

Aufgaben 10 Exponentialfunktion und -gleichungen Exponentialgleichungen, Logarithmus, Zinseszins

Lernziele

- einfache Logarithmen ohne Taschenrechner bestimmen können.
- einfachere Exponentialgleichungen ohne Taschenrechner lösen können.
- einen Zehnerlogarithmus, einen natürlichen Logarithmus mit einem Taschenrechner berechnen können.
- eine Logarithmuseigenschaft anwenden können, um einfache Exponentialgleichungen lösen zu können.
- ausgewählte Zinseszinsprobleme mit Hilfe von Logarithmen bearbeiten können.

Aufgaben

10.1 Lösen Sie die folgenden Exponentialgleichungen **ohne** Taschenrechner, d.h. finden Sie die Lösungen durch Probieren.

a)	$2^x = 16$	b)	$4^x = 64$	c)	$5^x = 1$
d)	$\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{27}{8}$	e)	$10^x = 1'000'000$	f)	$10^x = 10$

10.2 Bestimmen Sie die folgenden Logarithmen **ohne** Taschenrechner.

a)	$\log_3(27)$	b)	$\log_4(16)$	c)	$\log_2(128)$
d)	$\log_{10}(1000)$	e)	$\log_{10}(1)$		

10.3 Bestimmen Sie die folgenden Logarithmen **mit** Ihrem Taschenrechner.

a)	$\lg(1.1)$	b)	$\ln(1.1)$	c)	$\lg(9)$
d)	$\ln(9)$	e)	$\lg(2345.67)$	f)	$\ln(2345.67)$

10.4 Lösen Sie die folgenden Exponentialgleichungen.

a)	$10^x = 21$	b)	$10^x = 256.78$	c)	$10^x = 1'234'567$
----	-------------	----	-----------------	----	--------------------

10.5 Lösen Sie die folgenden Exponentialgleichungen.

a)	$3^x = 99$	b)	$1.01^x = 1.5$	c)	$3^{x+4} = 5$
d)	$5^{2x-1} = 12$	e)	$0.2^{x-3} = 27$	f)	$1 - e^{5x} = 0.3$

10.6 Ein Anfangskapital K_0 wird zu einem jährlichen Zinssatz i mit Zins und Zinseszins angelegt. K_n ist das Kapital nach n Jahren. Bestimmen Sie n .

a)	$K_0 = 1000$ CHF	$i = 1.00\%$	$K_n = 1220$ CHF (gerundet)
b)	$K_0 = 100'000$ CHF	$i = 2.25\%$	$K_n = 243'519$ CHF (gerundet)

10.7 Wie lange müssten 10'000 CHF zu einem jährlichen Zinssatz von 2.5% angelegt werden, um den Wert von 12'000 CHF zu erreichen?

10.8 Wie lange müsste ein beliebiges Anfangskapital zu einem jährlichen Zinssatz von 1.25% angelegt werden, um seinen Wert zu verdoppeln?

10.9 Ein Anfangskapital von 10'000 CHF wird zu einem unbekanntem jährlichen Zinssatz investiert. Nach 10 Jahren beträgt das Kapital 11'894.40 CHF. Nach wievielen Jahren (seit Beginn der Investition) wird das Kapital 15'000 CHF betragen?

10.10 Der Rückgang der Verkäufe eines Produktes ist gegeben durch

$$N = 50'000 e^{-0.8x}$$

N sind die monatlichen Verkäufe, und x ist die Anzahl Monate, die seit dem Ende einer Promotionskampagne vergangen sind.

- a) Wie gross sind die Verkäufe 4 Monate nach dem Ende der Kampagne?
- b) Nach wievielen Monaten nach dem Ende der Kampagne werden die Verkäufe unter 1000 fallen, falls keine neue Kampagne gestartet wird?

10.11 Für eine bestimmte Ware lautet die Nachfragefunktion

$$p = 100 e^{-q/2}$$

Wieviele Einheiten werden nachgefragt (auf eine ganze Zahl gerundet), falls der Stückpreis 1.83 CHF beträgt?

10.12 Auf einem Hochschulcampus mit 10'000 Studierenden ist zunächst ein einzelner Studierender mit einer ansteckenden Krankheit infiziert. Die Ausbreitung der Krankheit auf dem Campus ist gegeben durch

$$y = \frac{10'000}{1 + 9999 e^{-0.99t}}$$

Dabei ist y die Anzahl infizierter Studierender zum Zeitpunkt t (in Tagen).

- a) Wieviele Studierende sind nach 4 Tagen infiziert?
- b) Die Schule schliesst, falls 50% der Studierenden krank ist. Im Verlaufe welchen Tages wird die Schule geschlossen?

10.13 Die Verschmutzung des Erie-Sees wurde mit der folgenden Gleichung modelliert:

$$x = 0.05 + 0.18 e^{-0.38t}$$

x ist das Volumen der Schadstoffe (in km³) und t ist die Zeit (in Jahren).

