Aufgaben 14 Ableitungsregeln Faktor-/Summen-/Produktregel, Höhere Ableitungen

Lernziele

- die Faktorregel, Summenregel, Produktregel anwenden können, um die Ableitung einer Funktion zu bestimmen.
- eine höhere Ableitung einer Funktion bestimmen können.

Aufgaben

14.1 Bestimmen Sie die Ableitung mit Hilfe der **Faktorregel**:

a)	$f(x) = 3x^5$	b)	$f(x) = -4x^3$	c)	$f(x) = -x^{10}$
d)	$f(x) = a\cdot x^3$	e)	$f(x) = n\cdot x^{n-1}$	f)	$f(x) = 9\cdot 3^x$
g)	$s(t) = \frac{1}{2}g\cdot t^2$	h)	$S(T) = \alpha\cdot T^4$	i)	$C(x) = (-3x)^3$

14.2 Bestimmen Sie die Ableitung mit Hilfe der **Summenregel**:

a)	$f(x) = x^5 + x^6$	b)	$f(x) = x^{10} - x^9$	c)	$f(x) = 1 + x + 3x^3$
d)	$f(x) = \frac{1}{4}x^4 + 3x^2 - 2$	e)	$f(x) = 3x^2(x - 2)$	f)	$f(x) = - 3x^8 + x^5 - 3x + 99$
g)	$f(x) = ax^2 + bx + c$	h)	$f(x) = 3(a^2 - 2ax + x^2)$	i)	$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{3}{x^3}$
j)	$s(t) = s_0 + v_0t + \frac{1}{2}g\cdot t^2$	k)	$V(r) = -\frac{a}{r} + \frac{b}{r^2}$	l)	$C(n) = C_0(1 + nr)$

14.3 Bestimmen Sie die Ableitung mit Hilfe der **Produktregel**:

a)	$f(x) = x\cdot e^x$	b)	$f(x) = x^3\cdot 3^x$
c)	$f(x) = - 2x^5(x - 1)$	d)	$f(x) = (2x - 1)\cdot e^x$
e)	$f(x) = (2x - 1)(- 3x^2 - x + 1)$	f)	$f(x) = 3(1 - x^2)(x^{10} - x^9)$
g)	$V(r) = e^r\left(a\cdot r^2 - \frac{b}{r^3}\right)$	h)	$T(V) = \frac{1}{n\cdot R}\left(p + \frac{a\cdot n^2}{V^2}\right)(V - n\cdot b)$

14.4 Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Exponentialfunktionen:

a)	$f(x) = e^{4x}$	b)	$f(x) = e^{-x}$
c)	$f(x) = e^{1-\frac{x}{2}}$	d)	$f(x) = e^{-x^2}$
e)	$f(x) = e^{x^2-2x+5}$		

14.5 Bestimmen Sie die Ableitung mit Hilfe geeigneter Ableitungsregeln, und vereinfachen Sie den Ausdruck so weit wie möglich:

a)	$f(x) = (x - 2)\, e^{2x}$	b)	$f(x) = (2 - x^2)\, e^{-x}$
c)	$f(x) = (3x^3 - 2x^2 + x - 1)\, e^{-2x}$	d)	$f(x) = x^2\, e^{-x^2-2x}$
e)	$f(x) = ax\, e^{-\frac{x^2}{2}}$	f)	$P(v) = av^2\, e^{-bv^2}$

14.6 (siehe nächste Seite)

14.6 Bestimme Sie die Ableitung (Änderungsrate) der angegebenen Funktion an der angegebenen Stelle:

a) f in 14.1 b) $x = 2$ b) s in 14.1 g) $t = 4$

c) f in 14.2 g) $x = -1$ d) f in 14.5 e) $x = 0$

14.7 Bestimmen Sie die zweite und die dritte Ableitung der Funktion in der Aufgabe …

a) … 14.1 a) b) … 14.2 g)

c) … 14.3 a) d) … 14.4 d)

e) … 14.5 b) f) … 14.5 e)

14.8 Bestimmen Sie die angegebenen höheren Ableitungen:

a) $f''(-1)$ für die Funktion f in 14.1 a)

Hinweis:
- Sie haben in 14.7 a) bereits $f''(x)$ bestimmt.

b) $f'''(2)$ für die Funktion f in 14.5 e)

Hinweis:
- Sie haben in 14.7 f) bereits $f'''(x)$ bestimmt.

