

Aufgaben 11 Exponentialfunktion und -gleichungen Zinseszins, Nomineller/Effektiver Jahreszinssatz

Lernziele

- das zukünftige Kapital berechnen können, welches bei unterjähriger Verzinsung angelegt ist.
- die Begriffe "nomineller Jahreszinssatz" und "effektiver Jahreszinssatz" kennen und verstehen.
- ausgewählte Zinseszinsaufgaben bearbeiten können.

Aufgaben

- 11.1 Ein Anfangskapital $K_0 = 1000$ CHF wird zu einem nominellen Jahreszinssatz $i = 10\%$ angelegt, wobei die Verzinsung ...
- a) ... vierteljährlich erfolgt.
 - i) Bestimmen Sie das Kapital K_1 , K_2 und K_3 nach einem, zwei und drei Jahr(en).
 - ii) Bestimmen Sie den effektiven Jahreszinssatz i^* .
 - b) ... monatlich erfolgt.
 - i) Bestimmen Sie das Kapital K_1 , K_2 und K_3 nach einem, zwei und drei Jahr(en).
 - ii) Bestimmen Sie den effektiven Jahreszinssatz i^* .
- 11.2 Bestimmen Sie den effektiven Jahreszinssatz für einen nominalen Jahreszinssatz von 6% und einer ...
- a) ... jährlichen Verzinsung.
 - b) ... halbjährlichen Verzinsung.
 - c) ... vierteljährlichen Verzinsung.
 - d) ... monatlichen Verzinsung.
 - e) ... täglichen Verzinsung (1 Jahr = 360 Tage).
- 11.3 Was ist der zukünftige Wert, wenn 3200 CHF 5 Jahre lang zu 8% bei vierteljährlicher Verzinsung angelegt werden?
- 11.4 Bestimmen Sie den Zins, den 10'000 CHF tragen, wenn das Geld 3 Jahre lang zu 9% bei monatlicher Verzinsung angelegt werden.
- 11.5 Welchen Geldbetrag müssen Eltern auf ein Konto einzahlen, welches bei nominell 10% monatlich verzinst wird, damit das Geld für die Ausbildung ihres Sohnes in 18 Jahren auf 40'000 CHF anwächst?
- 11.6 Ein Anfangskapital von 1000 CHF steigt auf 1500 CHF an, wenn es 10 Jahre lang zu einem unbekanntem Jahreszinssatz und vierteljährlicher Verzinsung angelegt wird.
- Bestimmen Sie den ...
- a) ... nominellen Jahreszinssatz.
 - b) ... effektiven Jahreszinssatz.
- 11.7 Wie lange (in Monaten) müsste ein Kapital bei 6% und monatlicher Verzinsung angelegt werden, um seinen Wert zu verdoppeln?

- 11.8 Frau Good möchte 100'000 CHF investieren. Ihre Bank unterbreitet ihr zwei Angebote:
- A effektiver Jahreszinssatz von 8.5%
 - B nomineller Jahreszinssatz von 8%, monatliche Verzinsung
- Welches Angebot ist besser, A oder B?
- 11.9 Wie lange (in Jahren) müssten 1000 CHF zu 2.5% bei täglicher Verzinsung angelegt werden, um einen Zins von 250 CHF zu erzielen?
- 11.10 Zu welchem nominellen Jahreszinssatz müssten 20'000 CHF angelegt werden, um bei vierteljährlicher Verzinsung nach 7 Jahren 26'425.82 CHF zu erzielen?
- 11.11 Ein Paar benötigt 150'000 CHF für eine erste Anzahlung an ihr Eigenheim. Angenommen, sie investieren die 100'000 CHF, die sie jetzt haben, zu 8% bei vierteljährlicher Verzinsung. Wie lange würde es dauern, bis das Geld auf 150'000 CHF angewachsen ist?
- 11.12 Entscheiden Sie, welche Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie das entsprechende Kästchen an. In jeder Aufgabe a) bis c) ist genau eine Aussage wahr.
- a) Der nominale Jahreszinssatz ...
- ... ist allgemein höher als der effektive Jahreszinssatz.
 - ... ist gleich hoch wie der effektive Jahreszinssatz, falls die Verzinsung jährlich erfolgt.
 - ... ist halb so hoch wie der effektive Jahreszinssatz, falls die Verzinsung halbjährlich erfolgt.
 - ... hängt von der Zinsperiode ab.
- b) Bei einer Anlage mit Zinseszins und m ($m > 1$) Zinsperioden pro Jahr ...
- ... ist der Wachstumsfaktor m mal höher als bei einer einzigen Verzinsung pro Jahr.
 - ... ist der effektive Jahreszinssatz m mal tiefer als bei einer einzigen Verzinsung pro Jahr.
 - ... wächst das Kapital schneller als bei einer einzigen Verzinsung pro Jahr.
 - ... wächst das Kapital langsamer als bei einer einzigen Verzinsung pro Jahr.
- c) Wenn ein Anfangskapital von 1000 CHF bei halbjährlicher Verzinsung in einem Jahr auf 1100 CHF anwächst, dann ist der ...
- ... effektive Jahreszins tiefer als 10%.
 - ... effektive Jahreszins höher als 10%.
 - ... nominale Jahreszins tiefer als 10%.
 - ... nominale Jahreszins höher als 10%.

