

Repetitions-Aufgaben 2 Differentialrechnung, Integralrechnung

Aufgaben

R2.1 Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

- a) "Die Ableitung (Ableitungsfunktion) einer Funktion ist eine Funktion."
- b) "Die Ableitung (Änderungsrate) einer Funktion an einer bestimmten Stelle ist eine Zahl."
- c) "Die Funktion f hat ein relatives Maximum bei $x = x_1$, falls $f'(x_1) = 0$ und $f''(x_1) > 0$."
- d) "Falls $f''(x_2) = 0$ und $f'''(x_2) < 0$, dann hat die Funktion f einen Wendepunkt bei $x = x_2$."
- e) "Falls $g' = f$, dann ist g eine Stammfunktion von f ."
- f) "f mit $f(x) = 2x + 20$ ist eine Stammfunktion von g mit $g(x) = x^2$."
- g) "f mit $f(x) = 3x$ hat unendlich viele Stammfunktionen."
- h) "Das unbestimmte Integral einer Funktion ist eine Menge von Funktionen."

R2.2 Bestimmen Sie den Funktionswert $f(x_0)$, die erste Ableitung $f'(x_0)$ und die zweite Ableitung $f''(x_0)$ bei x_0 für die folgenden Funktionen f :

- a) $f(x) = 4x^2(x^2 - 1)$
 - i) $x_0 = 0$ ii) $x_0 = -1$
- b) $f(x) = (-3x^2 + 2x - 1) \cdot e^{-x}$
 - i) $x_0 = 0$ ii) $x_0 = -2$
- c) $f(x) = (x^2 + 2) \cdot e^{-3x}$
 - i) $x_0 = 1$ ii) $x_0 = -\frac{1}{3}$

R2.3 Bestimmen Sie für die gegebene Gesamtkostenfunktion $K(x)$ und Ertragsfunktion $E(x)$...

- i) ... die Grenzkostenfunktion $K'(x)$.
- ii) ... die Grenzertragsfunktion $E'(x)$.
- iii) ... die Grenzgewinnfunktion $G'(x)$.
- a) $K(x) = 200 + 40x$ $E(x) = 60x$
- b) $K(x) = 100 + 20x + 5x^2$ $E(x) = 100x - 2x^2$
- c) $K(x) = 50 + 20x^2 + 3e^{4x}$ $E(x) = 200x - e^{-4x^2}$

R2.4 Bestimmen Sie für jede Funktion ...

- i) ... die relativen Maxima und Minima.
- ii) ... die Wendepunkte.
- a) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 1$
- b) $f(x)$ wie in R2.2 a)

R2.5 (siehe nächste Seite)

R2.5 Die Ertragsfunktion für eine Ware ist gegeben durch

$$E(x) = 36x - 0.01x^2$$

Bestimmen Sie den maximalen Ertrag, falls die Produktion auf höchstens 1500 Einheiten begrenzt ist.

R2.6 Angenommen, die Gesamtkosten für ein Produkt sind

$$K(x) = 100 + x^2$$

Die Produktion wievieler Einheiten x führt zu minimalen Durchschnittskosten? Bestimmen Sie die minimalen Durchschnittskosten.

R2.7 Eine Firma kann pro Monat nur 1000 Einheiten herstellen. Die monatlichen Gesamtkosten (in CHF) sind gegeben durch

$$K(x) = 300 + 200x$$

wobei x die hergestellte Stückzahl ist. Angenommen, der Ertrag (in CHF) ist gegeben durch

$$E(x) = 250x - \frac{1}{100}x^2$$

Wieviele Einheiten sollte die Firma herstellen für einen maximalen Gewinn? Bestimmen Sie den maximalen Gewinn.

R2.8 Bestimmen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

a) $\int (x^4 - 3x^3 - 6) \, dx$

b) $\int \left(\frac{1}{2}x^6 - \frac{2}{3x^4} \right) \, dx$

R2.9 Die Funktionsgleichung der dritten Ableitung f''' einer Funktion ist wie folgt gegeben:

$$f'''(x) = 3x + 1$$

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Funktion f , so dass $f''(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f(0) = 2$

R2.10 Angenommen, die Grenzkosten (in CHF) für die Herstellung eines Produktes sind $K'(x) = 5x + 10$, wobei die Fixkosten 800 CHF betragen. Was sind die Gesamtkosten für die Produktion von 20 Einheiten?

