Aufgaben 8 — Quadratische Funktion und Gleichungen
Quadr. Funktion/Gleichungen, Angebot, Nachfrage, Marktgleichgewicht

Lernziele

- den Zusammenhang zwischen einer quadratischen Funktion und einer quadratischen Gleichung kennen und verstehen.
- eine quadratische Gleichung mit der Methode der quadratischen Ergänzung lösen können.
- eine quadratische Gleichung mit Hilfe der Lösungsformel lösen können.
- spezielle quadratische Gleichungen ohne Lösungsformel lösen können.
- eine quadratische Gleichung mit einem Parameter lösen können.
- die Scheitelpunktsform einer quadratischen Funktion aus den Koordinaten des Scheitelpunktes und den Koordinaten eines weiteren Punktes der dazugehörigen Parabel bestimmen können.
- die allgemeine Form einer quadratischen Funktion aus den Koordinaten dreier Punkte der dazugehörigen Parabel bestimmen können.
- angewandte Problemstellungen aus dem Bereich Volks- und Betriebswirtschaft mit Hilfe von quadratischen Gleichungen oder Gleichungssystemen bearbeiten können.

Aufgaben

8.1 Jede quadratische Gleichung kann in die folgende allgemeine Form umgeformt werden:

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (a \in \mathbb{R}\backslash\{0\},\ b \in \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R}) \qquad (*)$$

Bestimmen Sie die Anzahl Lösungen, die eine quadratische Funktion haben kann, d.h. versuchen Sie, die verschiedenen Fälle für die Anzahl Lösungen herauszufinden.

Hinweise:
- Erinnern Sie sich an unsere Diskussion über die mögliche Anzahl Lösungen einer linearen Gleichung.
- Vergleichen Sie die linke Seite der quadratischen Gleichung (*) mit der allgemeinen Form der Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion.
- Stellen Sie sich den Grafen einer quadratischen Funktion vor.

8.2 Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen ...

i) ... mit der Methode der quadratischen Ergänzung.
ii) ... mit Hilfe der Lösungsformel.

Geben Sie für jede Gleichung die Lösungsmenge an.

a) $x^2 + 10x + 24 = 0$ b) $2x^2 - 7x + 3 = 0$

c) $x^2 + 2x + 8 = 0$ d) $x^2 - 14x + 49 = 0$

8.3 Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen mit Hilfe der Lösungsformel. Geben Sie für jede Gleichung die Lösungsmenge an.

a) $x^2 + 22x + 121 = 0$ b) $5x^2 + 8x - 4 = 0$

c) $5x^2 - 8x + 4 = 0$ d) $24x^2 - 65x + 44 = 0$

e) $\frac{1}{6}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{3}{2} = 0$ f) $-9x^2 - 54x - 63 = 0$

8.4 Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen. Geben Sie für jede Gleichung die Lösungsmenge an.

a) $9(x - 10) - x(x - 15) = x$ b) $3(x^2 + 2) - x(x + 9) = 11$

c) $y^3 + 19 = (y + 4)^3$ d) $\frac{9x - 8}{4x + 7} = \frac{3x}{2x + 5}$

e) $\frac{x^2}{x-6} - \frac{6x}{6-x} = 1$ f) $\frac{8}{x^2-4} + \frac{2}{2-x} = 3x - 1$

8.5 Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen, ohne die Lösungsformel zu verwenden. Geben Sie für jede Gleichung die Lösungsmenge an.

a) $(x + 2)(x + 5) = 0$ b) $(x - 8)(5x - 9) = 0$

c) $x^2 - 3x = 0$ d) $x^2 + 7x = 0$

e) $4x^2 - 9 = 0$ f) $100x^2 - 1 = 0$

g) $(3x - 2)(4x + 1) = 0$ h) $4x^2 + 5x = 0$

i) $3x^2 = 27$ j) $x^2 = x$

8.6 Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen. Geben Sie für jede Gleichung die Lösungsmenge an.

a) $(7 + x)(7 - x) = (3x + 2)^2 - (2x + 3)^2$ b) $(x - 3)(2x - 7) = 1$

c) $\frac{x-4}{x-5} = \frac{30-x^2}{x^2-5x}$ d) $\frac{x^2-x-2}{2-x} = 1$

e) $\frac{x^2-4}{x^2-4} = 0$ f) $\frac{x^2-4}{x^2-4} = 1$

8.7 Die folgenden quadratischen Gleichungen enthalten einen Parameter p. Die Lösungsmenge der Gleichungen wird daher vom Wert dieses Parameters abhängen.