Lösungen

11.1 a) i) $K_n = K_0 \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn}$
 $K_1 = 1000 \left(1 + \frac{0.1}{4}\right)^{4 \cdot 1} \text{ CHF} = 1103.81 \text{ CHF (gerundet)}$
 $K_2 = 1000 \left(1 + \frac{0.1}{4}\right)^{4 \cdot 2} \text{ CHF} = 1218.40 \text{ CHF (gerundet)}$
 $K_3 = 1000 \left(1 + \frac{0.1}{4}\right)^{4 \cdot 3} \text{ CHF} = 1344.89 \text{ CHF (gerundet)}$
 ii) $i^* = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1 = \left(1 + \frac{0.1}{4}\right)^4 - 1 = 0.1038 = 10.38\% \text{ (gerundet)}$

b) i) $K_n = K_0 \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn}$
 $K_1 = 1000 \left(1 + \frac{0.1}{12}\right)^{12 \cdot 1} \text{ CHF} = 1104.71 \text{ CHF (gerundet)}$
 $K_2 = 1000 \left(1 + \frac{0.1}{12}\right)^{12 \cdot 2} \text{ CHF} = 1220.39 \text{ CHF (gerundet)}$
 $K_3 = 1000 \left(1 + \frac{0.1}{12}\right)^{12 \cdot 3} \text{ CHF} = 1348.18 \text{ CHF (gerundet)}$
 ii) $i^* = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1 = \left(1 + \frac{0.1}{12}\right)^{12} - 1 = 0.1047 = 10.47\% \text{ (gerundet)}$

11.2 $i^* = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1$ $i = 6\% = 0.06$

- a) $m = 1$ $i^* = 6\%$
- b) $m = 2$ $i^* = 6.09\%$
- c) $m = 4$ $i^* = 6.136\% \text{ (gerundet)}$
- d) $m = 12$ $i^* = 6.168\% \text{ (gerundet)}$
- e) $m = 360$ $i^* = 6.183\% \text{ (gerundet)}$

11.3 $K_n = K_0 \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn}$ mit $K_0 = 3200 \text{ CHF}$, $i = 8\%$, $m = 4$, $n = 5$
 $\Rightarrow K_5 = 4755.03 \text{ CHF (gerundet)}$

11.4 Zins = $K_n - K_0$
 $K_n = K_0 \left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn}$ mit $K_0 = 10'000 \text{ CHF}$, $i = 9\%$, $m = 12$, $n = 3$
 $\Rightarrow K_n - K_0 = 3086.45 \text{ CHF (gerundet)}$

11.5 $K_0 = \frac{K_n}{\left(1 + \frac{i}{m}\right)^{mn}}$ mit $K_n = 40'000 \text{ CHF}$, $i = 10\%$, $m = 12$, $n = 18$
 $\Rightarrow K_0 = 6661.46 \text{ CHF (gerundet)}$

11.6 a) $i = m \left(\sqrt[mn]{\frac{K_n}{K_0}} - 1 \right)$ mit $K_0 = 1000 \text{ CHF}$, $K_n = 1500 \text{ CHF}$, $m = 4$, $n = 10$
 $\Rightarrow i = 4.08\% \text{ (gerundet)}$

b) $i^* = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1$
 $\Rightarrow i^* = 4.14\% \text{ (gerundet)}$

11.7 $n = \frac{\log_a\left(\frac{K_n}{K_0}\right)}{m \cdot \log_a\left(1 + \frac{i}{m}\right)}$ mit $\frac{K_n}{K_0} = 2$, $i = 6\%$, $m = 12$, $a := 10$ (irgendein $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ wäre möglich)
 $\Rightarrow n = 11.58\dots$
 $\Rightarrow mn = 138.98\dots \rightarrow 139 \text{ Monate} = 11 \text{ Jahre } 7 \text{ Monate}$

11.8 A $i^*(A) = 8.5\%$
B $i^*(B) = \left(1 + \frac{i}{m}\right)^m - 1$ mit $i = 8\%$, $m = 12$
 $\Rightarrow i^*(B) = 8.3\%$
 $\Rightarrow i^*(A) > i^*(B)$, d.h. Angebot A ist besser als Angebot B

11.9 $n = \frac{\log_a\left(\frac{K_n}{K_0}\right)}{m \cdot \log_a\left(1 + \frac{i}{m}\right)}$ mit $K_0 = 1000 \text{ CHF}$, $K_n = 1250 \text{ CHF}$, $i = 2.5\%$, $m = 360$, $a := 10$
 $\Rightarrow n = 8.92\dots \rightarrow 9 \text{ Jahre}$

11.10 $i = m \left(\sqrt[mn]{\frac{K_n}{K_0}} - 1 \right)$ mit $K_0 = 20'000 \text{ CHF}$, $K_n = 26'425.82 \text{ CHF}$, $m = 4$, $n = 7$
 $\Rightarrow i = 4\%$

11.11 $n = \frac{\log_a\left(\frac{K_n}{K_0}\right)}{m \cdot \log_a\left(1 + \frac{i}{m}\right)}$ mit $K_0 = 100'000 \text{ CHF}$, $K_n = 150'000 \text{ CHF}$, $i = 8\%$, $m = 4$, $a := 10$
 $\Rightarrow n = 5.11\dots$
 $\Rightarrow mn = 20.47\dots \rightarrow 21 \text{ Quartale} = 5 \text{ Jahre } 3 \text{ Monate}$

- 11.12 a) 2. Aussage
b) 3. Aussage
c) 3. Aussage