R2.11 Die Grenzkosten $K'(x)$ und die Ableitung des Durchschnittsertrages $\bar{E}'(x)$ einer bestimmten Firma sind wie folgt gegeben:

$$K'(x) = 6x + 60$$

$$\bar{E}'(x) = -1$$

Die Gesamtkosten und der Ertrag bei einer Produktion von 10 Einheiten sind 1000 CHF bzw. 1700 CHF.

Wieviele Einheiten führen zu einem maximalen Gewinn? Bestimmen Sie den maximalen Gewinn.

R2.12 (siehe nächste Seite)

R2.12 Die Nachfragefunktion (Preis in CHF) für ein Produkt ist

$$p = f(x) = 49 - x^2$$

und die Angebotsfunktion (Preis in CHF) ist

$$p = g(x) = 4x + 4$$

Bestimmen Sie das Marktgleichgewicht sowie die Konsumenten- und die Produzentenrente beim Marktgleichgewicht.

R2.13 Die Nachfragefunktion (Preis in CHF) für ein Produkt ist

$$p = f(x) = 110 - ax^2$$

und die Angebotsfunktion (Preis in CHF) ist

$$p = g(x) = 2 - \frac{6}{5}x + bx^2$$

mit den unbekanntenen Parametern a und b. Der Gleichgewichtspreis ist 10 CHF, und die Produzentenrente beträgt 73.33 CHF.

Bestimmen Sie die beiden unbekanntenen Parameter a und b.

Lösungen

- R2.1 a) wahr b) wahr c) falsch
 d) wahr e) wahr f) falsch
 g) wahr h) wahr

R2.2 a) $f'(x) = 16x^3 - 8x$
 $f''(x) = 48x^2 - 8$

i) $f(0) = 0$ $f'(0) = 0$ $f''(0) = -8$
 ii) $f(-1) = 0$ $f'(-1) = -8$ $f''(-1) = 40$

b) $f'(x) = (-3x^2 - 4x + 1) \cdot e^x$
 $f''(x) = (-3x^2 - 10x - 3) \cdot e^x$

i) $f(0) = -1$ $f'(0) = 1$ $f''(0) = -3$
 ii) $f(-2) = -17 \cdot e^{-2} = -2.300\dots$
 $f'(-2) = -3 \cdot e^{-2} = -0.406\dots$
 $f''(-2) = 5 \cdot e^{-2} = 0.676\dots$

c) $f'(x) = (-3x^2 + 2x - 6) \cdot e^{-3x}$
 $f''(x) = (9x^2 - 12x + 20) \cdot e^{-3x}$

i) $f(1) = 3 \cdot e^{-3} = 0.149\dots$
 $f'(1) = -7 \cdot e^{-3} = -0.348\dots$
 $f''(1) = 17 \cdot e^{-3} = 0.846\dots$

ii) $f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{19}{9}e = 5.738\dots$
 $f'\left(-\frac{1}{3}\right) = -7e = -19.027\dots$
 $f''\left(-\frac{1}{3}\right) = 25e = 67.957\dots$

R2.3 a) i) $K'(x) = 40$ ii) $E'(x) = 60$
 iii) $G'(x) = 20$

b) i) $K'(x) = 20 + 10x$ ii) $E'(x) = 100 - 4x$
 iii) $G'(x) = 80 - 14x$

c) i) $K'(x) = 40x + 12e^{4x}$ ii) $E'(x) = 200 + 8x e^{-4x^2}$
 iii) $G'(x) = 200 - 40x - 12e^{4x} + 8x e^{-4x^2}$