Bestimmen Sie den (die) Wert(e) des Parameters p, so dass die quadratische Gleichung genau eine Lösung hat. Geben Sie diese Lösung an.

a) $2x^2 = 3x - p$ b) $x^2 + px + p = -3$

c) $3x^2 + px - p = 0$ d) $px^2 + \frac{p}{2}x - 1 = 0$

8.8 Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach x. Berücksichtigen Sie, dass der Parameter p irgendeinen reellen Wert haben kann.

a) $x^2 + x + p = 0$ b) $-px = 1 + 4x^2$

c) * $-\frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(p-x)^2} = 0$

8.9 Eine Parbel hat den Scheitelpunkt S und enthält den Punkt P.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der entsprechenden quadratischen Funktion sowohl in der Scheitelpunktsform als auch in der allgemeinen Form.

a) S(2|4) P(-1|7)

b) S(1|-8) P(2|-7)

8.10 Eine Parabel enthält die drei Punkte P, Q und R.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der entsprechenden quadratischen Funktion in der allgemeinen Form.

a) P(-4|8) Q(0|0) R(10|15)

b) P(1|-1) Q(2|4) R(4|8)

8.11 Bestimmen Sie zu den gegebenen Angebots- und Nachfragefunktionen f_A und f_N einer Ware die Gleichgewichtsmenge und den Gleichgewichtspreis:

a) Angebot $p = f_A(q) = \frac{1}{4} q^2 + 10$
Nachfrage $p = f_N(q) = 86 - 6q - 3q^2$

b) Angebot $p = f_A(q) = q^2 + 8q + 16$
Nachfrage $p = f_N(q) = - 3q^2 + 6q + 436$

8.12 Die Gesamtkosten K(x) (in CHF) bei der Produktion von x Artikeln und der Ertrag E(x) (in CHF) beim Verkauf von x Artikeln sind gegeben durch

$K(x) = 2000 + 40x + x^2$
$E(x) = 130x$

Bestimmen Sie die Stückzahl(en) x für die Gewinnschwelle(n).

8.13 Die Gesamtkosten K(x) (in CHF) bei der Produktion von x Artikeln und der Ertrag E(x) (in CHF) beim Verkauf von x Artikeln sind gegeben durch

$K(x) = x^2 + 100x + 80$
$E(x) = 160x - 2x^2$

Wieviele Artikel müssen hergestellt und vekauft werden, damit ein Profit von 200 CHF erzielt wird?

8.14 Entscheiden Sie, welche Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie das entsprechende Kästchen an.
In jeder Aufgabe a) bis c) ist genau eine Aussage wahr.

a) Eine quadratische Gleichung ...

- ☐ ... hat keine Lösung, wenn immer sich der Scheitelpunkt des Grafen der entsprechenden quadratischen Funktion unterhalb der x-Achse befindet.
- ☐ ... hat immer eine oder zwei Lösungen.
- ☐ ... hat genau eine Lösung, falls der Scheitelpunkt des Grafen der entsprechenden quadratischen Funktion auf der x-Achse liegt.
- ☐ ... kann unendlich viele Lösungen haben.

b) Der Graf einer quadratischen Funktion ...

- ☐ ... ist eindeutig, wenn immer der Scheitelpunkt und ein weiterer Punkt des Grafen bekannt sind.
- ☐ ... ist eine Gerade, falls die entsprechende quadratische Gleichung genau eine Lösung hat.
- ☐ ... ist eine quadratische Gleichung.
- ☐ ... kann durch Lösen einer quadratischen Gleichung bestimmt werden.

c) Falls die Gesamtkostenfunktion quadratisch und die Gesamtertragsfunktion linear ist, dann ...

- ☐ ... gibt es immer genau eine Gewinnschwelle.
- ☐ ... entspricht eine Gewinnschwelle der Lösung einer quadratischen Gleichung.
- ☐ ... kann kein Profit realisiert werden, wenn immer die lineare Funktion eine positive Steigung hat.
- ☐ ... kann der Scheitelpunkt des Grafen der Kostenfunktion nicht unterhalb der x-Achse liegen.

Lösungen

8.1 ...

