Aufgaben 17 Bestimmtes Integral
Bestimmtes Integral, Fläche unter einer Kurve, Konsumenten-/ Produzentenrente

Lernziele

- den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung anwenden können.
- ein bestimmtes Integral einer konstanten Funktion/elementaren Potenzfunktion/elementaren Exponentialfunktion bestimmen können.
- den Flächeninhalt zwischen dem Grafen einer elementaren Potenzfunktion und der Abszissenachse bestimmen können.
- eine Konsumenten-/Produzentenrente bestimmen können, wenn die Nachfrage- und Angebotsfunktion elementare Potenzfunktionen sind.

Aufgaben

17.1 Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:

a) $\int_3^4 (2x - 5)\, dx$ b) $\int_0^1 (x^3 + 2x)\, dx$ c) $\int_{-5}^{-3} \left(\frac{x^2}{2} - 4\right) dx$

d) $\int_2^4 \left(x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x - 4\right) dx$ e) $\int_{-2}^{2} \left(2x^2 - \frac{x^4}{8}\right) dx$ f) $\int_{-1}^{1} e^x\, dx$

g) $\int_0^1 e^{2x}\, dx$ h) $\int_{-1}^{1} e^{-3x}\, dx$

17.2 Bestimmen Sie den Flächeninhalt zwischen dem Grafen der Funktion f und der x-Achse im Intervall, auf welchem sich der Graf von f oberhalb der x-Achse befindet, d.h. wo $f(x) \geq 0$.

a) $f(x) = - x^2 + 1$ b) $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$

17.3 Die Nachfragefunktion (Preis in CHF) für ein Produkt ist $p = f(x) = 100 - 4x^2$.
Wie gross ist die Konsumentenrente, falls die Gleichgewichtsmenge 4 Einheiten sind?

17.4 Die Nachfragefunktion (Preis in CHF) für ein Produkt ist $p = f(x) = 34 - x^2$.
Wie gross ist die Konsumentenrente, falls der Gleichgewichtspreis 9 CHF beträgt?

17.5 Die Nachfragefunktion (Preis in CHF) für ein bestimmtes Produkt ist
$$p = f(x) = 81 - x^2$$
und die Angebotsfunktion (Preis in CHF) ist
$$p = g(x) = x^2 + 4x + 11.$$
Bestimmen Sie das Marktgleichgewicht und die Konsumentenrente dort.

17.6 Angenommen, die Angebotsfunktion (Preis in CHF) für eine Ware ist $p = g(x) = 4x^2 + 2x + 2$.
Wie gross ist die Produzentenrente, falls der Gleichgewichtspreis 422 CHF beträgt?

17.7 Bestimmen Sie die Produzentenrente für ein Produkt, falls seine Nachfragefunktion (Preis in CHF)
$$p = f(x) = 81 - x^2$$
ist und seine Angebotsfunktion (Preis in CHF)
$$p = g(x) = x^2 + 4x + 11$$

17.8 (siehe nächste Seite)

17.8 Die Nachfragefunktion (Preis in CHF) für ein bestimmtes Produkt ist

$$p = f(x) = 144 - 2x^2$$

und die Angebotsfunktion (Preis in CHF) ist

$$p = g(x) = x^2 + 33x + 48$$

Bestimmen Sie die Produzentenrente bei Marktgleichgewicht.

17.9 Entscheiden Sie, welche Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie das entsprechende Kästchen an. In jeder Aufgabe a) bis c) ist genau eine Aussage wahr..

a) Das bestimmte Integral einer Funktion ist ...

- ☐ ... eine reelle Zahl.
- ☐ ... eine Funktion.
- ☐ ... eine Menge von Funktionen.
- ☐ ... ein Graf.

b) $\int_a^b f(x)\,dx$ ...

- ☐ ... = F(a) – F(b) wobei F eine Stammfunktion von f ist.
- ☐ ... ist gleich dem Flächeninhalt zwischen dem Grafen von f und der x-Achse im Intervall [a,b], falls $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a,b]$
- ☐ ... = 0 nur falls $f(x) = 0$ für alle $x \in [a,b]$
- ☐ ... kann nicht berechnet werden, wenn nicht alle Stammfunktionen von f bekannt sind.

c) Die Konsumentenrente ist ein Flächeninhalt zwischen ...

- ☐ ... den Grafen von Nachfrage- und Angebotsfunktion.
- ☐ ... der x-Achse und dem Grafen der Nachfragefunktion.
- ☐ ... dem Grafen der Nachfragefunktion und der horizontalen Linie “Preis = Gleichgewichtspreis”.
- ☐ ... der horizontalen Linie “ Preis = Gleichgewichtspreis ” und dem Grafen der Angebotsfunktion.