R2.4 a) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 1$
 $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$
 $f''(x) = 12x - 18$
 $f'''(x) = 12$

i) $f'(x) = 0$ bei $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$
 $f''(x_1) = -6 < 0$ \Rightarrow relatives Maximum bei $x_1 = 1$
 $f''(x_2) = 6 > 0$ \Rightarrow relatives Minimum bei $x_2 = 2$

ii) $f''(x) = 0$ bei $x_3 = \frac{3}{2}$
 $f'''(x_3) = 12 \neq 0$ \Rightarrow Wendepunkt bei $x_3 = \frac{3}{2}$

b) $f(x) = 4x^2(x^2 - 1)$
 $f'(x) = 16x^3 - 8x = 8x(2x^2 - 1)$
 $f''(x) = 48x^2 - 8 = 8(6x^2 - 1)$
 $f'''(x) = 96x$

i) $f'(x) = 0$ bei $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ und $x_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$
 $f''(x_1) = -8 < 0 \Rightarrow$ relatives Maximum bei $x_1 = 0$
 $f''(x_2) = 16 > 0 \Rightarrow$ relatives Minimum bei $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$
 $f''(x_3) = 16 > 0 \Rightarrow$ relatives Minimum bei $x_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

ii) $f''(x) = 0$ bei $x_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}$
 $f'''(x_3) = \frac{96}{\sqrt{6}} \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt bei $x_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}$

R2.5 **Relatives** Maximum bei $x = 1800$ liegt ausserhalb des möglichen Intervalls $0 \leq x \leq 1500$
 $E(1500) = 31'500 \text{ CHF} > E(0) = 0 \text{ CHF}$
 $\Rightarrow E = 31'500 \text{ CHF}$ ist der **absolute** maximale Erlös bei $x = 1500$.

R2.6 $\bar{K}(x) = \frac{K(x)}{x} = \frac{100}{x} + x$
 $\bar{K}(x)$ hat ein **relatives** Minimum bei $x_1 = 10$
 $\bar{K}(10) = 20 \text{ CHF}$
 $\bar{K}(x) > \bar{K}(x_1)$ falls $x \neq x_1$, da es kein relatives Maximum gibt
 $\Rightarrow \bar{K} = 20 \text{ CHF}$ sind die **absoluten** minimalen Durchschnittskosten bei $x = 10$.

R2.7 $G(x) = E(x) - K(x) = -\frac{1}{100}x^2 + 50x - 300$
 $G(x)$ hat ein **relatives** Maximum bei $x_1 = 2500$. Dieses liegt ausserhalb des möglichen Intervalls $0 \leq x \leq 1000$
 $G(1000) = 39'700 \text{ CHF} > G(0) = -300 \text{ CHF}$
 $\Rightarrow G = 39'700 \text{ CHF}$ ist der **absolute** maximale Profit am Endpunkt $x = 1000$.

R2.8 a) $\int (x^4 - 3x^3 - 6) dx = \frac{x^5}{5} - \frac{3x^4}{4} - 6x + C$
 b) $\int \left(\frac{1}{2}x^6 - \frac{2}{3x^4} \right) dx = \frac{x^7}{14} + \frac{2}{9x^3} + C$

R2.9 $f(x) = \frac{x^4}{8} + \frac{x^3}{6} + x + 2$

R2.10 $K(20) = 2000 \text{ CHF}$

Hinweis:

- Bestimmen Sie zuerst die Gesamtkostenfunktion $K(x) \Rightarrow K(x) = \frac{5}{2}x^2 + 10x + 800$

R2.11 $G = 800 \text{ CHF}$ ist der absolute maximale Gewinn bei $x = 15$ Einheiten.

Hinweise:

- Bestimmen Sie die Gesamtkostenfunktion $K(x) \Rightarrow K(x) = 3x^2 + 60x + 100$

- Bestimmen Sie die Durchschnittserlösfunktion $\bar{E}(x) \Rightarrow \bar{E}(x) = -x + C$

- Bestimmen Sie die Erlösfunktion $E(x) \Rightarrow E(x) = -x^2 + 180x$

- Bestimmen Sie die Gewinnfunktion $G(x) \Rightarrow G(x) = -4x^2 + 120x - 100$

- Bestimmen Sie das relative Maximum der Gewinnfunktion $G(x)$.

- Überprüfen Sie, ob das relative Maximum das absolute Maximum ist.

R2.12 Gleichgewichtsmenge $x = 5$
Gleichgewichtspreis $p = 24$ CHF
Konsumentenrente $CS = 83.33$ CHF
Produzentenrente $PS = 50$ CHF

R2.13 $a = 1$
 $b = 0.2$