# Aufgaben 7 Quadratische Funktion und Gleichungen
## Quadratische Funktion

### Lernziele

- den Grafen einer quadratischen Funktion aus der Scheitelpunktsform der Funktionsgleichung skizzieren können.
- die Lage des Scheitelpunktes einer Parabel aus der Scheitelpunktsform der Funktionsgleichung der entsprechenden quadratischen Funktion bestimmen können.
- die Scheitelpunktsform der Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion in die allgemeine Form umformen können.
- die Methode der quadratischen Ergänzung kennen, verstehen und anwenden können.
- die allgemeine Form der Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion in die Scheitelpunktsform umformen können.

### Aufgaben

7.1 Betrachten Sie die einfachstmögliche quadratische Funktion:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto y = f(x) = x^2$$

a) Erstellen Sie eine Wertetabelle von f für das Intervall $-4 \leq x \leq 4$.

b) Zeichnen Sie den Grafen von f im Intervall $-4 \leq x \leq 4$ in ein kartesisches Koordinatensystem.

7.2 Die Funktionsgleichung einer allgemeinen quadratischen Funktion kann in der sogenannten Scheitelpunktsform geschrieben werden:

$$f: D \to \mathbb{R} \qquad (D \subseteq \mathbb{R})$$
$$x \mapsto y = f(x) = a(x-u)^2 + v \qquad (a \in \mathbb{R}\backslash\{0\},\ u \in \mathbb{R},\ v \in \mathbb{R})$$

Untersuchen Sie den Einfluss der drei Parameter **a**, **u** und **v** auf den Grafen der quadratischen Funktion, indem Sie jeweils nur einen Parameter verändern und die anderen beiden Parameter konstant halten:

a) Parameter **u** (u verändern, a und v konstant halten)

$y = f_0(x) = x^2$ $(a = 1, \mathbf{u = 0}, v = 0)$
$y = f_1(x) = (x-2)^2$ $(a = 1, \mathbf{u = 2}, v = 0)$
$y = f_2(x) = (x+1)^2$ $(a = 1, \mathbf{u = -1}, v = 0)$

i) Skizzieren Sie die Grafen der Funktionen $f_0$, $f_1$ und $f_2$ in ein einziges Koordinatensystem.

ii) Beschreiben Sie den Einfluss des Parameters **u** auf den Grafen der quadratischen Funktion.

b) Parameter **v** (v verändern, a und u konstant halten)

$y = f_0(x) = x^2$ $(a = 1, u = 0, \mathbf{v = 0})$
$y = f_1(x) = x^2 + 3$ $(a = 1, u = 0, \mathbf{v = 3})$
$y = f_2(x) = x^2 - 2$ $(a = 1, u = 0, \mathbf{v = -2})$

i) Skizzieren Sie die Grafen der Funktionen $f_0$, $f_1$ und $f_2$ in ein einziges Koordinatensystem.

ii) Beschreiben Sie den Einfluss des Parameters **v** auf den Grafen der quadratischen Funktion.

c) (siehe nächste Seite)

c) Parameter **a** (a verändern, u und v konstant halten)

$y = f_0(x) = x^2$ (**a = 1**, u = 0, v = 0)
$y = f_1(x) = 2x^2$ (**a = 2**, u = 0, v = 0)
$y = f_2(x) = -2x^2$ (**a = -2**, u = 0, v = 0)

i) Skizzieren Sie die Grafen der Funktionen $f_0$, $f_1$ und $f_2$ in ein einziges Koordinatensystem.

ii) Beschreiben Sie den Einfluss des Parameters **a** auf den Grafen der quadratischen Funktion.

d) Parameter **a** (a verändern, u und v konstant halten)

$y = f_0(x) = x^2$ (**a = 1**, u = 0, v = 0)
$y = f_1(x) = \frac{1}{2}x^2$ $\left(\mathbf{a = \tfrac{1}{2}}, u = 0, v = 0\right)$
$y = f_2(x) = -\frac{1}{2}x^2$ $\left(\mathbf{a = -\tfrac{1}{2}}, u = 0, v = 0\right)$

i) Skizzieren Sie die Grafen der Funktionen $f_0$, $f_1$ und $f_2$ in ein einziges Koordinatensystem.

ii) Beschreiben Sie den Einfluss des Parameters **a** auf den Grafen der quadratischen Funktion.

