

Unbestimmtes Integral

Bsp.: Finanzmathematik

Gegeben ist die Grenzkostenfunktion K' für die Produktion einer Ware:

$$K'(x) = 3x + 50$$

Wie lautet die Gesamtkostenfunktion K ?

$$K(x) = \dots ?$$

Allgemeine Problemstellung

Gegeben ist eine Funktion f . Welche Funktion F ist so, dass $F' = f$?

Bsp.: $f(x) = 2x$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow & F_1(x) = x^2 \quad \text{da } F_1'(x) = 2x = f(x) \\ & F_2(x) = x^2 + 1 \quad \text{da } F_2'(x) = 2x + 0 = 2x = f(x) \\ & F_3(x) = x^2 - 4 \quad \text{da } F_3'(x) = 2x + 0 = 2x = f(x) \\ & \dots \\ & F(x) = x^2 + C \quad (C \in \mathbb{R}) \quad \text{da } F'(x) = 2x + 0 = 2x = f(x) \end{array}$$

$$f(x) = 8x^3$$

$$\begin{array}{ll} \Rightarrow & F_1(x) = 2x^4 \quad \text{da } F_1'(x) = 8x^3 = f(x) \\ & F_2(x) = 2x^4 + 5 \quad \text{da } F_2'(x) = 8x^3 + 0 = 8x^3 = f(x) \\ & F_3(x) = 2x^4 - 11 \quad \text{da } F_3'(x) = 8x^3 + 0 = 8x^3 = f(x) \\ & \dots \\ & F(x) = 2x^4 + C \quad (C \in \mathbb{R}) \quad \text{da } F'(x) = 8x^3 + 0 = 8x^3 = f(x) \end{array}$$

Definitionen

F heisst **Stammfunktion** von f , falls ihre Ableitung F' gleich f ist, d.h. $F'(x) = f(x)$.

Die Menge aller Stammfunktionen der Funktion f heisst **unbestimmtes Integral** von f , bezeichnet mit $\int f(x) dx$.

Bsp.: $f(x) = 8x^3$

Die Funktionen $F_1, F_2, F_3, \dots$ mit $F_1(x) = 2x^4, F_2(x) = 2x^4 + 5, F_3(x) = 2x^4 - 11, \dots$ sind alles Stammfunktionen von f .

Wir schreiben daher $\int f(x) dx = \int 8x^3 dx = 2x^4 + C$

$$f(x) = 12x^2$$

$$\int f(x) dx = \int 12x^2 dx = 4x^3 + C$$

$$\int 2x dx = x^2 + C$$

$$\int 3 e^{3x} dx = e^{3x} + C$$

$C (C \in \mathbb{R})$ heisst **Integrationskonstante**.