

Repetitions-Übung 5 z-Transformation

Aufgaben

1. Bestimmen Sie die z-Transformierte $X(z)$ vom folgenden Signal $x[n]$:

$$x[n] = a^n ([n] - [n-3]) \quad a < 1$$

2. Eine Zeitverschiebung des Signals $x[n]$ verändert den Konvergenzbereich seiner z-Transformierten $X(z)$ nicht, ausser dass allenfalls die Zahl $z=0$ hinzukommt oder wegfällt.

Geben Sie ein konkretes Beispiel für ein Signal $x[n]$ an, welches die folgenden beiden Eigenschaften besitzt:

- Der Konvergenzbereich der z-Transformierten $X(z)$ besteht aus allen komplexen Zahlen z .
 - Der Konvergenzbereich der z-Transformierten $ZT(x[n-k])$ ($k > 0$ beliebig) besteht aus allen komplexen Zahlen ausser $z=0$.
3. Gegeben ist die z-Transformierte $X(z)$ einer zeitdiskreten Funktion $x[n]$:

$$X(z) = \frac{15z^{-3}}{3 - 7z^{-1} + 2z^{-2}} \quad |z| > 2$$

Bestimmen Sie die Funktion $x[n]$.

4. Im Lehrbuch *Meyer* entnimmt man der Tabelle auf der Seite 186 das folgende z-Transformierten-Paar:

$$[n] e^{-an} \quad \circ \text{---} \bullet \quad \frac{z}{z - e^{-a}} \quad |z| > e^{-a} \quad (*)$$

Gegeben ist nun die folgende Funktion $x[n]$:

$$x[n] = e^{2n} [n].$$

Bestimmen Sie mit Hilfe der Beziehung (*) die Zahl

$$X(4) = ZT(x[n])|_{z=4}$$

5. Gegeben ist die folgende Funktion $x[n]$:

$$x[n] = \sin\left(\frac{2}{7} n\right) [n-7]$$

Bestimmen Sie die z-Transformierte $X(z)$ von $x[n]$.

Benützen Sie dazu lediglich die Tabelle auf der Seite 186 im Buch *Meyer* sowie die Eigenschaften der z-Transformation.

6. Ein lineares, zeitdiskretes System hat die Übertragungsfunktion

$$H(z) = \frac{0.58z - 0.58}{z - 0.16}$$

und wird angeregt durch das Signal

$$x[n] = \begin{cases} 1 & (0 \leq n \leq 5) \\ 0 & (\text{sonst}) \end{cases}$$

Bestimmen Sie das Ausgangssignal $y[n]$.

7. Gegeben ist die Übertragungsfunktion $H(z)$ eines kausalen LTD-Systems. Beurteilen Sie, ob das System stabil ist oder nicht.

a)
$$H(z) = \frac{1 - z^{-1} - 4z^{-2} - 3z^{-3}}{1 - 3z^{-1}}$$

b)
$$H(z) = 1 + 2z^{-1} + z^{-2}$$

c)
$$H(z) = \frac{1 - 2z^{-1}}{4 - 2(a+1)z^{-1} + az^{-2}}$$

8. Ein lineares, zeitdiskretes System soll die folgende Eigenschaft haben:

Der Output $y[n]$ soll für jedes n der arithmetische Mittelwert des Inputs $x[n]$ bei n , $n-1$ und $n-2$ sein.

Bestimmen Sie

- a) die Übertragungsfunktion $H(z)$ des Systems.
b) die Impulsantwort $h[n]$ des Systems.

Lösungen

1. $X(z) = 1 + az^{-1} + a^2z^{-2}$

2. z.B. $x[n] = \begin{cases} 1 & (-n_0 \leq n \leq 0) \\ 0 & (n > 0) \end{cases}$ $n_0 > 0$ beliebig

3. $x[n] = 6 \cdot 2^{n-3} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-3}$ $[n-3]$

4. $X(4)$ existiert nicht

5. $X(z) = \frac{z^{-8} \sin\left(\frac{2}{7}\right)}{1 - 2z^{-1} \cos\left(\frac{2}{7}\right) + z^{-2}}$ $|z| > 1$

6. $y[n] = 0.58 \cdot 0.16^n$ $[n] - 0.58 \cdot 0.16^{n-6}$ $[n-6]$

7. a) nicht stabil
b) stabil
c) stabil, falls $a < 2$ $a=4$

8. a) $H(z) = \frac{1}{3} (1 + z^{-1} + z^{-2})$
b) $h[n] = \begin{cases} \frac{1}{3} & (0 \leq n \leq 2) \\ 0 & (\text{sonst}) \end{cases}$