- a) Finden Sie die Anfangsvermutzung, d.h. x für t = 0.
- b) Wie lange geht es, bis die Verschmutzung noch 30% des Anfangswertes beträgt?

10.14 * Angenommen, für die angebotene Stückzahl x eines Produktes gilt bei einem Stückpreis p (in CHF) die folgende Beziehung:

$$p = 10 + 5 \ln(3x + 1)$$

Wieviel Stück werden angeboten, wenn der Stückpreis 50 CHF beträgt?

10.15 Entscheiden Sie, welche Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie das entsprechende Kästchen an. In jeder Aufgabe a) bis c) ist genau eine Aussage wahr.

a) $\log_a(x)$ ist die Antwort auf die Frage ...

- ... "a hoch wieviel ist x?"
- ... "x hoch wieviel ist a?"
- ... "10 hoch wieviel ist x?"
- ... "10 hoch wieviel ist a?"

b) Falls $p = 2^q$, dann ...

... $q = \left(\frac{1}{2}\right)^p$

... $q = \frac{p}{2}$

... $q = \log_2(p)$

... $q = \ln(2)$

c) $\ln(e) = \dots$

... $\log_e(1)$

... $\log_{10}(e)$

... 0

... 1

Lösungen

- 10.1 a) $x = 4$ b) $x = 3$ c) $x = 0$
 d) $x = 3$ e) $x = 6$ f) $x = 1$

- 10.2 a) 3
 Hinweis:
 - Der Ausdruck $\log_3(27)$ ist die Antwort auf die Frage "3 hoch wieviel ist gleich 27?"
 b) 2 c) 7
 d) 3 e) 0

- 10.3 a) 0.041... b) 0.095... c) 0.954...
 d) 2.197... e) 3.370... f) 7.760...

- 10.4 a) $x = \lg(21) = 1.322...$
 Hinweise:
 - Wenden Sie $\lg(\dots)$ auf beide Seiten der Gleichung an.
 - Benützen Sie, dass gilt: $\lg(10^x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
 b) $x = \lg(256.78) = 2.409...$
 c) $x = \lg(1'234'567) = 6.091...$

- 10.5 a) $x = 4.182...$ b) $x = 40.748...$
 c) $x = -2.535...$
 Hinweis:
 - Lösen Sie die Gleichung zuerst nach $x+4$.
 d) $x = 1.271...$ e) $x = 0.952...$
 f) $x = -0.071...$
 Hinweise:
 - Lösen Sie zuerst nach e^{5x} .
 - Lösen Sie dann nach $5x$.

- 10.6 $n = \frac{\lg\left(\frac{K_n}{K_0}\right)}{\lg(q)}$
 a) $n = 20$ b) $n = 40$

10.7 $n = \frac{\lg\left(\frac{K_n}{K_0}\right)}{\lg(q)} = \frac{\lg\left(\frac{12'000}{10'000}\right)}{\lg(1.025)} = 7.38... \rightarrow 8 \text{ Jahre}$

10.8 $K_n = K_0 \cdot q^n$
 $K_n = 2 \cdot K_0$

 $\Rightarrow n = \frac{\lg(2)}{\lg(1.0125)} = 55.79... \rightarrow 56 \text{ Jahre}$

10.9 $i = 1.75\%$
 $K_n = 15'000 \text{ CHF}$ für $n = 23.37\dots \rightarrow 24 \text{ Jahre}$

Hinweise:

- Bestimmen Sie zuerst den Zinssatz i , indem Sie die ersten 10 Jahre betrachten (K_0 und K_{10} sind bekannt, i ist unbekannt).
- Bestimmen Sie dann n (K_0 , K_n und i sind bekannt, n ist unbekannt).

10.10 a) $N(4) = 2038$
b) $x = 4.9$, d.h. nach 4.9 Monaten

Hinweise:

- Bestimmen Sie x , so dass $N = 1000$.
- Die Gleichung $1000 = 50'000 e^{-0.8x}$ muss nach x gelöst werden.
- Benützen Sie, dass gilt: $\ln(e^x) = x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

10.11 $q = 8.0017\dots \rightarrow 8 \text{ Einheiten}$

Hinweis:

- Gehen Sie gleich vor wie in 10.10 b).

10.12 a) $y(4) = 52.18\dots \rightarrow 52 \text{ Studierende}$
b) $t = 9.30\dots \rightarrow \text{am } 10. \text{ Tag}$

Hinweis:

- Die folgende Gleichung muss nach t gelöst werden: $5000 = \frac{10'000}{1 + 9999 e^{-0.99t}}$

10.13 a) $x = 0.23 \text{ km}^3$
b) $t = 5.91\dots \rightarrow 5.9 \text{ Jahre}$

Hinweis:

- Gehen Sie gleich vor wie in 10.12 b).

10.14 * $x = 993.31\dots \rightarrow 993 \text{ Stück}$

- 10.15 a) 1. Aussage
b) 3. Aussage
c) 4. Aussage