Gleichungen

Eine **Gleichung** besteht aus zwei Termen, die durch ein **Gleichheitszeichen** verknüpft sind.

Bsp.: $7x - 3 = 12x - 38$
Dies ist eine Gleichung. Die beiden Terme $7x - 3$ und $12x - 38$ sind durch ein Gleichheitszeichen verknüpft.

$2(7x - 3) + 5x$
Dies ist keine Gleichung. Es handelt sich um einen einzelnen Term.

Oft sind Gleichungen nur für bestimmte Werte einer oder mehrerer **Unbekannten** x, y, ... erfüllt.
Diese bestimmten Werte heissen **Lösungen** der Gleichung.

Bsp.: $2x + 4 = 10$
Diese Gleichung hat genau eine Lösung: $x = 3$

Bsp.: $x = x + 1$
Diese Gleichung hat keine Lösung.

Bsp.: $y^2 - 1 = 3$
Diese Gleichung hat zwei Lösungen: $y_1 = 2$
$y_2 = -2$

Bsp.: $\sqrt{x-1} + y = 2$
Diese Gleichung hat unendlich viele Lösungen: $(x,y)_1 = (2,1)$
$(x,y)_2 = (5,0)$
$(x,y)_3 = (10,-1)$
usw.

Die Menge aller Lösungen einer Bestimmungsgleichung ist die **Lösungsmenge** L.

Bsp.: $2x + 4 = 10$ $L = \{ 3 \}$

Bsp.: $x = x + 1$ $L = \{\}$

Bsp.: $y^2 - 1 = 3$ $L = \{ 2 , -2 \}$

Bsp.: $\sqrt{x-1} + y = 2$ $L = \{ (2,1) , (5,0) , (10,-1) , ... \}$

Zwei Bestimmungsgleichungen mit derselben Lösungsmenge sind **äquivalent**.

Bsp.: $2x + 4 = 10$
$x + 1 = 4$
Diese beiden Gleichungen haben die gleiche Lösung bzw. die gleiche Lösungsmenge $L = \{ 3 \}$.
Sie sind daher äquivalent.

Lösen einer Bestimmungsgleichung

Man löst eine Bestimmungsgleichung, indem man sie durch eine oder mehrere **Äquivalenzumformungen** in die Form "Unbekannte = ..." bringt.

Bsp.:	$2x + 4 = 10$	$\mid - 4$
	$2x = 6$	$\mid : 2$
	$x = 3$	

Bsp.:	$(x+2)(x-3) - 3(2x-3) = (x-6)^2 + 2$	| ausmultiplizieren
	$(x^2 - x - 6) - (6x - 9) = (x^2 - 12x + 36) + 2$	| Klammern auflösen
	$x^2 - x - 6 - 6x + 9 = x^2 - 12x + 36 + 2$	| zusammenfassen
	$x^2 - 7x + 3 = x^2 - 12x + 38$	$\mid - x^2$
	$- 7x + 3 = - 12x + 38$	$\mid + 12x$
	$5x + 3 = 38$	$\mid - 3$
	$5x = 35$	$\mid : 5$
	$x = 7$	

Äquivalenzumformungen

Die folgenden Umformungen führen eine Gleichung in eine neue, äquivalente Gleichung über. Die neue Gleichung hat also die gleiche(n) Lösung(en) bzw. die gleiche Lösungsmenge wie die alte Gleichung.

- **Addition** einer **beliebigen Zahl** auf beiden Seiten der Gleichung
- **Subtraktion** einer **beliebigen Zahl** auf beiden Seiten der Gleichung
- **Multiplikation** beider Seiten der Gleichung mit einer **beliebigen Zahl ≠ 0**
- **Division** beider Seiten der Gleichung mit einer **beliebigen Zahl ≠ 0**
- ...

Gleichungssysteme

Ein **Gleichungssystem** besteht aus mehreren Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

Bsp.: $2x + y = 5$
$x + 2y = 4$
Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten (x und y)

Bsp.: $3p - 2r + 4s - t = 0$
$p^2 + q^2 = 1$
$p + q = r - s$
Gleichungssystem mit 3 Gleichungen und 5 Unbekannten (p, q, r, s, t)

Eine **Lösung des Gleichungssystems** besteht aus einem Satz von Werten für die Unbekannten, für welche **alle** Gleichungen erfüllt sind.

Bsp.: $2x + y = 5$ I
$x + 2y = 4$ II

Die Gleichung I hat unendlich viele Lösungen:
$(x,y)_1 = (0,5)$
$(x,y)_2 = (1,3)$
$(x,y)_3 = \mathbf{(2,1)}$
$(x,y)_4 = (3,-1)$
$(x,y)_5 = (4,-3)$
usw.

Die Gleichung II hat ebenfalls unendlich viele Lösungen:
$(x,y)_1 = (-2,3)$
$(x,y)_2 = (0,2)$
$(x,y)_3 = \mathbf{(2,1)}$
$(x,y)_4 = (4,0)$
$(x,y)_5 = (6,-1)$
usw.

Nur das Paar $(x,y) = (2,1)$ erfüllt sowohl die Gleichung I als auch die Gleichung II.

