

Repetitions-Aufgaben

Aufgaben

R1.1 Die Mengen U, A und B sind wie folgt gegeben:

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$A = \{1, 2, 3, 9\}$$

$$B = \{1, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

Bestimmen Sie die Elemente der folgenden Mengen:

- a) A
- b) $A \setminus (U \setminus B)$
- c) $(U \setminus A) \cap B$
- d) $U \setminus ((U \setminus A) \cap B)$

R1.2 Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke:

a) $x^5 \cdot x^{-7}$

b) $\frac{x^8}{x^{-2}}$

c) $(-y^{-3})^{-2}$

d) $(x - y)(x^2 + xy + y^2)$

e) $\frac{4x^2y^3 - 6x^3y^4}{2x^2y^2 - 3xy^3}$

f) $\frac{x - 1 - \frac{x - 1}{x}}{\frac{1}{x - 1} + 1}$

R1.3 Welche der folgenden Beziehungen sind Funktionen? Begründen Sie Ihre Antworten.

a) $f_1: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto y = f_1(x) = \sqrt{x}$

b) $f_2: \{2, 3, 4, \dots\} \rightarrow \mathbb{N}, x \mapsto y = f_2(x) = x - 1$

c) D = Menge aller Schweizer Kantone
B = Menge aller Schweizer Ortschaften und Städte
 $f_3: D \rightarrow B, x \mapsto y = f_3(x) = \text{Hauptstadt/-ort von } x$

d) $f_4: \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 3\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = f_4(x) = \frac{1}{x^2 - 9}$

e) $f_5: \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = f_5(x) = \log_a(x)$

R1.4 Bestimmen Sie den "grösstmöglichen" Definitionsbereich D und den dazugehörigen Wertebereich W der folgenden Funktionen:

a) $f_1: D \rightarrow B, x \mapsto y = f_1(x) = \sqrt{9 - x}$

b) $f_2: D \rightarrow B, x \mapsto y = f_2(x) = \frac{1}{1 - x^2}$

R1.5 Falls $f(x) = 9x - x^2$, bestimmen Sie ...

- a) ... $f(0)$.
- b) ... $f(-3)$.
- c) ... $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ und vereinfachen Sie.

R1.6 Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

- a) $3x - 8 = 23$
- b) $\frac{6}{3x - 5} = \frac{6}{2x + 3}$
- c) $\frac{2x + 5}{x + 7} = \frac{1}{3} + \frac{x - 11}{2x + 14}$

R1.7 Lösen Sie die folgenden Gleichungen nach x , und geben Sie die Lösungsmenge an. Berücksichtigen Sie dabei, dass die Parameter a und p beliebige reelle Zahlen sein können.

- a) $ax = 60$
- b) $(p - 1)px = p^2 - 1$

R1.8 Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme:

- a) $2x + y = 19$
 $x - 2y = 12$
- b) $6x + 3y = 1$
 $y = -2x + 1$

R1.9 Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der linearen Funktion, deren Graf ...

- a) ... die Steigung 4 und den Achsenabschnitt 2 hat.
- b) ... durch den Punkt $(-2|1)$ verläuft und die Steigung $\frac{2}{5}$ hat.
- c) ... durch die Punkte $(-2|7)$ und $(6|-4)$ verläuft.
- d) ... durch den Punkt $(1|6)$ verläuft und parallel ist zu $y = 4x - 6$.

R1.10 Ein bestimmtes Produkt hat die folgenden Angebots- und Nachfragefunktionen:

$$p = f_A(q) = (4q + 5) \text{ CHF}$$
$$p = f_N(q) = (-2q + 81) \text{ CHF}$$

- a) Angenommen, der Preis beträgt \$53. Welche Menge wird dann angeboten und welche wird nachgefragt?
- b) Bestimmen Sie sowohl die Gleichgewichtsmenge als auch den Gleichgewichtspreis.

R1.11 Kosten $C(x)$ und Ertrag $R(x)$ für ein bestimmtes Produkt sind wie folgt gegeben:

$$C(x) = (38.80x + 4500) \text{ CHF}$$
$$R(x) = 61.30x \text{ CHF}$$

- a) Bestimmen Sie die Fixkosten.

