Aufgaben 9 Exponentialfunktion und -gleichungen
Zinseszins, Exponentialfunktion

Lernziele

- das zukünftige Kapital berechnen können, das zu einem festen jährlichen Zinssatz mit Zins und Zinseszins angelegt wird.
- Zinseszinsaufgaben bearbeiten können.
- eine Exponentialfunktion bei vorgegebener Funktionsgleichung grafisch darstellen können.
- die Funktionsgleichung einer Exponentialfunktion aus zwei Punkten, die auf dem Grafen der Funktion liegen, bestimmen können.
- angewandte Problemstellungen mit Hilfe der Exponentialfunktion bearbeiten können.

Aufgaben

9.1 Ein Anfangskapital K_0 ist zum jährlichen Zinssatz i mit Zinseszins angelegt.

a) Das Anfangskapital sei K_0 = 1000.00 CHF und der jährliche Zinssatz i = 2%.
Bestimmen Sie das Kapital nach einem, zwei, drei, vier und fünf Jahr(en).

b) Versuchen Sie, eine Formel herzuleiten, die es Ihnen erlaubt, das Kapital K_n nach n Jahren zu berechnen für beliebige Werte von K_0, i und n.

9.2 Welches ist das zukünftige Kapital, wenn 8000 CHF 10 Jahre lang mit Zins und Zinseszins investiert werden zu einem jährlichen Zinssatz von 12%?

9.3 Welches Anfangskapital beträgt nach 10 Jahren 10'000 CHF, wenn es mit Zins und Zinseszins zu einem jährlichen Zinssatz von 6% angelegt wird?

9.4 Zu welchem jährlichen Zinssatz müssten 10'000 CHF mit Zins und Zinseszins angelegt werden, damit das Kapital nach 7 Jahren 14'071 CHF betragen würde?

9.5 Frau Schmid möchte 150'000 CHF 5 Jahre lang anlegen. Die Bank A offeriert ihr einen jährlichen Zinssatz von 6.5% bei Zins und Zinseszins. Die Bank B bietet an, nach 5 Jahren 200'000 CHF zu zahlen. Welche Bank macht das bessere Angebot?

9.6 Der Kauf von Alaska kostete die USA 7 Millionen $ im Jahre 1869. Angenommen, dieses Geld wäre damals in ein Sparkonto einbezahlt worden, welches Zins und Zinseszins bei einem jährlichen Zinssatz von 6% getragen hätte. Wieviel Geld wäre bei dieser Investition im Jahre 2020 verfügbar?

9.7 Maria Stähli investierte 2500 CHF in eine 36-Monate-Anlage, welche einen einfachen Zins von jährlich 8.5% trug. Als die Anlage auslief, investierte sie die ganze Summe in einen Fond, der einem jährlichen Wachstum von 18% (bei Zins und Zinseszins) entsprach. Wieviel war dieser Fond nach 9 Jahren wert?

9.8 Ein Kapital wird 4 Jahre lang zu 4% und 3 weitere Jahre lang zu 6% angelegt (jeweils Jahreszinssatz, Zins und Zinseszins). Am Ende beträgt das Kapital 72'000 CHF.

a) Bestimmen Sie das Anfangskapital.

b) Wie hoch ist der durchschnittliche Zinssatz bezüglich der ganzen Zeitperiode?

9.9 Ein unbekanntes Anfangskapital wird zu einem unbekannten jährlichen Zinssatz mit Zins und Zinseszins angelegt. Nach zwei Jahren beträgt das Kapital 5'891.74 CHF und nach 5 weiteren Jahren 6'997.54 CHF. Bestimmen Sie sowohl das Anfangskapital als auch den Zinssatz.

9.10 Betrachten Sie die folgende Exponentialfunktion:

$$\begin{aligned} f:\ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto y = f(x) = 2^x \end{aligned}$$

a) Erstellen Sie eine Wertetabelle von f für das Intervall $-3 \leq x \leq 3$.

b) Zeichnen Sie den Grafen von f im Intervall $-3 \leq x \leq 3$ in ein kartesisches Koordinatensystem.

