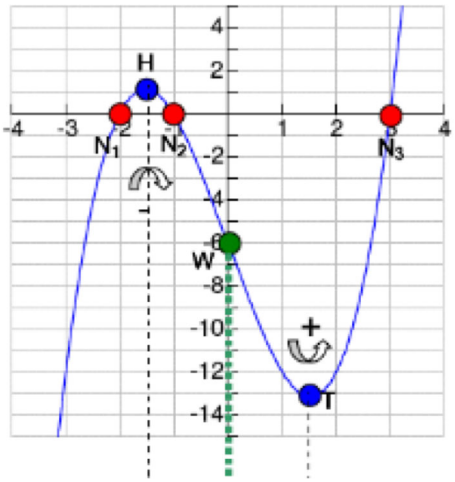
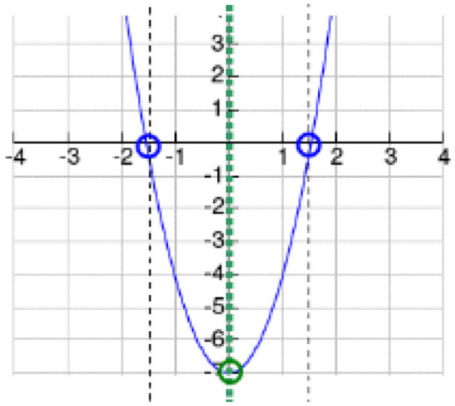
Steigen/Fallen, Krümmung

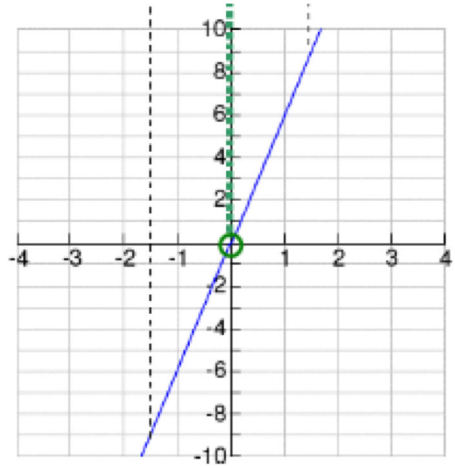
Bsp.: $f(x) = x^3 - 7x - 6$



$f'(x) = 3x^2 - 7$



$f''(x) = 6x$



Steigen/Fallen

Die Funktion f **steigt** bei $x = x_0$, falls die **erste Ableitung positiv** ist, d.h. $f'(x_0) > 0$.

Die Funktion f **fällt** bei $x = x_0$, falls die **erste Ableitung negativ** ist, d.h. $f'(x_0) < 0$.

Krümmung

Der Graf der Funktion ist **konvex** bei $x = x_0$, falls die **zweite Ableitung positiv** ist, d.h. $f''(x_0) > 0$.

Der Graf der Funktion ist **konkav** bei $x = x_0$, falls die **zweite Ableitung negativ** ist, d.h. $f''(x_0) < 0$.

Relative Maxima/Minima

Die Funktion f hat ein **relatives Maximum** bei $x = x_0$, falls die Tangente an den Grafen von f bei $x = x_0$ horizontal ist und falls der Graf von f bei $x = x_0$ konkav ist, d.h. $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$.

Die Funktion f hat ein **relatives Minimum** bei $x = x_0$, falls die Tangente an den Grafen von f bei $x = x_0$ horizontal ist und falls der Graf von f bei $x = x_0$ konvex ist, d.h. $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$.

Absolutes Maximum/Minimum

Das **absolute Maximum/Minimum** einer stetigen Funktion ist entweder ein relatives Maximum/Minimum oder der Funktionswert von f an einem der Endpunkte des Definitionsbereichs.

Wendepunkte

Die Funktion f hat einen **Wendepunkt** bei $x = x_0$, falls der Graf von f bei $x = x_0$ seine Krümmung von konvex zu konkav (oder umgekehrt) wechselt, d.h. falls $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$.

Bsp.: $f(x) = x^3 - 7x - 6$ (siehe Seite 1) $\Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 7$

$\Rightarrow f''(x) = 6x$

$\Rightarrow f'''(x) = 6$

Relative Maxima/Minima

$f'(x) = 0$ bei $x_1 = \sqrt{\frac{7}{3}} = 1.52\ldots$ und $x_2 = -\sqrt{\frac{7}{3}} = -1.52\ldots$

$f''(x_1) = 6 \cdot \sqrt{\frac{7}{3}} = 9.16\ldots > 0$ $\Rightarrow$ relatives Minimum bei $x_1 = \sqrt{\frac{7}{3}}$

$f''(x_2) = -6 \cdot \sqrt{\frac{7}{3}} = -9.16\ldots < 0$ $\Rightarrow$ relatives Maximum bei $x_2 = -\sqrt{\frac{7}{3}}$

Absolutes Maximum/Minimum

Bsp.: $D = [0,4]$ $\Rightarrow$ absolutes Maximum bei $x = 4$ (Endpunkt des Def.bereichs)

$\Rightarrow$ absolutes Minimum bei $x = x_1 = \sqrt{\frac{7}{3}}$ (relatives Minimum)

Bsp.: $D = [-4,3]$ $\Rightarrow$ absolutes Maximum bei $x = x_2 = -\sqrt{\frac{7}{3}}$ (relatives Maximum)

$\Rightarrow$ absolutes Minimum bei $x = -4$ (Endpunkt des Def.bereichs)

Wendepunkte

$f''(x) = 0$ bei $x_3 = 0$

$f'''(x_3) = 6 \neq 0$ $\Rightarrow$ Wendepunkt bei $x_3 = 0$

Finanzmathematik

Grenzkosten-/-ertrags-/-gewinnfunktion = erste Ableitung der Kosten-/Ertrags-/Gewinnfunktion

Bsp.:	Kostenfunktion	$K(x) = 120 + 2x^2$
	⇒ Grenzkostenfunktion	$K'(x) = 4x$
	Ertragsfunktion	$E(x) = 168x - x^2$
	⇒ Grenzertragsfunktion	$E'(x) = 168 - 2x$
	Gewinnfunktion	$G(x) = E(x) - K(x) = - 120 + 168x - 3x^2$
	⇒ Grenzgewinnfunktion	$G'(x) = 168 - 6x$

Durchschnittskosten-/-ertrags-/-gewinnfunktion

Durchschnittskostenfunktion		$\overline{K}(x) := \frac{K(x)}{x}$	mit K(x) = Kostenfunktion
Bsp.:	Kostenfunktion	$K(x) = 3x^2 + 4x + 2$	
	⇒ Durchschnittskostenfunktion	$\overline{K}(x) = 3x + 4 + \frac{2}{x}$	
Durchschnittsertragsfunktion		$\overline{E}(x) := \frac{E(x)}{x}$	mit E(x) = Ertragsfunktion
Durchschnittsgewinnfunktion		$\overline{G}(x) := \frac{G(x)}{x}$	mit G(x) = Gewinnfunktion