- b) Bestimmen Sie die variablen Kosten für die Fertigung von 10 Stück.
 c) Bestimmen Sie, welche Anzahl gefertigt werden muss, um die Gewinnschwelle zu erreichen.

R1.12 Die Angebots- und die Nachfragefunktion für ein Produkt seien linear und durch die untenstehenden Tabellen bestimmt. Bestimmen Sie Menge und Preis bei Marktgleichgewicht.

Angebotsfunktion		Nachfragefunktion	
Preis	Menge	Preis	Menge
\$100	200	\$200	200
\$200	400	\$100	400
\$300	600	\$0	600

R1.13 Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Gleichungen:

- a) $4x - 3x^2 = 0$
 b) $3x^2 - 6x = 9$
 c) $4x^2 + 25 = 0$
 d) $\frac{1}{x} + 2x = \frac{1}{3} + \frac{x+1}{x}$
 e) $\frac{x-4}{x-5} = \frac{30-x^2}{x^2-5x}$

R1.14 Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der quadratischen Funktion, deren Graf ...

- a) ... den Scheitelpunkt (2|4) hat und durch (3|3) verläuft.
 b) ... durch (-3|-3), (0|3) und (3|0) verläuft.

R1.15 Die Angebotsfunktion für ein Produkt ist gegeben durch $p = q^2 + 300$ und die Nachfragefunktion durch $p + q = 410$. Bestimmen Sie die Gleichgewichtsmenge und den Gleichgewichtspreis.

R1.16 Angenommen, die Kosten $C(x)$ für ein Produkt seien gegeben durch $C(x) = 1760 + 8x + 0.6x^2$ und der Ertrag $R(x)$ durch $R(x) = 100x - 0.4x^2$. Bestimmen Sie die Gewinnschwellen.

R1.17 Betrachten Sie die folgende Funktion f:

$$f: \begin{matrix} \mathbb{R} & \mathbb{R} \\ x & y = f(x) = (k-x)(x-2) - k(x^2-2) - 1 \quad (k \in \mathbb{R}) \end{matrix}$$

Bestimmen Sie den (die) Wert(e) für k, so dass der Graf von f und die x-Achse genau einen gemeinsamen Punkt besitzen.

R1.18 Die Funktionen f und g sind wie folgt definiert:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = f(x) = 2x^2 + 4x + 1$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto y = g(x) = ax + \frac{1}{2} \quad (a \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

Bestimmen Sie den (die) Wert(e) für a, so dass sich die Grafen von f und g berühren.

- R1.19 Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Exponentialfunktion, deren Graf durch die Punkte P und Q verläuft.
- a) $P(0|1)$ $Q(2|9)$
b) $P(1|20)$ $Q(2|100)$
- R1.20 Berechnen Sie die folgenden Logarithmen ohne Taschenrechner:
- a) $\log_5(1)$
b) $\log_2(8)$
c) $\log_3\left(\frac{1}{3}\right)$
d) $\log_3(3^8)$
e) $e^{\ln(5)}$
f) $10^{\log(3.15)}$
- R1.21 Lösen Sie die folgenden Gleichungen:
- a) $6^{4x} = 46'656$
b) $8000 = 250 \cdot 1.07^x$
c) $312 = 300 + 300 e^{-0.08x}$
- R1.22 Angenommen, \$8000 werden bei einfacher Verzinsung und einem Zinssatz von 12% 3 Jahre lang ausgeliehen. Bestimmen Sie den Wert der Anleihe nach Ablauf der 3 Jahre.
- R1.23 Maria Toy hat sich von ihren Eltern \$2000 ausgeliehen und ihnen nach 9 Monaten \$2100 zurückgezahlt. Welchen Zinssatz hat Mary Toy unter der Annahme einfacher Verzinsung gezahlt?
- R1.24 Welchen Betrag an Sommerverdienst muss ein Student am 31. August einzahlen, um am 31. Dezember des gleichen Jahres über \$3000 für Studiengebühren zu verfügen, falls das Geld zu 6% und einfacher Verzinsung angelegt ist?
- R1.25 Angenommen, \$1000 werden 4 Jahre lang zu einem Zinssatz von 8% und einer vierteljährlichen Verzinsung angelegt. Wieviel Zins trägt das Geld in dieser Zeit?
- R1.26 Wieviel muss man jetzt investieren, um in 4 Jahren \$18'000 zu haben, falls die Investition monatlich zu einem Jahreszinssatz von 5.4% verzinst wird?
- R1.27 Im Jahr 1990 hatte ein afrikanisches Land 4.5 Millionen Einwohner. Die Bevölkerung ist seither 4% pro Jahr gewachsen. Wie gross wird die Bevölkerung im Jahr 2010 sein, wenn sich der Wachstumsfaktor nicht verändert?
- R1.28 Ein Unternehmen möchte in 4 1/2 Jahren \$250'000 für Investitionen zur Verfügung haben. Wieviel muss zu Beginn jedes Quartals einbezahlt werden, um dieses Ziel zu erreichen, falls das investierte Geld vierteljährlich zu einem Jahreszinssatz von 10.2% verzinst wird?