9.11 Skizzieren Sie die Grafen der folgenden Exponentialfunktionen in ein gemeinsames Koordinatensystem:

$$\begin{aligned} f_1:\ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto y = f_1(x) = 2^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2:\ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto y = f_2(x) = 0.2^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_3:\ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto y = f_3(x) = 3 \cdot 0.5^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_4:\ & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto y = f_4(x) = -2 \cdot 3^x \end{aligned}$$

9.12 Der Graf einer Exponentialfunktion enthält die Punkte P und Q.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Exponentialfunktion.

a) P(0|1.02) Q(1|1.0302)

b) P(1|12) Q(3|192)

c) P(0|10'000) Q(5|777.6)

d) P(5|16) $Q\left(9 \middle| \frac{1}{16}\right)$

9.13 Der Wert einer Wohnung, welche vor 20 Jahren 160'000 CHF gekostet hat, ist aufgrund der Marktsituation jedes Jahr um 4% gestiegen. Wieviel kostet die Wohnung heute?

9.14 Angenommen, ein Land habe 20 Millionen Einwohner und rechnet für die nächsten 20 Jahre mit einem Bevölkerungswachstum von jährlich 2%. Wie gross wird die Bevölkerung dieses Landes in 10 Jahren sein?

9.15 Ein Ball wird aus 12.8 Metern Höhe fallengelassen. Nach jedem Aufprall auf dem Boden steigt der Ball auf 3/4 der vorherigen Höhe auf. Wie hoch steigt der Ball nach dem vierten Aufprall vom Boden?

9.16 Der Wert einer Maschine wird auf 10'000 CHF geschätzt. Die Entwertung beträgt jährlich 20%. Bestimmen Sie den Wert der Maschine nach 4 Jahren.

9.17 Die Grösse einer bestimmten Bakterienkultur wächst exponentiell. Um 8 Uhr betrug die Anzahl Bakterien 2'300, um 11 Uhr 18'400. Bestimmen Sie die Anzahl Bakterien um 13.30 Uhr.

9.18 In einem physikalischen Experiment nimmt die Anzahl radioaktiver Atomkerne in einem bestimmten Präparat exponentiell ab. 5 Stunden nach Beginn des Experimentes wurden $1.56 \cdot 10^{16}$ Atomkerne gezählt. 3 Stunden später ist die Anzahl auf $3.05 \cdot 10^{13}$ gefallen. Wieviele Atomkerne gab es zu Beginn des Experimentes?

9.19 Ein Kapital wird mit Zins und Zinseszins angelegt. Bei welchem jährlichen Zinssatz verdoppelt sich das Kapital in 20 Jahren?

9.20 * Der Preisindex (PI) wird berechnet, indem die Preise verschiedener Artikel gewichtet gemittelt werden. Die folgende Tabelle gibt den Preisindex für ausgewählte Jahre zwischen 1940 und 2002 an:

Jahr	**PI**	**Jahr**	**PI**
1940	14.0	1980	82.4
1950	24.1	1990	130.7
1960	29.6	2000	172.2
1970	38.8	2002	179.9

a) Finden Sie eine Gleichung, welche diese Daten modelliert, d.h. versuchen Sie, die Parameter a und c der Exponentialfunktion $f: x \mapsto y = f(x) = c \cdot a^x$ (x = Jahre nach 1900, y = PI) zu finden, welche am besten zu den Daten passen.

b) Verwenden Sie das Modell, um den PI für das Jahr 2010 vorauszusagen.

9.21 Entscheiden Sie, welche Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie das entsprechende Kästchen an.
In jeder Aufgabe a) bis c) ist genau eine Aussage wahr.

a) Bei einer Anlage mit Zinseszins ...

- ☐ ... ist der Graf, der das Wachstum des Kapitals darstellt, eine Parabel.
- ☐ ... hängt der Zins, welcher am Ende jeder Zinsperiode bezahlt wird, nur vom Zinssatz ab.
- ☐ ... hängt der Zinssatz vom Kapital in der vorangehenden Periode ab.
- ☐ ... wächst das Kapital exponentiell.

b) Der Graf einer Exponentialfunktion ...

- ☐ ... ist eine Parabel.
- ☐ ... ist eine Gerade, falls der Anfangswert gleich null ist.
- ☐ ... schneidet die y-Achse nie.
- ☐ ... berührt die x-Achse nie.

c) Wenn eine Grösse im zeitlichen Verlauf exponentiell wächst, dann ...

- ☐ ... wächst der Wachstumsfaktor selbst.
- ☐ ... hängt der Wachstumsfaktor vom Anfangswert ab.
- ☐ ... verdoppelt sich die Grösse, falls der jährliche Wachstumsfaktor 100% ist.
- ☐ ... verdoppelt sich die Grösse in konstanten Zeitintervallen.

