Aufgaben 15 Anwendungen der Differentialrechnung Relative Maxima/Minima, Wendepunkte

Lernziele

- die relativen Maxima/Minima einer Funktion bestimmen können.
- die Wendepunkte einer Funktion bestimmen können.
- das absolute Maximum/Minimum einer Kosten-/Ertrags-/Gewinnfunktion bestimmen können.
- das absolute Minimum einer Durchschnittskostenfunktion bestimmen können.

Aufgaben

15.1 Bestimmen Sie für jede Funktion …

i) … die relativen Maxima und Minima.

ii) … die Wendepunkte.

a) $f(x) = x^2 - 4$

b) $f(x) = - 8x^3 + 12x^2 + 18x$

c) $s(t) = t^4 - 8t^2 + 16$

d) $f(x) = x\, e^{-x}$

e) * $f(x) = (1 - e^{-2x})^2$

f) * $V(r) = - D\left(\frac{2a}{r} - \frac{a^2}{r^2}\right)$ $(D > 0,\ a > 0)$

15.2 Angenommen, der Gesamtgewinn (in CHF) für eine Ware beträgt

$$G(x) = 2000x + 20x^2 - x^3$$

wobei x die verkaufte Stückzahl ist.

Bestimmen Sie die verkaufte Stückzahl x bei maximalem Gewinn, und bestimmen Sie den maximalen Gewinn.

Hinweise:
- Bestimmen Sie zuerst das relative Maximum.
- Prüfen Sie dann nach, ob das relative Maximum das absolute Maximum ist.

15.3 Angenommen, die Gesamtkosten (in CHF) für eine Ware sind gegeben durch

$$K(x) = \frac{1}{4}x^2 + 4x + 100$$

wobei x die produzierte Stückzahl ist. Wieviele verkaufte Einheiten führen zu minimalen Durchschnittskosten? Bestimmen Sie die minimalen Durchschnittskosten.

15.4 Angenommen, die Produktionskapazität für eine bestimmte Ware kann 30 nicht überschreiten. Der Gesamtgewinn (in CHF) dieser Firma ist

$$G(x) = 4x^3 - 210x^2 + 3600x$$

wobei x die verkaufte Stückzahl ist. Bestimmen Sie die Stückzahl x, welche den Gewinn maximiert.

15.5 (siehe nächste Seite)

15.5 Angenommen, der jährliche Gewinn (in 1000 CHF) eines Ladens ist gegeben durch

$$G(x) = -0.1x^3 + 3x^2$$

wobei x die Anzahl Jahre nach 2010 ist. Bestimmen Sie für diese Modellannahme den Wendepunkt für den Gewinn.

15.6 Entscheiden Sie, welche Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie das entsprechende Kästchen an. In jeder Aufgabe a) bis c) ist genau eine Aussage wahr.

a) Falls f ein relatives Maximum bei $x = x_0$ hat, kann gefolgert werden, dass ...

- ☐ ... $f(x_0) > f(x)$ für jedes $x \neq x_0$
- ☐ ... $f(x_0) > f(x)$ für jedes $x > x_0$
- ☐ ... $f(x_0) > f(x)$ für jedes $x < x_0$
- ☐ ... $f(x_0) > f(x)$ für alle x in einer gewissen Umgebung von x_0

b) Falls $f(x_0) < 0$, $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0$, kann gefolgert werden, dass f ...

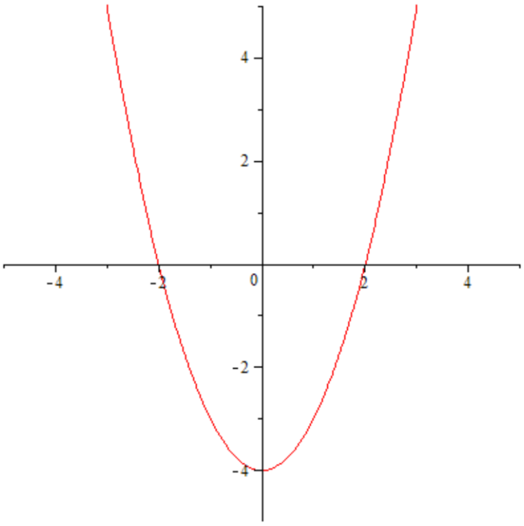
- ☐ ... kein relatives Minimum bei $x = x_0$ hat.
- ☐ ... kein relatives Maximum bei $x = x_0$ hat.
- ☐ ... keinen Wendepunkt bei $x = x_0$ hat.
- ☐ ... einen Wendepunkt bei $x = x_0$ hat.

c) Das absolute Maximum einer Funktion ...

- ☐ ... ist immer ein relatives Maximum.
- ☐ ... kann ein relatives Minimum sein.
- ☐ ... kann ein relatives Maximum sein.
- ☐ ... existiert immer.