8.2	a)	$L = \{-6, -4\}$	b)	$L = \left\{\frac{1}{2}, 3\right\}$
	c)	$L = \{\ \}$	d)	$L = \{7\}$
8.3	a)	$L = \{-11\}$	b)	$L = \left\{-2, \frac{2}{5}\right\}$
	c)	$L = \{\ \}$	d)	$L = \left\{\frac{4}{3}, \frac{11}{8}\right\}$
	e)	$L = \left\{\frac{3}{2}, 6\right\}$	f)	$L = \left\{-3-\sqrt{2}, -3+\sqrt{2}\right\}$
8.4	a)	$L = \{5, 18\}$	b)	$L = \{5, -1/2\}$
	c)	$L = \{-3/2, -5/2\}$	d)	$L = \{2, -10/3\}$
	e)	$L = \{-2, -3\}$	f)	$L = \left\{-\frac{5}{3}, 0\right\}$
8.5	a)	$L = \{-5, -2\}$	b)	$L = \{9/5, 8\}$
	c)	$L = \{0, 3\}$	d)	$L = \{-7, 0\}$
	e)	$L = \{-3/2, 3/2\}$	f)	$L = \{-1/10, 1/10\}$
	g)	$L = \{-1/4, 2/3\}$	h)	$L = \{-5/4, 0\}$
	i)	$L = \{-3, 3\}$	j)	$L = \{0, 1\}$
8.6	a)	$L = \{-3, 3\}$	b)	$L = \{5/2, 4\}$
	c)	$L = \{-3\}$	d)	$L = \{-2\}$
	e)	$L = \{\ \}$	f)	$L = \mathbb{R}\backslash\{-2, 2\}$

8.7 a) $p = \frac{9}{8}$ $\left(\text{Lösung der quadratischen Gleichung: } x = \frac{3}{4}\right)$

Hinweise:
- Verwenden Sie die Lösungsformel.
- Die Anzahl Lösungen der quadratischen Gleichung hängt davon ab, ob der Term unter der Wurzel positiv, negativ oder gleich null ist.

b) $p_1 = -2$ (Lösung der quadratischen Gleichung: $x = 1$)
$p_2 = 6$ (Lösung der quadratischen Gleichung: $x = -3$)

c) $p_1 = 0$ (Lösung der quadratischen Gleichung: $x = 0$)
$p_2 = -12$ (Lösung der quadratischen Gleichung: $x = 2$)

d) $p = -16$ $\left(\text{Lösung der quadratischen Gleichung: } x = -\frac{1}{4}\right)$

8.8 a)

falls $p < \frac{1}{4}$:	2 Lösungen	$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4p}}{2}$
falls $p = \frac{1}{4}$:	1 Lösung	$x = -\frac{1}{2}$
falls $p > \frac{1}{4}$:	keine Lösung	$L = \{\ \}$

b) (siehe nächste Seite)

b) falls $|p| > 4$: 2 Lösungen $x_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 16}}{8}$

falls $p = \pm 4$: 1 Lösung $x = -\frac{p}{8}$

falls $|p| < 4$: keine Lösung $L = \{\ \}$

c) * falls $p = -1$: unendlich viele Lösungen $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$

falls $p \neq -1$: 1 Lösung $x = \frac{p-1}{2}$

8.9 a) $y = f(x) = \frac{1}{3}(x-2)^2 + 4 = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{16}{3}$

Hinweise:
- Gehen Sie von der Scheitelpunktsform der Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion aus.
- Diese Gleichung enthält drei unbekannte Parameter.
- Zwei Parameter in der Gleichung sind die Koordinaten des Scheitelpunktes S.
- P ist ein Punkt des Grafen der quadratischen Funktion. Daher müssen die Koordinaten von P die Funktionsgleichung der quadratischen Funktion erfüllen. Dies führt auf eine Gleichung, die den verbleibenden unbekannten Parameter enthält.

b) $y = f(x) = (x-1)^2 - 8 = x^2 - 2x - 7$

8.10 a) $y = f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x$

Hinweise:
- Gehen Sie von der allgemeinen Form der Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion aus.
- Diese Gleichung enthält drei unbekannte Parameter.
- P, Q und R sind Punkte des Grafen der quadratischen Funktion. Daher müssen die Koordinaten von P, Q und R die Funktionsgleichung der quadratischen Funktion erfüllen. Dies führt auf ein Gleichungssystem mit drei Gleichungen und den drei unbekannten Parametern.

b) $y = f(x) = -x^2 + 8x - 8$

8.11 a) im Marktgleichgewicht: $q = 4$, $p = 14$

Hinweis:
- Die Angebots- und die Nachfragefunktion haben im Marktgleichgewicht den gleichen Funktionswert.

b) im Marktgleichgewicht: $q = 10$, $p = 196$

8.12 $x_1 = 40$, $x_2 = 50$

Hinweis:
- Die Kosten- und die Ertragsfunktion haben bei der Gewinnschwelle den gleichen Funktionswert.

8.13 Gewinn $G(x) = E(x) - K(x) = -3x^2 + 60x - 80 = 200$

$\Rightarrow$ $L = \{7.41..., 12.58...\}$

$\Rightarrow$ 7 oder 13 Artikel

8.14 a) 3. Aussage

b) 1. Aussage

c) 2. Aussage