7.3 Bearbeiten Sie jede quadratische Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto y = f(x)$ in a) bis h) wie folgt:

i) Geben Sie die Parameter a, u und v an.

ii) Geben Sie die Koordinaten des Scheitelpunktes des Grafen an.

iii) Geben Sie an, ob die Parabel, d.h. der Graf der Funktion nach oben oder nach unten geöffnet ist.

iv) Zeichnen Sie den Grafen der Funktion.

a) $y = f(x) = (x + 2)^2$  b) $y = f(x) = -3x^2$

c) $y = f(x) = 2x^2 - 1$  d) $y = f(x) = -(x - 3)^2 + 4$

e) $y = f(x) = \frac{1}{2}(x + 3)^2 + 2$  f) $y = f(x) = -2(x - 1)^2 + 5$

g) $y = f(x) = \frac{5}{2} - \left(x - \frac{1}{2}\right)^2$  h) $y = f(x) = -\frac{1}{2} - 3(2 - x)^2$

7.4 * Die Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion kann auf folgende zwei Arten geschrieben werden:

$y = f(x) = ax^2 + bx + c$ Allgemeine Form

$y = f(x) = a(x - u)^2 + v$ Scheitelpunktsform

a) Prüfen Sie nach, dass die Scheitelpunktsform der Funktionsgleichung immer in die allgemeine Form umgeformt werden kann.

b) Angenommen, die Werte der Parameter a, u und v seien bekannt.
Benützen Sie das Ergebnis aus a), um die Werte der Parameter b und c aus a, u und v zu bestimmen.

7.5 Die Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion ist in der Scheitelpunktsform geschrieben.
Bestimmen Sie die allgemeine Form der Funktionsgleichung:

a) $y = f(x) = 2(x - 3)^2 + 4$  b) $y = f(x) = -(x + 2)^2 - 3$

c) $y = f(x) = x^2 + 5$  d) $y = f(x) = -3(x - 4)^2$

7.6 (siehe nächste Seite)

7.6 Formen Sie die gegebene Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion mit Hilfe der quadratischen Ergänzung in die Scheitelpunktsform um:

a) $y = f(x) = 3x^2 - 12x + 8$

b) $y = f(x) = x^2 + 6x$

c) $y = f(x) = x^2 - 2x + 1$

d) $y = f(x) = 2x^2 + 12x + 18$

e) $y = f(x) = - 2x^2 - 6x – 2$

f) $y = f(x) = x^2 + 1$

g) $y = f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x – 2$

h) $y = f(x) = - 4x^2 + 24x - 43$

i) $y = f(x) = 2(x – 3)(x + 4)$

j) $y = f(x) = x + 3 – \left(x + \frac{1}{2}\right) x$

7.7 Bearbeiten Sie die Grafen der quadratischen Funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto y = f(x)$ in a) bis f) wie folgt:

i) Bestimmen Sie die Koordinaten des Scheitelpunktes.

ii) Geben Sie an, ob die Parabel nach oben oder nach unten geöffnet ist.

a) $y = f(x) = 2x^2 + 12x + 20$

b) $y = f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$

c) $y = f(x) = 12x – 3x^2 – 11$

d) $y = f(x) = x(- 0.2x + 1.2) – 2.8$

e) $y = f(x) = \frac{17 + 12x + 2x^2}{4}$

f) $y = f(x) = 7x(3 – x) – 13.25$

7.8 Entscheiden Sie, welche Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie das entsprechende Kästchen an. In jeder Aufgabe a) bis c) ist genau eine Aussage wahr.

a) Der Graf einer quadratischen Funktion ...

- ☐ ... schneidet die x-Achse immer in zwei Punkten.
- ☐ ... ist nach unten geöffnet, falls er keinen gemeinsamen Punkt hat mit der x-Achse.
- ☐ ... berührt die x-Achse, falls es nur einen Scheitelpunkt gibt.
- ☐ ... ist immer eine Parabel.

b) f ist eine lineare und g eine quadratische Funktion. Es kann gefolgert werden, dass die Grafen von f und g ...

