

Aufgaben 16 Unbestimmtes Integral Stammfunktion, Unbestimmtes Integral, Faktor-/Summenregel

Lernziele

- eine Stammfunktion und das unbestimmte Integral einer konstanten Funktion/elementaren Potenzfunktion/elementaren Exponentialfunktion bestimmen können.
- die Faktorregel, Summenregel anwenden können, um das unbestimmte Integral einer Funktion bestimmen zu können.
- die Kosten-/Ertrags-/Gewinnfunktion bestimmen können, wenn die Durchschnittskosten-/Durchschnittsertrags-/Durchschnittsgewinnfunktion bekannt ist.

Aufgaben

16.1 Bestimmen Sie die folgenden unbestimmten Integrale:

- | | |
|----------------------------|----------------------------|
| a) $\int x^2 dx$ | b) $\int x^3 dx$ |
| c) $\int x^{-5} dx$ | d) $\int \frac{1}{x^2} dx$ |
| e) $\int \frac{1}{x^4} dx$ | f) $\int 4 dx$ |
| g) $\int (-7) dx$ | h) $\int e^x dx$ |
| i) $\int e^{3x} dx$ | j) $\int e^{-x} dx$ |

16.2 Bestimmen Sie das unbestimmte Integral der folgenden Funktionen f:

- | | |
|--|---|
| a) $f(x) = x^5$ | b) $f(x) = 3x^2$ |
| c) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5$ | d) $f(x) = \frac{1}{2}x^5 - \frac{2}{3x^2}$ |
| e) $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 4x - 5$ | f) $f(x) = x^{10} - \frac{1}{2}x^3 - x$ |

16.3 Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen zweier Stammfunktionen F_1 und F_2 von f , so dass die genannten Bedingungen erfüllt sind.

- | | | |
|--------------------------|--------------|---------------|
| a) $f(x) = 10x^2 + x$ | $F_1(0) = 3$ | $F_2(0) = -1$ |
| b) $f(x) = x^3 + 3x + 1$ | $F_1(2) = 5$ | $F_2(4) = -8$ |

16.4 Angenommen, wir kennen die Funktionsgleichung der Ableitung f' einer Funktion f :

$$f'(x) = 3x^2 - 50x + 250$$

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Funktion f , falls ...

- a) ... $f(0) = 500$.
- b) ... $f(10) = 2500$.

16.5 Angenommen, wir kennen die Funktionsgleichung der zweiten Ableitung f'' einer Funktion f :

$$f''(x) = 2x - 1$$

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der ...

- a) ... ersten Ableitung f' , so dass $f'(2) = 4$.
- b) ... Funktion f , so dass $f'(2) = 4$ und $f(1) = -1$.

- 16.6 Angenommen, die monatlichen Grenzkosten (in CHF) für ein Produkt sind $K'(x) = 2x + 100$, und die Fixkosten betragen 200 CHF. Bestimmen Sie die Gesamtkostenfunktion für einen Monat.
- 16.7 Angenommen, die Grenzkosten (in CHF) für ein Produkt sind $K'(x) = 4x + 2$, und die Produktion von 10 Einheiten ergeben Gesamtkosten von 300 CHF. Bestimmen Sie die Gesamtkostenfunktion.
- 16.8 Angenommen, die Grenzkosten (in CHF) für ein Produkt sind $K'(x) = 4x + 40$, und die Gesamtkosten für die Produktion von 25 Einheiten betragen 3000 CHF. Wie hoch sind die Gesamtkosten für die Produktion von 30 Einheiten?
- 16.9 Eine Firma weiss, dass die Grenzkosten für ein Produkt $K'(x) = 3x + 20$ sind und dass der Grenzertrag $E'(x) = 44 - 5x$ ist. Die Gesamtkosten für die Produktion und den Verkauf von 10 Einheiten betragen 370 CHF.
- a) Bestimmen Sie die Gewinnfunktion $G(x)$.
- b) Wie viele Einheiten führen zu einem maximalen Gewinn?
- Hinweis:
- Der Ertrag ist null, falls keine Einheit verkauft wird, also $E(0) = 0$ CHF.

- 16.10 Angenommen, der Grenzertrag $E'(x)$ und die Ableitung der Durchschnittskosten $\bar{K}'(x)$ lauten wie folgt:

$$E'(x) = 300$$
$$\bar{K}'(x) = 2 - \frac{1800}{x^2}$$

Aus der Produktion von 10 Einheiten resultieren Gesamtkosten von 3000 CHF.