Lösungen

17.1 a) $\int_3^4 (2x - 5)\,dx = [x^2 - 5x]_3^4 = \left(4^2 - 5\cdot 4\right) - \left(3^2 - 5\cdot 3\right) = 2$

b) $\int_0^1 (x^3 + 2x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} + x^2\right]_0^1 = \left(\frac{1^4}{4} + 1^2\right) - \left(\frac{0^4}{4} + 0^2\right) = \frac{5}{4}$

c) $\int_{-5}^{-3} \left(\frac{x^2}{2} - 4\right) dx = \left[\frac{x^3}{6} - 4x\right]_{-5}^{-3} = \left(\frac{(-3)^3}{6} - 4\cdot(-3)\right) - \left(\frac{(-5)^3}{6} - 4\cdot(-5)\right) = \frac{25}{3}$

d) $\int_2^4 \left(x^3 - \frac{x^2}{2} + 3x - 4\right) dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{6} + \frac{3x^2}{2} - 4x\right]_2^4 = \left(\frac{4^4}{4} - \frac{4^3}{6} + \frac{3\cdot 4^2}{2} - 4\cdot 4\right) - \left(\frac{2^4}{4} - \frac{2^3}{6} + \frac{3\cdot 2^2}{2} - 4\cdot 2\right) = \frac{182}{3}$

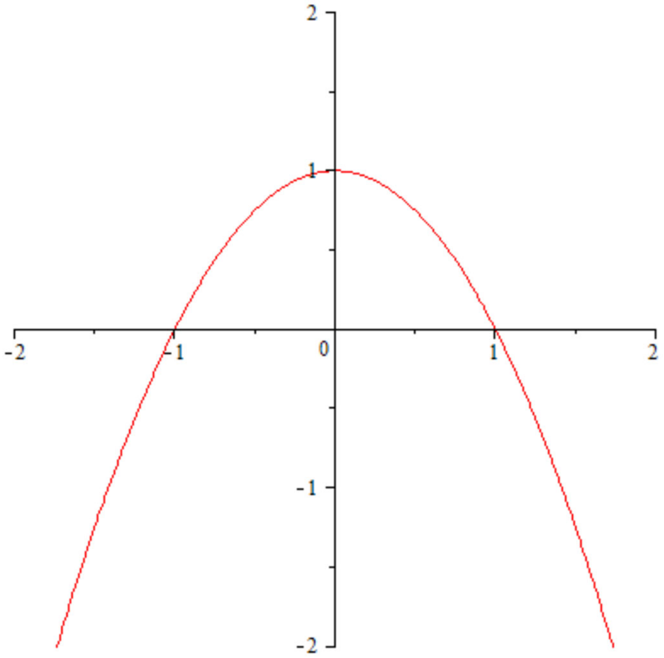
e) $\int_{-2}^2 \left(2x^2 - \frac{x^4}{8}\right) dx = \left[\frac{2x^3}{3} - \frac{x^5}{40}\right]_{-2}^2 = \left(\frac{2\cdot 2^3}{3} - \frac{2^5}{40}\right) - \left(\frac{2\cdot(-2)^3}{3} - \frac{(-2)^5}{40}\right) = \frac{136}{15}$

f) $\int_{-1}^1 e^x\,dx = [e^x]_{-1}^1 = e^1 - e^{-1} = e - \frac{1}{e}$

g) $\int_0^1 e^{2x}\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 = \frac{1}{2}(e^2 - 1)$

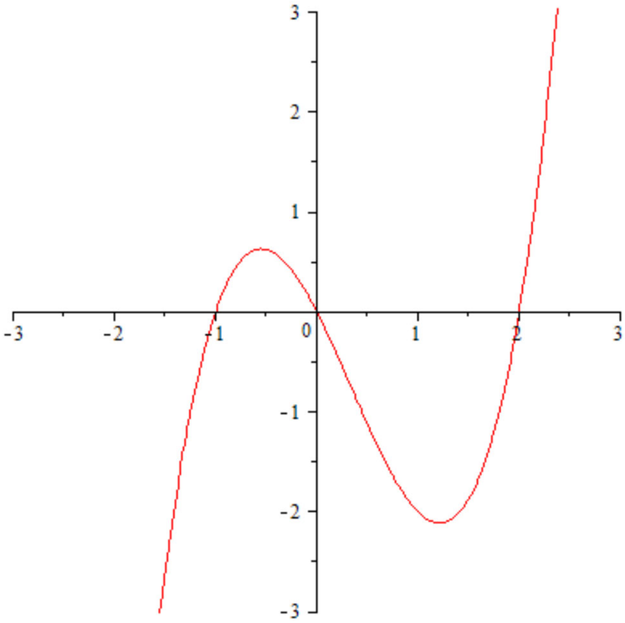
h) $\int_{-1}^1 e^{-3x}\,dx = \left[-\frac{1}{3}e^{-3x}\right]_{-1}^1 = -\frac{1}{3}(e^{-3} - e^3) = \frac{1}{3}\left(e^3 - \frac{1}{e^3}\right)$

17.2 a) $A = \int_{-1}^1 (-x^2 + 1)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x\right]_{-1}^1 = \frac{4}{3}$



b) (siehe nächste Seite)

b) $A = \int_{-1}^{0}(x^3 - x^2 - 2x)\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2\right]_{-1}^{0} = \frac{5}{12}$



Hinweise:
- Bestimmen Sie zuerst die Stellen x, wo der Graf von f die x-Achse schneidet, d.h. wo $f(x) = 0$
- Bestimmen Sie dann das Intervall, auf welchem sich der Graf von f oberhalb der x-Achse befindet, d.h. wo $f(x) \geq 0$

17.3 Konsumentenrente CS = 170.67 CHF

17.4 Konsumentenrente CS = 83.33 CHF

17.5 Gleichgewichtsmenge $x = 5$
Gleichgewichtspreis $p = 56$ CHF
Konsumentenrente CS = 83.33 CHF

17.6 Produzentenrente PS = 2766.67 CHF

17.7 Produzentenrente PS = 133.33 CHF

17.8 Produzentenrente PS = 103.34 CHF

17.9 a) 1. Aussage
b) 2. Aussage
c) 3. Aussage