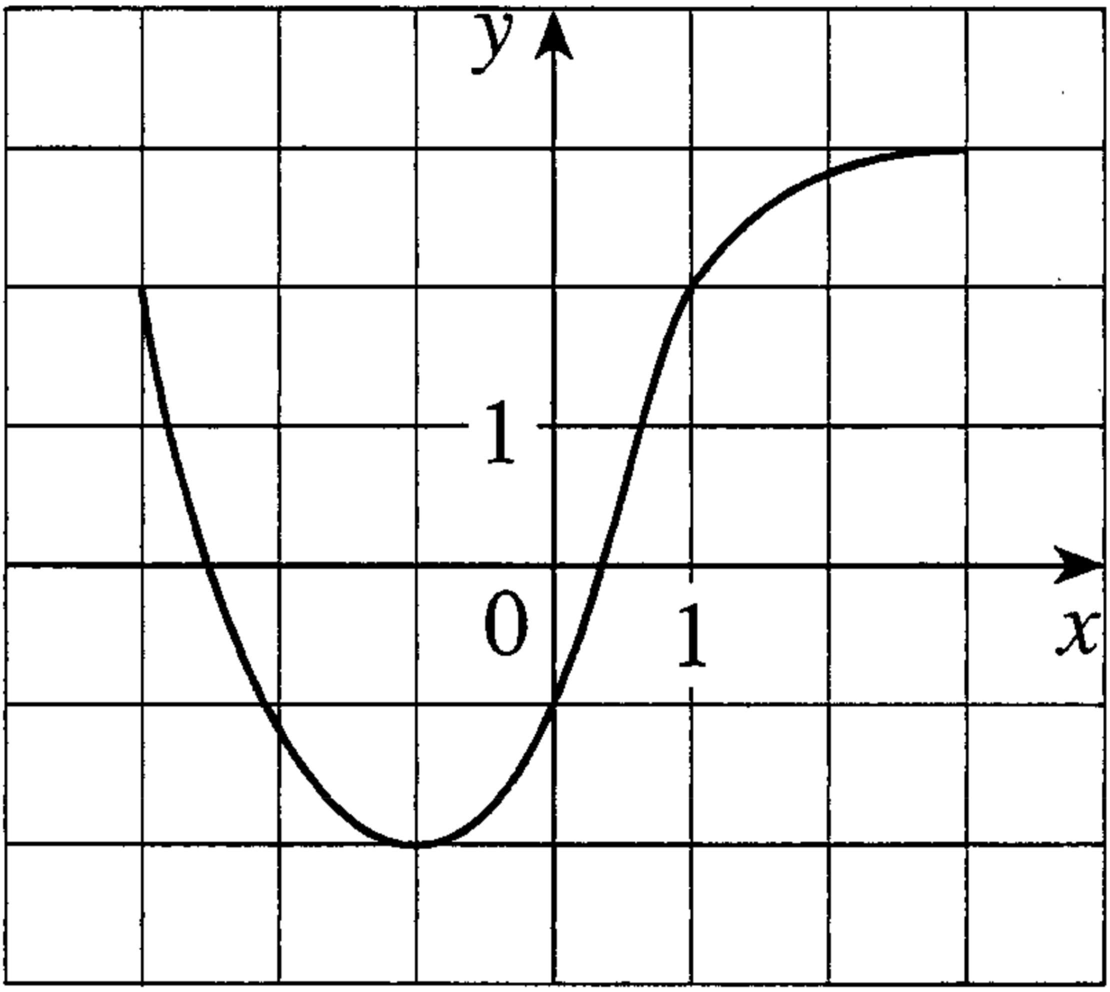
Aufgaben 13 Ableitung
Ableitung (Änderungsrate), Ableitung (Ableitungsfunktion) einer konstanten Funktion/Potenz-/Exponentialfunktion

Lernziele

- eine Ableitung (Änderungsrate) einer Funktion aus dem Grafen der Funktion abschätzen können.
- eine Ableitung (Änderungsrate) einer konstanten/linearen Funktion angeben können.
- die Ableitung (Ableitungsfunktion) einer konstanten/linearen Funktion bestimmen können.
- die Ableitung (Ableitungsfunktion) einer elementaren Polynomfunktion/Exponentialfunktion bestimmen können.
- eine Ableitung (Änderungsrate) einer elementaren Polynomfunktion/Exponentialfunktion bestimmen können.