- a) Bestimmen Sie die Gesamtkostenfunktion $K(x)$.
- b) Wie viele Einheiten führen zu einem maximalen Gewinn? Bestimmen Sie den maximalen Gewinn.
- 16.11 Entscheiden Sie, welche Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie das entsprechende Kästchen an. In jeder Aufgabe a) bis c) ist genau eine Aussage wahr.
- a) Eine Stammfunktion einer Funktion ist ...
- ... eine reelle Zahl
- ... eine Funktion.
- ... eine Menge von Funktionen.
- ... ein Graf.
- b) Das unbestimmte Integral einer Funktion ist ...
- ... eine reelle Zahl
- ... eine Funktion.
- ... eine Menge von Funktionen.
- ... ein Graf.
- c) Falls $f = g'$, dann ist ...
- ... f eine Stammfunktion von g .
- ... g eine Stammfunktion von f .
- ... f das unbestimmte Integral von g .
- ... g das unbestimmte Integral von f .

Lösungen

16.1 a) $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$ b) $\int x^3 dx = \frac{x^4}{4} + C$
 c) $\int x^{-5} dx = -\frac{1}{4x^4} + C$ d) $\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$
 e) $\int \frac{1}{x^4} dx = -\frac{1}{3x^3} + C$ f) $\int 4 dx = 4x + C$
 g) $\int (-7) dx = -7x + C$ h) $\int e^x dx = e^x + C$
 i) $\int e^{3x} dx = \frac{1}{3}e^{3x} + C$ j) $\int e^{-x} dx = -e^{-x} + C$

16.2 a) $\int f(x) dx = \int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C$
 b) $\int f(x) dx = \int 3x^2 dx = x^3 + C$
 c) $\int f(x) dx = \int (x^3 + 2x^2 - 5) dx = \frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - 5x + C$
 d) $\int f(x) dx = \int \left(\frac{1}{2}x^5 - \frac{2}{3x^2}\right) dx = \frac{x^6}{12} + \frac{2}{3x} + C$
 e) $\int f(x) dx = \int \left(\frac{1}{2}x^3 - 2x^2 + 4x - 5\right) dx = \frac{x^4}{8} - \frac{2x^3}{3} + 2x^2 - 5x + C$
 f) $\int f(x) dx = \int \left(x^{10} - \frac{1}{2}x^3 - x\right) dx = \frac{x^{11}}{11} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^2}{2} + C$

16.3 a) $F_1(x) = \frac{10x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 3$ $F_2(x) = \frac{10x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 1$
 b) $F_1(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} + x - 7$ $F_2(x) = \frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} + x - 100$

Hinweise:

- Bestimmen Sie zuerst das unbestimmte Integral von f.
- Bestimmen Sie dann den Wert der Integrationskonstante, so dass die genannten Bedingungen erfüllt sind.

16.4 a) $f(x) = x^3 - 25x^2 + 250x + 500$
 b) $f(x) = x^3 - 25x^2 + 250x + 1500$

16.5 a) $f'(x) = x^2 - x + 2$
 b) $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 2x - \frac{17}{6}$

16.6 $K(x) = x^2 + 100x + 200$

Hinweise:

- Integrieren Sie zuerst die Grenzkostenfunktion $K'(x) \Rightarrow K(x) = x^2 + 100x + C$ ($C \in \mathbb{R}$)
- Bestimmen Sie die Integrationskonstante, indem Sie die Bedingung $K(0) = 200$ CHF berücksichtigen
 $\Rightarrow C = 200$

16.7 $K(x) = 2x^2 + 2x + 80$

16.8 $K(30) = 3750$ CHF

Hinweis:

- Bestimmen Sie zuerst die Gesamtkostenfunktion $K(x) \Rightarrow K(x) = 2x^2 + 40x + 750$.

16.9 a) $G(x) = -4x^2 + 24x - 20$

Hinweise:

- Bestimmen Sie die Gesamtkostenfunktion $K(x)$ und die Ertragsfunktion $E(x)$

$$\Rightarrow K(x) = \frac{3}{2}x^2 + 20x + 20, E(x) = 44x - \frac{5}{2}x^2$$

- Bestimmen Sie dann die Gewinnfunktion $G(x)$.

b) $x = 3$

Hinweise:

- Bestimmen Sie das relative Maximum der Gewinnfunktion $G(x)$.

- Prüfen Sie nach, ob das relative Maximum das absolute Maximum ist.

16.10 a) $K(x) = 2x^2 + 100x + 1800$

Hinweise:

- Bestimmen Sie zuerst die Durchschnittskostenfunktion $\bar{K}(x) \Rightarrow \bar{K}(x) = 2x + \frac{1800}{x} + C_1$

- Bestimmen Sie dann die Kostenfunktion $K(x)$.

b) $G = 3200$ CHF ist der absolute maximale Gewinn bei $x = 50$ Einheiten.

Hinweise:

- Bestimmen Sie zuerst die Ertragsfunktion $E(x) \Rightarrow E(x) = 300x$

- Bestimmen Sie dann die Gewinnfunktion $G(x) \Rightarrow G(x) = -2x^2 + 200x - 1800$

- Bestimmen Sie das relative Maximum der Gewinnfunktion $G(x)$.

- Prüfen Sie nach, ob das relative Maximum das absolute Maximum ist.

16.11 a) 2. Aussage

b) 3. Aussage

c) 2. Aussage