

Aufgaben 5 Lineare Funktion und Gleichungen Lineare Gleichungen

Lernziele

- eine lineare Gleichung lösen können.
- die Lösungsmenge einer linearen Gleichung bestimmen können.
- eine lineare Gleichung mit Parametern lösen können.
- angewandte Problemstellungen aus dem Bereich Volks- und Betriebswirtschaft mit Hilfe von linearen Gleichungen bearbeiten können.

Aufgaben

5.1 Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen:

- a) $19x - 32 + 17x = 18x - 30 + 16x - 4$
- b) $25x - 16 - 9x = 20 + 24x - 10 - 10x$
- c) $105 - 72x - 53 - 69 = 55x + 43x - 23 - 170x + 6$
- d) $56x - 43 - 52 - 19x = 7 - 72x - 56x + 165x - 112$

5.2 Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen:

- a) $22(x - 11) - 5(x - 40) = 110 - (x + 53)$
- b) $184 - 6(x - 24) = 214 - 3(2x - 38)$
- c) $(x + 3)(x - 5) = (x - 3)^2$
- d) $(x - 5)(x - 2) = (x - 4)(x - 3)$
- e) $5x(x - 1) - (2x + 3)^2 - (x - 5)(x + 3) - 6 = 0$

5.3 Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen:

- a) $\frac{x+3}{5} = \frac{2x-8}{3}$
- b) $\frac{x+3}{4} + \frac{1-3x}{7} = 0$
- c) $\frac{2}{x-1} = \frac{1}{x-2}$
- d) $\frac{x}{x-1} = \frac{x-1}{x-2}$

5.4 Die folgenden Gleichungen sind Gleichungen in der Variablen x . Sie enthalten jedoch reelle Parameter a und b . Deshalb hängen die Lösungsmengen der Gleichungen von den Werten dieser Parameter ab.

Lösen Sie die Gleichungen nach x , und bestimmen Sie die Lösungsmengen.
Berücksichtigen Sie dabei, dass die Parameter a und b beliebige reelle Zahlen sein können.

a) $x(a - 3) = a$

Hinweis:

- Möglicherweise möchten Sie beide Seiten der Gleichung durch $a - 3$ dividieren. Dies ist jedoch nicht erlaubt, falls $a - 3 = 0$, d.h. falls $a = 3$, da eine Division durch 0 nicht definiert ist.

- b) $(x + 1)(b - 2) = 2bx$
- c) $a(1 + x) - 1 = x(2a - 1)$
- d) $(a - b)x = a$

- 5.5 Der Graf einer linearen Funktion hat die Steigung a und enthält den Punkt P . Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der linearen Funktion.
- a) $a = -5$ $P(5|-3)$ b) $a = 2$ $P(3|0)$
c) $a = 0$ $P(2|3)$
- 5.6 Alps Bikes verwendet die Formel $B(t) = -400t + 5000$, um den Buchwert $B(t)$ (in CHF) eines Mountain Bikes nach der Zeit t (in Jahren) nach dem Verkauf zu bestimmen.
- a) Was bedeuten die Zahlen -400 und 5000 ?
b) Wie lange geht es, bis das Mountain Bike vollständig entwertet bzw. abgeschrieben ist?
- 5.7 Zwei Artikel A und B werden linear abgeschrieben:
- | | |
|-----------|---|
| Artikel A | Anfangswert = 200 CHF
Abschreibung = 16 CHF/Jahr |
| Artikel B | Anfangswert = 240 CHF
Abschreibung = 32 CHF/Jahr |
- a) Wie lange geht es, bis die beiden Artikel vollständig abgeschrieben sind?
b) Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu welchem beide Artikel den gleichen Wert besitzen.
- Hinweis:
- Betrachten Sie den zeitlichen Verlauf der Werte der Artikel als lineare Funktionen.
- 5.8 Ein Startkapital von 5000 CHF wird zu einem unbekanntem Zinssatz einfach verzinst. Nach fünf Jahren beträgt das Kapital 5625 CHF.
- a) Bestimmen Sie den Zinssatz.
b) Wie lange würde es dauern, bis das Kapital den Wert 7000 CHF erreicht?
- 5.9 Entscheiden Sie, welche Aussagen wahr oder falsch sind. Kreuzen Sie das entsprechende Kästchen an. In jeder Aufgabe a) bis c) ist genau eine Aussage wahr.
- a) Die Lösungsmenge einer linearen Gleichung ...
- ... enthält immer mindestens ein Element.
 - ... enthält nie zwei Elemente.
 - ... enthält nur Elemente, falls die lineare Gleichung einer konstanten Funktion entspricht.
 - ... kann nicht die leere Menge sein.
- b) Wenn eine lineare Gleichung genau eine Lösung hat, dann ...
- ... schneidet der Graf der entsprechenden linearen Funktion die x -Achse.
 - ... enthält die Gleichung keine Parameter.
 - ... ist die Lösung sicher eine ganze Zahl.
 - ... kann keine andere lineare Gleichung die gleiche Lösung haben.
- c) Wenn eine lineare Gleichung die Lösung $x = 2$ hat, dann kann gefolgert werden, dass ...
- ... $x = 3$ keine Lösung ist.
 - ... der Graf der entsprechenden linearen Funktion die x -Achse an der Stelle $x = 2$ schneidet.
 - ... $P(2|0)$ ein Punkt auf dem Grafen der entsprechenden linearen Funktion ist.
 - ... $P(0|2)$ ein Punkt auf dem Grafen der entsprechenden linearen Funktion ist.