Lösungen

9.1 a) $K_0 = 1000.00$ CHF $K_1 = 1020.00$ CHF $K_2 = 1040.40$ CHF
$K_3 = 1061.21$ CHF $K_4 = 1082.43$ CHF $K_5 = 1104.08$ CHF

b) $K_n = K_0\,(1 + i)^n$

9.2 $K_{10} = 24'846.79$ CHF

9.3 $K_0 = 5'583.95$ CHF

9.4 $i = 5\%$

9.5 Bank A: $K_5 = 205'513.00$ CHF
Bank B: $K_5 = 200'000.00$ CHF

9.6 $K_{151} = \$\ 46'375$ Millionen (auf ganze Millionen gerundet)

9.7 13'916.24 CHF

2 Perioden: 3 Jahre einfacher Zins, 9 Jahre Zinseszins

- 3 Jahre einfacher Zins:
  $K_n = K_0(1 + ni)$ mit $K_0 = 2500$ CHF, $n = 3$, $i = 8.5\% = 0.085$
  $\Rightarrow\ K_3 = 3137.50$ CHF
- 9 Jahre Zinseszins:
  $K_n = K_0\, q^n$ mit $K_0 = \ldots$ (= K_3 nach den ersten drei Jahren), $q = 1 + 18\% = 1.18$, $n = 9$
  $\Rightarrow\ K_9 = 13'916.24$ CHF

9.8 a) $K_0 = 51'675$ CHF

Hinweise:
- Betrachten Sie zuerst die zweite Periode (3 Jahre, beginnend nach 4 Jahren seit jetzt), und berechnen Sie das Kapital zu Beginn dieser zweiten Periode.
- Berechnen Sie dann das Anfangskapital.

b) $i = 4.85\%$

Hinweis:
- Der durchschnittliche Zinssatz muss so sein, dass gilt:
  $K_n = K_0\, q^n$ mit K_0 = Anfangskapital, K_n = Kapital nach den ganzen 7 Jahren, $n = 7$, $q = 1 + i$

9.9 $i = 3.5\%$, $K_0 = 5'500.00$ CHF

Hinweise:
- Betrachten Sie zuerst die zweite Periode der Länge 5 Jahre mit $K_0 = 5'891.74$ CHF und $K_5 = 6'997.54$ CHF.
- Die 5'891.74 CHF können als Kapital K_2 am Ende der ersten 2 Jahre betrachtet werden, falls K_0 das Anfangskapital zu Beginn der ganzen 7 Jahre ist.

9.10 ...

9.11 ...

9.12 a) $y = f(x) = 1.02 \cdot 1.01^x$

Hinweise:
- Die Funktionsgleichung einer Exponentialfunktion lautet $y = f(x) = c \cdot a^x$
- Wenn $P(0|1.02)$ und $Q(1|1.0302)$ Punkte des Grafen der Exponentialfunktion sind, dann müssen ihre Koordinaten die Funktionsgleichung der Exponentialfunktion erfüllen, d.h. $1.02 = f(0) = c \cdot a^0$ und $1.0302 = f(1) = c \cdot a^1$
- Lösen Sie die beiden Gleichungen nach c und a.

b) $y = f(x) = 3 \cdot 4^x$

c) $y = f(x) = 10'000 \cdot 0.6^x$

d) $y = f(x) = 16'384 \cdot 0.25^x$

9.13 350'580 CHF (gerundet)

Hinweis:
- Die Beziehung zwischen Zeit t und Wert W der Wohnung ist eine Exponentialfunktion:
$W = f(t) = W_0 \cdot a^t$
mit W = Wert zur Zeit t, W_0 = Anfangswert (bei t = 0) = 160'000 CHF, a = Wachstumsfaktor = 1 + 4% = 1.04

9.14 24.4 Millionen (gerundet)

9.15 4.05 m

Hinweis:
- Die Beziehung zwischen der Anzahl n der Aufpralle und der Höhe h des Balles ist eine Exponentialfunktion:
$h = f(n) = h_0 \cdot a^n$
mit h = Höhe nach n Aufprallen, h_0 = Anfangshöhe = 12.8 m, a = Zerfallsfaktor = 0.75

9.16 4'096 CHF

9.17 104'086

9.18 $5.10 \cdot 10^{20}$

9.19 $i = \sqrt[20]{2} - 1 = 3.5\%$ (gerundet)

9.20 * a) $y = f(x) = 2.58 \cdot 1.043^x$

b) $y(110) = 264.79$

9.21 a) 4. Aussage

b) 4. Aussage

c) 4. Aussage