14.9 Entscheiden Sie, welche Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie das entsprechende Kästchen an. In jeder Aufgabe a) bis c) ist genau eine Aussage wahr.

a) Die dritte Ableitung einer Funktion ist eine ...

- ☐ ... konstante Funktion, falls die zweite Ableitung eine quadratische Funktion ist.
- ☐ ... quadratische Funktion, falls die zweite Ableitung eine lineare Funktion ist.
- ☐ ... lineare Funktion, falls die erste Ableitung eine quadratische Funktion ist.
- ☐ ... konstante Funktion, falls die erste Ableitung eine quadratische Funktion ist.

b) Die Ableitung ...

- ☐ ... eines Produkts ist das Produkt der Ableitungen der einzelnen Faktoren.
- ☐ ... eines Produkts ist die Summe der Ableitungen der einzelnen Faktoren.
- ☐ ... einer Summe ist die Summe der Ableitungen der einzelnen Summanden.
- ☐ ... einer Konstanten ist die Konstante selbst.

c) Für $f(x) = c\cdot g(x)\cdot h(x)$ gilt $f'(x) = ...$

- ☐ ... 0
- ☐ ... $c\cdot g'(x)\cdot h'(x)$
- ☐ ... $c\cdot g(x)\cdot h'(x) + c\cdot g'(x)\cdot h(x)$
- ☐ ... $c\cdot g'(x)\cdot h'(x) + c\cdot g(x)\cdot h(x)$

Lösungen

14.1 a) $f'(x) = 3 \cdot 5x^4 = 15x^4$

b) $f'(x) = (-4)\ 3x^2 = -12x^2$

c) $f'(x) = (-1)\ 10x^9 = -10x^9$

d) $f'(x) = a \cdot 3x^2 = 3ax^2$

Hinweis:
- a ist eine Konstante.

e) $f'(x) = n(n-1)x^{n-2}$

f) $f'(x) = 9 \cdot 3^x \cdot \ln(3)$

g) $s'(t) = \frac{g}{2}\ 2t = gt$

Hinweise:
- Der Name der Funktion ist s, und die Variable ist t.
- g ist eine Konstante.

h) $S'(T) = \alpha \cdot 4T^3 = 4\alpha T^3$

i) $C'(x) = -\ 81x^2$

14.2

a)	$f'(x) = 5x^4 + 6x^5$	b)	$f'(x) = 10x^9 - 9x^8$	c)	$f'(x) = 1 + 9x^2$
d)	$f'(x) = x^3 + 6x$	e)	$f'(x) = 9x^2 – 12x$	f)	$f'(x) = -\ 24x^7 + 5x^4 - 3$
g)	$f'(x) = 2ax + b$	h)	$f'(x) = -\ 6a + 6x$	i)	$f'(x) = x^2 + \frac{9}{x^4}$
j)	$s'(t) = v_0 + gt$	k)	$V'(r) = \frac{a}{r^2} - \frac{2b}{r^3}$	l)	$C'(n) = C_0 \cdot r$

14.3 a) $f'(x) = e^x + x \cdot e^x$

b) $f'(x) = 3x^2 \cdot 3^x + x^3 \cdot 3^x \cdot \ln(3)$

c) $f'(x) = -\ 2(5x^4(x - 1) + x^5)$

d) $f'(x) = 2 \cdot e^x + (2x - 1) \cdot e^x$

e) $f'(x) = 2(-\ 3x^2 - x + 1) + (2x - 1)\ (-\ 6x - 1)$

f) $f'(x) = 3(-\ 2x(x^{10} - x^9) + (1 - x^2)\ (10x^9 - 9x^8))$

g) $V'(r) = e^r \left(a \cdot r^2 - \frac{b}{r^3}\right) + e^r \left(2a \cdot r + \frac{3b}{r^4}\right)$

Hinweise:
- V ist der Name der Funktion, und r ist die Variable.
- a und b sind Konstanten.

h) $T'(V) = \frac{1}{n \cdot R}\left(-\frac{2a \cdot n^2}{V^3}\,(V - n \cdot b) + \left(p + \frac{a \cdot n^2}{V^2}\right)\right)$

Hinweise:
- T ist der Name der Funktion, und V ist die Variable.
- n, R, p, a und b sind Konstanten.