Lösungen

- 5.1 a) $L = \{-1\}$
 b) $L = \{13\}$
 c) $L = \mathbb{R}$
 d) $L = \{ \}$

- 5.2 a) $L = \left\{ \frac{11}{2} \right\}$
 b) $L = \mathbb{R}$
 c) $L = \{6\}$
 d) $L = \{ \}$
 e) $L = \{0\}$

- 5.3 a) $L = \{7\}$
 b) $L = \{5\}$
 c) $L = \{3\}$
 d) $L = \{ \}$

- 5.4 a) falls $a = 3$: keine Lösung $\Rightarrow L = \{ \}$
 falls $a \neq 3$: $x = \frac{a}{a-3}$ $\Rightarrow L = \left\{ \frac{a}{a-3} \right\}$
 b) falls $b = -2$: keine Lösung $\Rightarrow L = \{ \}$
 falls $b \neq -2$: $x = \frac{b-2}{b+2}$ $\Rightarrow L = \left\{ \frac{b-2}{b+2} \right\}$
 c) falls $a = 1$: $x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow L = \mathbb{R}$
 falls $a \neq 1$: $x = 1$ $\Rightarrow L = \{1\}$
 d) falls $a = b = 0$: $x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow L = \mathbb{R}$
 falls $a = b \neq 0$: keine Lösung $\Rightarrow L = \{ \}$
 falls $a \neq b$: $x = \frac{a}{a-b}$ $\Rightarrow L = \left\{ \frac{a}{a-b} \right\}$

- 5.5 a) $y = f(x) = -5x + 22$

Hinweise:

- Die Funktionsgleichung einer linearen Funktion lautet $y = f(x) = ax + b$

- $P(5|-3)$ ist ein Punkt auf dem Grafen der linearen Funktion. Daher müssen die Koordinaten von P die Funktionsgleichung der linearen Funktion erfüllen, d.h. $-3 = f(5) = a \cdot 5 + b$

- b) $y = f(x) = 2x - 6$

- c) $y = f(x) = 3$

- 5.6 a) Die Zahl -400 gibt an, dass der Wert des Mountain Bikes jährlich um 400 CHF abnimmt.
 Die Zahl 5000 gibt an, dass der Anfangswert des Mountain Bikes 5000 CHF beträgt.

- b) 12.5 Jahre

Hinweis:

- Vollständige Entwertung bis zum Zeitpunkt t bedeutet $B(t) = 0$.

- 5.7 a) Artikel A: 12.5 Jahre
Artikel B: 7.5 Jahre
- b) $t = 2.5$ Jahre (falls der Anfangswert zum Zeitpunkt $t = 0$ Jahre gemeint ist)
- 5.8 a) Steigung der linearen Funktion: $a = 125$
Zinssatz $i = 2.5\%$
- b) 16 Jahre
- 5.9 a) 2. Aussage
b) 1. Aussage
c) 3. Aussage