Aufgaben

13.1 Gegeben ist der Graf einer Funktion f:



Schätzen Sie die Ableitung (Änderungsrate) $f'(x_0)$ an der gegebenen Stelle x_0 ab:

a) $x_0 = -1$ b) $x_0 = 0$

c) $x_0 = 1$ d) $x_0 = -2$

Hinweise:
- Zeichnen Sie die Tangente an den Grafen von f an der gegebenen Stelle x_0.
- Schätzen Sie die Steigung der Tangente ab.

13.2 Der Graf einer konstanten oder linearen Funktion ist eine Gerade. Daher ist die “Tangente” an den Grafen durch irgendeinen Punkt des Grafen der Graf selbst.

Bearbeiten Sie für jede der folgenden Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto y = f(x) = ...$ die folgenden Teilaufgaben:

i) Zeichnen Sie den Grafen von f.

ii) Geben Sie die Ableitung (Änderungsrate) $f'(x_0)$ an der gegebenen Stelle x_0 an.

a) $f(x) = 3$ $x_0 = 2$

b) $f(x) = c$ $(c \in \mathbb{R})$ irgendein $x_0 \in \mathbb{R}$

c) $f(x) = 2x - 3$ $x_0 = 4$

d) $f(x) = mx + q$ $(m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, q \in \mathbb{R})$ irgendein $x_0 \in \mathbb{R}$

e) * $f(x) = |x|$ irgendein $x_0 \in \mathbb{R}$

13.3 Bestimmen Sie $f'(x)$:

a) $f(x) = 3$ b) $f(x) = 0$ c) $f(x) = -1$

d) $f(x) = x^3$ e) $f(x) = x^4$ f) $f(x) = x^5$

g) $f(x) = x^{17}$ h) $f(x) = x^{200}$ i) $f(x) = x^{100'001}$

j) $f(x) = x^{-1}$ k) $f(x) = x^{-2}$ l) $f(x) = x^{-17}$

m) $f(x) = \frac{1}{x}$ n) $f(x) = \frac{1}{x^3}$ o) $f(x) = \frac{1}{x^{99}}$

13.4 Bestimmen Sie $f'(x)$:

a) $f(x) = 3^x$ b) $f(x) = 5^x$ c) $f(x) = 18^x$

d) $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$ e) $f(x) = \left(\frac{13}{17}\right)^x$ f) $f(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$

g) $f(x) = \left(\frac{1}{e}\right)^x$ h) * $f(x) = \left(\frac{3}{e}\right)^x$ i) * $f(x) = \left(\frac{e}{3}\right)^x$

13.5 Bestimmen Sie die Ableitung (Änderungsrate) $f'(x_0)$ der Funktion f an der angegebenen Stelle x_0:

a) $f(x) = x$

i) $x_0 = 0$ ii) $x_0 = 1$ iii) $x_0 = -2$

b) $f(x) = x^5$

i) $x_0 = 0$ ii) $x_0 = 2$ iii) $x_0 = -\frac{2}{3}$

c) $f(x) = x^{-4}$

i) $x_0 = -1$ ii) $x_0 = -\frac{4}{3}$ iii) $x_0 = 0$

d) $f(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

i) $x_0 = 0$ ii) $x_0 = 1$ iii) $x_0 = -2$

13.6 * (siehe nächste Seite)

13.6 * Die Ableitung (Änderungsrate) $f'(x_0)$ von f an der Stelle x_0 kann bestimmt werden, indem man die Sekante durch die Punkte $A(x_0 \mid f(x_0))$ und $B(x_0+\Delta x \mid f(x_0+\Delta x))$ des Grafen von f betrachtet. Die Steigung dieser Sekante strebt nach der Steigung der Tangente durch $A(x_0 \mid f(x_0))$, wenn Δx gegen 0 strebt.

Im Unterricht wurde gezeigt, wie man $f'(x_0)$ für die quadratische Funktion $f(x) = x^2$ bestimmt.

Finden Sie $f'(x_0)$ für die folgenden Funktionen f:

a) $f(x) = x^3$ b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$

13.7 Entscheiden Sie, welche Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie das entsprechende Kästchen an. In jeder Aufgabe a) bis c) ist genau eine Aussage wahr.

a) Die Ableitung (Änderungsrate) einer Funktion f an der Stelle x_0 ist ...