- R1.29 Ein Altersvorsorgekonto mit halbjährlicher Verzinsung zu 6.8% (Jahreszinssatz) enthält \$488'000. Wie lange können am Ende jedes Halbjahres \$40'000 abgehoben werden bis der Kontostand \$0 ist?
- R1.30 In 3 Jahren möchte ein Paar eine 4-monatige Reise nach China, Japan und Südostasien antreten. Ab Reisebeginn möchten sie jeweils zu Monatsbeginn \$5000 abheben, um die Reisekosten für den entsprechenden Monat bezahlen zu können. Wieviel müssen sie ab jetzt 3 Jahre lang zu Beginn jedes Monats einzahlen, damit bei Reisebeginn genügend Geld auf dem Konto liegt? Es wird angenommen, dass das Konto monatlich verzinst wird bei einem Jahreszinssatz von 6.6%.
- R1.31 Herr S. muss seiner geschiedenen Frau 8 Jahr lang am Ende jedes Jahres 25'000 CHF bezahlen. Auf Grund eines privaten Gewinns in seiner Firma ist er in der Lage, die ganze Summe bereits am Ende des ersten Jahres zu bezahlen (statt in 8 Raten am Ende jedes Jahres). Welchen Betrag muss er am Ende des ersten Jahres bezahlen, falls ein Jahreszinssatz von 4.5% vereinbart wurde?
- R1.32 Herr P. denkt über eine Anlage für seine Altersvorsorge nach. Er möchte ab dem Jahr, in welchem er 60 Jahre alt wird, 15 Jahre lang jeweils am Jahresende von einem Konto 8000 CHF abheben können. Er nimmt an, dass der Jahreszinssatz während dieser 15 Jahre 2.5% betragen wird.
- Herr P. möchte das Geld sparen, indem er 30 gleiche Raten am Ende jedes Jahres einzahlt, und zwar bis zum Jahr, in welchem er 55 Jahre alt wird. Wieviel muss er jedes Jahr einzahlen, falls das Geld jährlich zu einem Zinssatz von 3% verzinst wird?
 - Herr P. hat im Lotto 40'000 CHF gewonnen! Würde dieses Geld für seine Altersvorsorge reichen, wenn er es am Ende des Jahres, in welchem er 25 Jahre alt wird, einzahlen würde? Nehmen Sie den gleichen Zinssatz an wie in a).