Lösungen

15.1 a) $f(x) = x^2 - 4$

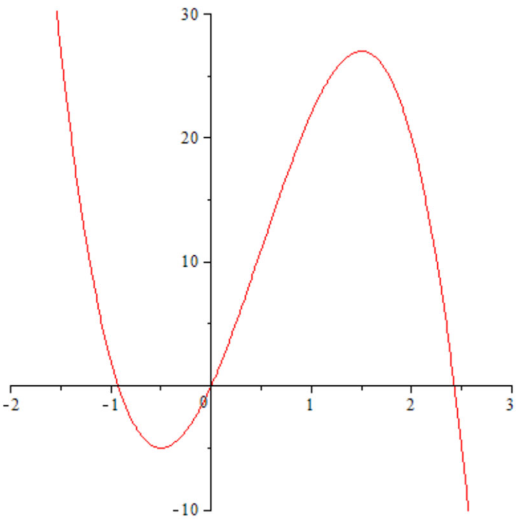


$f'(x) = 2x$
$f''(x) = 2$
$f'''(x) = 0$

i) $f'(x) = 0$ bei $x_1 = 0$
$f''(x_1) = 2 > 0$ ⇒ relatives Minimum bei $x_1 = 0$
kein relatives Maximum

ii) $f''(x) = 2 \neq 0$ für alle x ⇒ kein Wendepunkt

b) $f(x) = -8x^3 + 12x^2 + 18x$



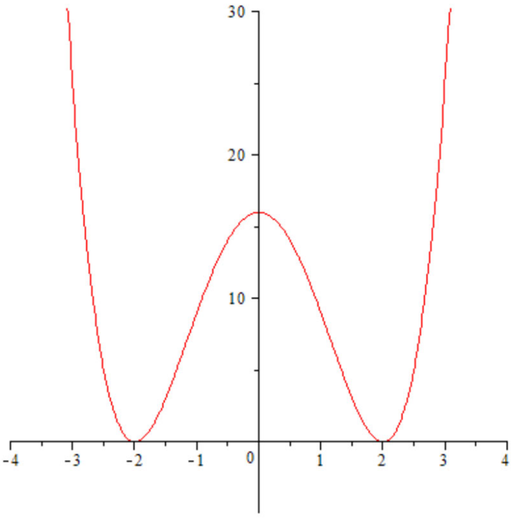
$f'(x) = -24x^2 + 24x + 18$
$f''(x) = -48x + 24$
$f'''(x) = -48$

i) $f'(x) = 0$ bei $x_1 = -\frac{1}{2}$ und $x_2 = \frac{3}{2}$
$f''(x_1) = 48 > 0$ ⇒ relatives Minimum bei $x_1 = -\frac{1}{2}$
$f''(x_2) = -48 < 0$ ⇒ relatives Maximum bei $x_2 = \frac{3}{2}$

ii) $f''(x) = 0$ bei $x_3 = \frac{1}{2}$

$f'''(x_3) = -48 \neq 0$ $\Rightarrow$ Wendepunkt bei $x_3 = \frac{1}{2}$

c) $s(t) = t^4 - 8t^2 + 16$



$s'(t) = 4t^3 - 16t$
$s''(t) = 12t^2 - 16$
$s'''(t) = 24t$

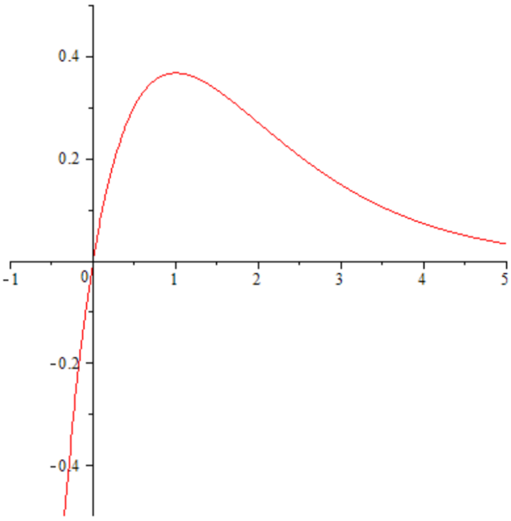
i) $s'(t) = 0$ bei $t_1 = 0$, $t_2 = -2$ und $t_3 = 2$

$s''(t_1) = -16 < 0$ $\Rightarrow$ relatives Maximum bei $t_1 = 0$
$s''(t_2) = 32 > 0$ $\Rightarrow$ relatives Minimum bei $t_2 = -2$
$s''(t_3) = 32 > 0$ $\Rightarrow$ relatives Minimum bei $t_3 = 2$

ii) $s''(t) = 0$ bei $t_4 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$ und $t_5 = \frac{2}{\sqrt{3}}$