- ☐ ... keine gemeinsamen Punkte haben.
- ☐ ... sich nur schneiden, falls die Steigung von f nicht null ist.
- ☐ ... nicht mehr als zwei gemeinsame Punkte haben können.
- ☐ ... mindestens einen gemeinsamen Punkt haben.

c) Die Scheitelpunktsform der Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion ...

- ☐ ... ist identisch mit der allgemeinen Form, falls der Scheitelpunkt des Grafen auf der y-Achse liegt.
- ☐ ... kann aus der allgemeinen Form durch Ausmultiplizieren aller Terme erhalten werden.
- ☐ ... existiert nicht, falls der Graf nach unten geöffnet ist.
- ☐ ... hängt nur von der Lage des Scheitelpunktes ab.

**Lösungen**

7.1 siehe Theorie

7.2 siehe Theorie

7.3 a) i) a = 1, u = -2, v = 0
ii) S(-2|0)
iii) Parabel nach oben göffnet
iv) ...

b) i) a = -3, u = 0, v = 0
ii) S(0|0)
iii) Parabel nach unten geöffnet
iv) ...

c) i) a = 2, u = 0, v = -1
ii) S(0|-1)
iii) Parabel nach oben göffnet
iv) ...

d) i) a = -1, u = 3, v = 4
ii) S(3|4)
iii) Parabel nach unten göffnet
iv) ...

e) i) $a = \frac{1}{2}$, u = -3, v = 2
ii) S(-3|2)
iii) Parabel nach oben göffnet
iv) ...

f) i) a = -2, u = 1, v = 5
ii) S(1|5)
iii) Parabel nach unten göffnet
iv) ...

g) i) a = -1, $u = \frac{1}{2}$, $v = \frac{5}{2}$
ii) $S\left(\frac{1}{2}\middle|\frac{5}{2}\right)$
iii) Parabel nach unten göffnet
iv) ...

h) i) $a = -3,\ u = 2,\ v = -\frac{1}{2}$

ii) $S\left(2|-\frac{1}{2}\right)$

iii) Parabel nach unten göffnet

iv) ...

7.4 * a) $y = f(x) = a(x - u)^2 + v = ... = ax^2 - 2aux + au^2 + v = ax^2 + (-2au)x + (au^2 + v)$

Hinweise:
- Multiplizieren Sie den Term $(x - u)^2$ aus.
- Vereinfachen Sie den ganzen Ausdruck.

b) $b = -2au$
$c = au^2 + v$

Hinweis:
- Vergleichen Sie den in a) erhaltenen Ausdruck mit der allgemeinen Form $ax^2 + bx + c$.

7.5 a) $y = f(x) = 2x^2 - 12x + 22$

b) $y = f(x) = -x^2 - 4x - 7$

c) $y = f(x) = x^2 + 5$

Bemerkung:
- Dies ist sowohl die allgemeine Form als auch die Scheitelpunktsform der Funktionsgleichung.

d) $y = f(x) = -3x^2 + 24x - 48$

7.6 a) $y = f(x) = 3(x - 2)^2 - 4$ b) $y = f(x) = (x + 3)^2 - 9$

c) $y = f(x) = (x - 1)^2$ d) $y = f(x) = 2(x + 3)^2$

e) $y = f(x) = -2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{5}{2}$ f) $y = f(x) = x^2 + 1$

g) $y = f(x) = -\frac{1}{2}(x - 2)^2$ h) $y = f(x) = -4(x - 3)^2 - 7$

i) $y = f(x) = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{49}{2}$ j) $y = f(x) = -\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{49}{16}$

7.7 a) i) $S(-3|2)$
ii) Parabel nach oben geöffnet

b) i) $S\left(-\frac{3}{2}|-\frac{5}{8}\right)$
ii) Parabel nach oben geöffnet

c) i) $S(2|1)$
ii) Parabel nach unten geöffnet

d) i) $S(3|-1)$
ii) Parabel nach unten geöffnet

e) i) $S\left(-3|-\frac{1}{4}\right)$
ii) Parabel nach oben geöffnet

f) i) $S\left(\frac{3}{2}|\frac{5}{2}\right)$
ii) Parabel nach unten geöffnet

7.8 a) 4. Aussage

b) 3. Aussage

c) 1. Aussage