Das ganze Gleichungssystem hat daher genau eine Lösung:
$(x,y) = (2,1)$

Lösen eines Gleichungssystems

1. Operationen beim Lösen eines Gleichungssytems

- **Äquivalenzfumformung** einer einzelnen Gleichung
  (vgl. Lösen einer Bestimmungsgleichung)

  Eine Äquivalenzumformung ändert nichts an den Lösungen einer einzelnen Gleichung.

  Bsp.: $2x + y = 5 \quad | \cdot 2$
  $4x + 2y = 10$

  Beide Gleichungen haben die gleichen Lösungen
  $(x,y)_1 = (0,5)$
  $(x,y)_2 = (1,3)$
  $(x,y)_3 = (2,1)$
  $(x,y)_4 = (3,-1)$
  $(x,y)_5 = (4,-3)$
  usw.

- **Addition** zweier Gleichungen des Gleichungssystems

  Zwei Gleichungen eines Gleichungssystems lassen sich zu einer einzigen Gleichung umformen, indem die beiden linken Seiten und die beiden rechten Seiten der Gleichungen addiert werden. In den Lösungen der neuen Gleichung sind die gemeinsamen Lösungen der ursprünglichen beiden Gleichungen enthalten (ohne Beweis).

  Bsp.: $2x + y = 5 \quad \text{I}$
  $x + 2y = 4 \quad \text{II}$

  Addition der beiden Gleichungen führt zur neuen Gleichung

  $3x + 3y = 9 \quad \text{III}$

  Die Gleichung III hat die Lösungen
  $(x,y)_1 = (0,3)$
  $(x,y)_2 = (1,2)$
  $(x,y)_3 = \mathbf{(2,1)}$
  $(x,y)_4 = (3,0)$
  usw.
  In diesen Lösungen ist die gemeinsame Lösung $(x,y) = (2,1)$ der ursprünglichen Gleichungen I und II enthalten.

2. Strategie beim Lösen eines Gleichungssystems mit n Gleichungen und n Unbekannten

Mit Hilfe von geeigneten Äquivalenzumformungen und Additionen von Gleichungen wird die Zahl der Gleichungen und gleichzeitig die Zahl der Unbekannten reduziert:

Gleichungssystem mit n Gleichungen und n Unbekannten
→ *Gleichungssystem mit (n-1) Gleichungen und (n-1) Unbekannten*
→ *Gleichungssystem mit (n-2) Gleichungen und (n-2) Unbekannten*
...
→ *Gleichungssystem mit 2 Gleichungen und 2 Unbekannten*
→ *1 Gleichung mit 1 Unbekannten*

3. Lösungsverfahren

- **Additionsmethode**

Bsp.: $4x + 7y = -16$ I
$7x - 3y = 33$ II
(2 Gleichungen mit 2 Unbekannten)

Geeignete Vielfache von I und II bilden

$3 \cdot \mathrm{I}$	$12x + 21y = -48$	III
$7 \cdot \mathrm{II}$	$49x - 21y = 231$	IV

III und IV addieren und nach x auflösen

III+IV $61x = 183$ $\quad | : 61$
(1 Gleichung mit 1 Unbekannten)

$x = 3$

Wert für x in I einsetzen und nach y lösen

$4 \cdot 3 + 7y = -16 \quad | - 12$
$7y = -28 \quad | : 7$
$y = -4$

(x,y) = (3,-4)

- **Gleichsetzungsmethode**

Bsp.: $4x + 7y = -16$ I
$7x - 3y = 33$ II
(2 Gleichungen mit 2 Unbekannten)

I nach x lösen

$4x + 7y = -16 \quad | - 7y$
$4x = -7y - 16 \quad | : 4$
$x = \frac{-7y - 16}{4}$ III

II nach x lösen

$7x - 3y = 33 \quad | + 3y$
$7x = 3y + 33 \quad | : 7$
$x = \frac{3y + 33}{7}$ IV

Ausdrücke für x in III und IV gleichsetzen und nach y lösen

$\frac{-7y - 16}{4} = \frac{3y + 33}{7} \quad | \cdot 28$
(1 Gleichung mit 1 Unbekannten)

$7(-7y - 16) = 4(3y + 33)$
$-49y - 112 = 12y + 132 \quad | + 49y \quad | - 132$
$61y = -244 \quad | : 61$
$y = -4$

Wert für y einsetzen in III

$x = \frac{-7(-4) - 16}{4} = 3$

(x,y) = (3,-4)

- **Einsetzungsmethode**

Bsp.: $4x + 7y = -16$ I
$7x - 3y = 33$ II
(2 Gleichungen mit 2 Unbekannten)

I nach x lösen

$4x + 7y = -16 \quad | -7y$
$4x = -7y - 16 \quad | : 4$
$x = \frac{-7y - 16}{4}$ III

x einsetzen in II und nach y lösen

$7\,\frac{-7y - 16}{4} - 3y = 33 \quad | \cdot 4$
(1 Gleichung mit 1 Unbekannten)

$7(-7y - 16) - 12\,y = 132$
$-49y - 112 - 12y = 132$
$-61y - 112 = 132 \quad | + 112$
$-61y = 244 \quad | : (-61)$
$y = -4$

Wert für y in III einsetzen

$x = \frac{-7(-4) - 16}{4} = 3$

(x,y) = (3,-4)