- ☐ ... eine reelle Zahl.
- ☐ ... eine Funktion.
- ☐ ... eine Tangente.
- ☐ ... ein Graf.

b) Die Ableitung (Ableitungsfunktion) f ' einer Funktion f ist ...

- ☐ ... eine reelle Zahl.
- ☐ ... eine Funktion.
- ☐ ... eine Tangente.
- ☐ ... ein Graf.

c) $f'(x_0)$ ist die Steigung der ...

- ☐ ... Sekante durch die Punkte $(0|0)$ und $(x_0|f(x_0))$.
- ☐ ... Sekante durch die Punkte $(x_0+\Delta x|f(x_0+\Delta x))$ und $(x_0|f(x_0))$.
- ☐ ... Tangente an den Grafen von f durch $(x_0|f(x_0))$.
- ☐ ... Tangente an den Grafen von f ' durch $(x_0|f(x_0))$.

Lösungen

13.1	a)	$f'(-1) \approx 0$	b)	$f'(0) \approx 2$
	c)	$f'(1) \approx \frac{3}{2}$	d)	$f'(-2) \approx -\frac{5}{3}$

13.2	a)	i)	...
		ii)	$f'(2) = 0$
	b)	i)	...
		ii)	$f'(x_0) = 0$
	c)	i)	...
		ii)	$f'(4) = 2$
	d)	i)	...
		ii)	$f'(x_0) = m$
	e) *	i)	...
		ii)	$f'(x_0) = \begin{cases} 1 & (x_0 > 0) \\ -1 & (x_0 < 0) \\ \text{nicht definiert} & (x_0 = 0) \end{cases}$

13.3	a)	$f'(x) = 0$	b)	$f'(x) = 0$	c)	$f'(x) = 0$
	d)	$f'(x) = 3x^2$	e)	$f'(x) = 4x^3$	f)	$f'(x) = 5x^4$
	g)	$f'(x) = 17x^{16}$	h)	$f'(x) = 200x^{199}$	i)	$f'(x) = 100'001x^{100'000}$
	j)	$f'(x) = -x^{-2}$	k)	$f'(x) = -2x^{-3}$	l)	$f'(x) = -17x^{-18}$
	m)	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	n)	$f'(x) = -\frac{3}{x^4}$	o)	$f'(x) = -\frac{99}{x^{100}}$

13.4	a)	$f'(x) = 3^x \ln(3)$	b)	$f'(x) = 5^x \ln(5)$	c)	$f'(x) = 18^x \ln(18)$
	d)	$f'(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x \ln\left(\frac{2}{3}\right)$	e)	$f'(x) = \left(\frac{13}{17}\right)^x \ln\left(\frac{13}{17}\right)$		
	f)	$f'(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x \ln\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{\ln(4)}{4^x}$				

Hinweis:
- Man kann Logarithmengesetze (siehe Formelsammlung) anwenden, um das Resultat zu vereinfachen.

	g)	$f'(x) = -\frac{1}{e^x}$	h) *	$f'(x) = \left(\frac{3}{e}\right)^x (\ln(3) - 1)$	i) *	$f'(x) = \left(\frac{e}{3}\right)^x (1 - \ln(3))$

13.5	a)	$f'(x) = 1$					
		i)	$f'(0) = 1$	ii)	$f'(1) = 1$	iii)	$f'(-2) = 1$
	b)	$f'(x) = 5x^4$					
		i)	$f'(0) = 0$	ii)	$f'(2) = 80$	iii)	$f'\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{80}{81}$
	c)	$f'(x) = -\frac{4}{x^5}$					
		i)	$f'(-1) = 4$	ii)	$f'\left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{243}{256}$	iii)	$f'(0)$ ist nicht definiert
	d)	(siehe nächste Seite)					

d) $f'(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x \ln\left(\frac{2}{3}\right)$

i) $f'(0) = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$ ii) $f'(1) = \frac{2}{3}\ln\left(\frac{2}{3}\right)$ iii) $f'(-2) = \frac{9}{4}\ln\left(\frac{2}{3}\right)$

13.6 * a) $f'(x_0) = 3x_0^2$ b) $f'(x_0) = -\frac{2}{x_0^3}$

13.7 a) 1. Aussage

b) 2. Aussage

c) 3. Aussage