14.4 a) $f'(x) = 4\ e^{4x}$

b) $f'(x) = (-1)\ e^{-x} = -\ e^{-x}$

c) $f'(x) = -\frac{1}{2}\, e^{1 - \frac{x}{2}}$

d) $f'(x) = -\ 2x \cdot e^{-x^2}$

e) $f'(x) = (2x - 2)\ e^{x^2 - 2x + 5}$

14.5 a) $f'(x) = e^{2x} + (x - 2)\, 2\, e^{2x} = (2x - 3)\, e^{2x}$

b) $f'(x) = -\,2x\, e^{-x} + (2 - x^2)\,(-1)\, e^{-x} = (x^2 - 2x - 2)\, e^{-x}$

c) $f'(x) = (9x^2 - 4x + 1)\, e^{-2x} + (3x^3 - 2x^2 + x - 1)\,(-2)\, e^{-2x} = (-\,6x^3 + 13x^2 - 6x + 3)\, e^{-2x}$

d) $f'(x) = 2x\, e^{-x^2-2x} + x^2(-\,2x - 2)\, e^{-x^2-2x} = 2x\,(1 - x - x^2)\, e^{-x^2-2x}$

e) $f'(x) = a\left(e^{-\frac{x^2}{2}} + x\,(-x)\, e^{-\frac{x^2}{2}}\right) = a\,(1 - x^2)\, e^{-\frac{x^2}{2}}$

f) $P'(v) = a\left(2v\, e^{-bv^2} + v^2(-2bv)\, e^{-bv^2}\right) = 2av\,(1 - bv^2)\, e^{-bv^2}$

14.6 a) $f'(2) = -\,48$ b) $s'(4) = 4g$

c) $f'(-1) = -\,2a + b$ d) $f'(0) = a$

14.7 a) 14.1 a)
$f''(x) = 15\cdot 4x^3 = 60x^3$
$f'''(x) = 60\cdot 3x^2 = 180x^2$

b) 14.2 g)
$f''(x) = 2a\cdot 1 = 2a$
$f'''(x) = 0$

c) 14.3 a)
$f''(x) = e^x + (e^x + x\cdot e^x) = (x + 2)\, e^x$
$f'''(x) = e^x + (x + 2)\, e^x = (x + 3)\, e^x$

d) 14.4 d)
$f''(x) = -2\left(e^{-x^2} + x\,(-\,2x)\, e^{-x^2}\right) = 2\,(2x^2 - 1)\, e^{-x^2}$
$f'''(x) = 2\left(4x\, e^{-x^2} + (2x^2 - 1)(-\,2x)\, e^{-x^2}\right) = 4x\,(-\,2x^2 + 3)\, e^{-x^2}$

e) 14.5 b)
$f''(x) = (2x - 2)\, e^{-x} + (x^2 - 2x - 2)\,(-1)\, e^{-x} = (4x - x^2)\, e^{-x}$
$f'''(x) = (4 - 2x)\, e^{-x} + (4x - x^2)\,(-1)\, e^{-x} = (x^2 - 6x + 4)\, e^{-x}$

f) 14.5 e)
$f''(x) = a\left(-\,2x\, e^{-\frac{x^2}{2}} + (1 - x^2)\,(-x)\, e^{-\frac{x^2}{2}}\right) = a\,(x^3 - 3x)\, e^{-\frac{x^2}{2}}$
$f'''(x) = a\left((3x^2 - 3)\, e^{-\frac{x^2}{2}} + (x^3 - 3x)\,(-x)\, e^{-\frac{x^2}{2}}\right) = a\,(-\,x^4 + 6x^2 - 3)\, e^{-\frac{x^2}{2}}$

14.8 a) $f''(-1) = -\,60$

b) $f'''(2) = a(-16 + 6\cdot 4 - 3)\, e^{-\frac{4}{2}} = \frac{5a}{e^2}$

14.9 a) 4. Aussage

b) 3. Aussage

c) 3. Aussage