \left\{ \frac{b-2}{b+2} \right\}$
 c) falls $a = 1$: $x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow L = \mathbb{R}$
 falls $a \neq 1$: $x = 1$ $\Rightarrow L = \{1\}$
 d) falls $a = b = 0$: $x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow L = \mathbb{R}$
 falls $a = b \neq 0$: keine Lösung $\Rightarrow L = \{ \}$
 falls $a \neq b$: $x = \frac{a}{a-b}$ $\Rightarrow L = \left\{ \frac{a}{a-b} \right\}$

- 5.5 a) $y = f(x) = -5x + 22$

Hinweise:

- Die Funktionsgleichung einer linearen Funktion lautet $y = f(x) = ax + b$

- $P(5|-3)$ ist ein Punkt auf dem Grafen der linearen Funktion. Daher müssen die Koordinaten von P die Funktionsgleichung der linearen Funktion erfüllen, d.h. $-3 = f(5) = a \cdot 5 + b$

- b) $y = f(x) = 2x - 6$

- c) $y = f(x) = 3$

- 5.6 a) Die Zahl -400 gibt an, dass der Wert des Mountain Bikes jährlich um 400 CHF abnimmt.
 Die Zahl 5000 gibt an, dass der Anfangswert des Mountain Bikes 5000 CHF beträgt.

- b) 12.5 Jahre

Hinweis:

- Vollständige Entwertung bis zum Zeitpunkt t bedeutet $B(t) = 0$.

- 5.7 a) Artikel A: 12.5 Jahre
Artikel B: 7.5 Jahre
b) $t = 2.5$ Jahre (falls der Anfangswert zum Zeitpunkt $t = 0$ Jahre gemeint ist)
- 5.8 a) Steigung der linearen Funktion: $a = 125$
Zinssatz $i = 2.5\%$
b) 16 Jahre
- 5.9 a) 2. Aussage
b) 1. Aussage
c) 3. Aussage