$s'''(t_4) = -\frac{48}{\sqrt{3}} \neq 0$ $\Rightarrow$ Wendepunkt bei $t_4 = -\frac{2}{\sqrt{3}}$
$s'''(t_5) = \frac{48}{\sqrt{3}} \neq 0$ $\Rightarrow$ Wendepunkt bei $t_5 = \frac{2}{\sqrt{3}}$

d) $f(x) = x\, e^{-x}$

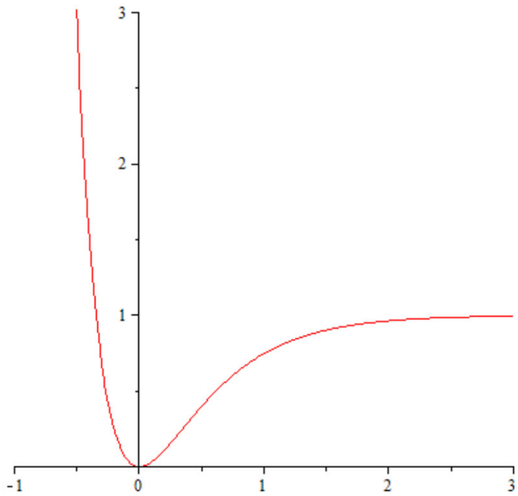


$f'(x) = e^{-x} - x\, e^{-x} = (1 - x)\, e^{-x}$
$f''(x) = -e^{-x} - (1 - x)\, e^{-x} = (x - 2)\, e^{-x}$
$f'''(x) = e^{-x} - (x - 2)\, e^{-x} = (3 - x)\, e^{-x}$

i) $f'(x) = 0$ bei $x_1 = 1$
$f''(x_1) = -\frac{1}{e} < 0$ $\Rightarrow$ relatives Maximum bei $x_1 = 1$
kein relatives Minimum

ii) $f''(x) = 0$ bei $x_2 = 2$
$f'''(x_2) = \frac{1}{e^2} \neq 0$ $\Rightarrow$ Wendepunkt bei $x_2 = 2$

e) * $f(x) = (1 - e^{-2x})^2 = 1 - 2\,e^{-2x} + e^{-4x}$



$f'(x) = 4\,(e^{-2x} - e^{-4x})$
$f''(x) = 8\,(-\,e^{-2x} + 2\,e^{-4x})$
$f'''(x) = 16\,(e^{-2x} - 4\,e^{-4x})$

i) $f'(x) = 0$ bei $x_1 = 0$
$f''(x_1) = 8 > 0$ $\Rightarrow$ relatives Minimum bei $x_1 = 0$
kein relatives Maximum

ii) $f''(x) = 0$ bei $x_2 = \frac{\ln(2)}{2} = 0.34\ldots$
$f'''(x_2) = -\,8 \neq 0$ $\Rightarrow$ Wendepunkt bei $x_2 = 0.34\ldots$

f) * $V'(r) = -\,D\left(-\frac{2a}{r^2} + \frac{2a^2}{r^3}\right) = \frac{2aD}{r^2}\left(1 - \frac{a}{r}\right)$
$V''(r) = -\,D\left(\frac{4a}{r^3} - \frac{6a^2}{r^4}\right) = \frac{2aD}{r^3}\left(\frac{3a}{r} - 2\right)$
$V'''(r) = -\,D\left(-\frac{12a}{r^4} + \frac{24a^2}{r^5}\right) = \frac{12aD}{r^4}\left(1 - \frac{2a}{r}\right)$

i) $V'(r) = 0$ bei $r_1 = a$
$V''(r_1) = \frac{2D}{a^2} > 0$ $\Rightarrow$ relatives Minimum bei $r_1 = a$
kein relatives Maximum

ii) $V''(r) = 0$ bei $r_2 = \frac{3a}{2}$
$V'''(r_2) = -\,\frac{64D}{81a^3} \neq 0$ $\Rightarrow$ Wendepunkt bei $r_2 = \frac{3a}{2}$

15.2 **Relatives** Maximum bei $x_1 = \frac{100}{3}$ $\rightarrow$ 33 oder 34
G(33) = 51'843 CHF
G(34) = 51'816 CHF
$G(x) < G(x_1)$ falls $x \neq x_1$, da es kein relatives Minimum gibt
$\Rightarrow$ G = 51'843 CHF ist der **absolute** maximale Gewinn bei x = 33.

15.3 (siehe nächste Seite)

15.3 $\overline{K}(x) = \frac{K(x)}{x} = \frac{1}{4}x + 4 + \frac{100}{x}$
$\overline{K}(x)$ hat ein **relatives** Minimum bei $x_1 = 20$
$\overline{K}(20) = 14$ CHF
$\overline{K}(x) > \overline{K}(x_1)$ falls $x \neq x_1$, da es kein relatives Maximum gibt
$\Rightarrow$ $\overline{K} = 14$ CHF sind die **absoluten** minimalen Durchschnittskosten bei $x = 20$.

15.4 G(x) hat ein **relatives** Maximum bei $x_1 = 15$ und ein **relatives** Minimum bei $x_2 = 20$.
$G(x_1) = 20'250$ CHF
$G(x) < G(x_1)$ falls $x < x_1$, da es kein relatives Minimum auf dem Intervall $x < x_1$ gibt
$G(30) = 27'000$ CHF $> 20'250$ CHF (!)
$\Rightarrow$ $G = 27'000$ CHF ist der **absolute** maximale Gewinn am Endpunkt $x = 30$.

15.5 G(x) hat einen Wendepunkt bei $x_1 = 10$
$G(10) = 200$
$\Rightarrow$ Wendepunkt (10|200), d.h. wenn $x = 10$ (im Jahr 2020) und $G = 200'000$ CHF

15.6 a) 4. Aussage

b) 3. Aussage

c) 3. Aussage