Lösungen

- R1.1 a) $A = \{1, 3, 9\}$
 b) $A \cap (U \setminus B) = \{1, 2, 3, 4, 9, 10\}$
 c) $(U \setminus A) \cap B = \{5, 6, 7, 8\}$
 d) $U \setminus ((U \setminus A) \cap B) = \{1, 2, 3, 4, 9, 10\}$

- R1.2 a) $\frac{1}{x^2}$ b) x^{10} c) y^6
 d) $x^3 - y^3$ e) $\frac{2xy(2 - 3xy)}{2x - 3y}$ f) $\frac{(x - 1)^3}{x^2}$

- R1.3 a) keine Funktion ($x = 0$ hat kein Bildelement)
 b) Funktion
 c) Funktion
 d) keine Funktion (f nicht definiert für $x = 3$)
 e) Funktion

- R1.4 a) $9 - x \geq 0$
 $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 9\}$
 $E = \mathbb{R}_0^+$
 b) $1 - x^2 \geq 0$
 $D = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$
 $E = \mathbb{R} \setminus \{y \in \mathbb{R} \mid 0 < y < 1\}$

- R1.5 a) $f(0) = 0$ b) $f(-3) = -36$ c) $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 9 - 2x - h$

- R1.6 a) $L = \left\{ \frac{31}{3} \right\}$ b) $L = \{8\}$ c) $L = \{-7\}$

- R1.7 a) Division durch a nur erlaubt falls $a \neq 0$
 falls $a = 0$: keine Lösung $L = \{ \}$
 falls $a \neq 0$: $x = \frac{60}{a}$ $L = \left\{ \frac{60}{a} \right\}$
 b) Division durch p nur erlaubt falls $p \neq 0$
 Division durch $p - 1$ nur erlaubt falls $(p - 1) \neq 0$
 falls $p = 0$: keine Lösung $L = \{ \}$
 falls $p = 1$: $x \in \mathbb{R}$ $L = \mathbb{R}$
 falls $p \neq 0$ und $p \neq 1$: $x = \frac{p+1}{p}$ $L = \left\{ \frac{p+1}{p} \right\}$

- R1.8 a) $(x, y) = (10, -1)$
 $L = \{(10, -1)\}$ b) keine Lösung
 $L = \{ \}$

R1.9 a) $y = f(x) = 4x + 2$ b) $y = f(x) = \frac{2}{5}x + \frac{9}{5}$ c) $y = f(x) = -\frac{11}{8}x + \frac{17}{4}$
d) $y = f(x) = 4x + 2$

R1.10 a) 12 angeboten, 14 nachgefragt
b) $f_A(q) = f_N(q)$ für $q = \frac{38}{3} = 12.3... \in \mathbb{N}$ kein Gleichgewicht

R1.11 a) 4500 CHF b) 388 CHF c) $x = 200$

R1.12 $q = 300, p = \$150$

R1.13 a) $L = \{0, 4/3\}$ b) $L = \{-1, 3\}$ c) $L = \{ \}$
d) $L = \{2/3\}$ e) $L = \{-3\}$

R1.14 a) $y = f(x) = -(x - 2)^2 + 4$
b) $y = f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x + 3$

R1.15 $q = 10, p = 400$

R1.16 $x_1 = 46 + 2\sqrt{89}$ $x_2 = 46 - 2\sqrt{89}$

R1.17 Die Gleichung $f(x) = 0$ muss genau eine Lösung besitzen.
 $k_1 = 0, k_2 = -1$

R1.18 Die Gleichung $f(x) = g(x)$ muss genau eine Lösung besitzen.
 $a_1 = 2, a_2 = 6$

R1.19 a) $y = f(x) = 3^x$ b) $y = f(x) = 4 \cdot 5^x$

R1.20 a) 0 b) 3 c) -1
d) 8 e) 5 f) 3.15

R1.21 a) $x = 1.5$ b) $x = 51.22...$ c) $x = 40.23...$

R1.22 $K_3 = \$10'880$

R1.23 $p = 6 \frac{2}{3}\%$

R1.24 $K_0 = \$2941.18$

R1.25 $\$372.79$

R1.26 $K_0 = \$14'510.26$

R1.27 9.86 Millionen

R1.28 $r = \$10'841.24$

R1.29 $n = 16.02\dots$ 16 Halbjahre = 8 Jahre

R1.30 $r = \$497.04$

R1.31 172'317.53 CHF (aufgerundet)

R1.32 a) $r = 1795.93$ CHF

b) ja