Repetitions-Übung 3 Fourier-Reihen

Aufgaben

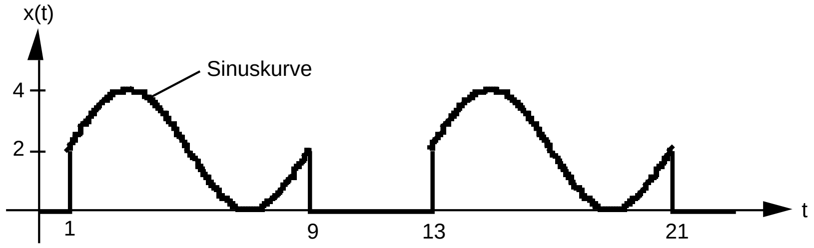
1. Gegeben ist die folgende periodische Funktion x(t):

$$x(t) = 2\sin(3t) + 4\cos(15t)$$

a) Bestimmen Sie alle reellen Fourier-Koeffizienten a_0, a_k (k N) und b_k (k N).

b) Bestimmen Sie alle komplexen Fourier-Koeffizienten c_k (k Z).

2. Gegeben ist ein Ausschnitt des Grafen einer periodischen Funktion x(t):



Die Funktion x(t) kann in die folgende reelle Fourier-Reihe entwickelt werden:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_0 t) \right) \qquad \omega_0 := \frac{2\pi}{T_0},\ T_0 = \text{Grundperiode von } x(t)$$

a) Bestimmen Sie den Fourier-Koeffizienten a_0.

b) Stellen Sie die für die Berechnung der Fourier-Koeffizienten a_k und b_k benötigten Integrale auf. Sie sollen die Integrale nur so weit aufbereiten, dass sie jemand berechnen kann, der nichts von Fourier-Reihen versteht und die Funktion x(t) nicht kennt.

3. Jede periodische Funktion x(t) kann in die folgende reelle Fourier-Reihe entwickelt werden:

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + b_k \cdot \sin(k\omega_0 t) \right) \qquad \omega_0 := \frac{2\pi}{T_0},\ T_0 = \text{Grundperiode von } x(t)$$

Beurteilen Sie, ob die folgende Behauptung wahr oder falsch ist:
"Wenn alle Koeffizienten a_k (k N) gleich Null sind, dann kann man folgern, dass x(t) ungerade ist."

4. Das Signal x(t) enthält eine Sinus-Schwingung der Frequenz a und eine Cosinus-Schwingung der Frequenz b:

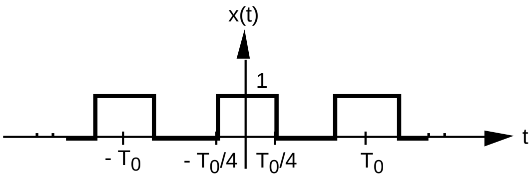
$$x(t) = 2\sin\left(at - \frac{\pi}{2}\right) + 6\cos\left(bt + \frac{3\pi}{2}\right)$$

a) Bestimmen Sie alle komplexen Fourier-Koeffizienten c_k (k Z) für a = 6 und b = 8.

b) Beurteilen Sie, ob es noch weitere Werte für a und b gibt, für welche die komplexen Fourier-Koeffizienten des Signals x(t) gleich sind wie im Fall a = 6 und b = 8.
Geben Sie gegebenenfalls alle möglichen Werte für a und b an.

5. (siehe Seite 2)

5. Gegeben sind das periodische Rechtecksignal x(t) sowie seine komplexen Fourier-Koeffizienten c_k ($k \in Z$):



$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2} & (k=0) \\ \frac{1}{k\pi} & (k = ...,-11,-7,-3,1,5,9,...) \\ -\frac{1}{k\pi} & (k = ...,-9,-5,-1,3,7,11,...) \\ 0 & (k \text{ gerade} \quad k \neq 0) \end{cases}$$

Bestimmen Sie den prozentualen Anteil der mittleren Signalleistung, welcher zusammen im konstanten Anteil, in der Grundschwingung und in den ersten vier Oberschwingungen steckt.

Lösungen

1. a) $a_0 = 0$
$a_5 = 4,\ a_k = 0\ (k \neq 5)$
$b_1 = 2,\ b_k = 0\ (k \neq 1)$

b) $c_1 = -j$
$c_{-1} = j$
$c_5 = c_{-5} = 2$
$c_k = 0\ (k \neq \pm 1, \pm 5)$

2. a) $$a_0 = \frac{1}{12} \int_1^9 \left(2 + 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} t - \frac{\pi}{4}\right)\right) dt = \frac{4}{3}$$

b) $$a_k = \frac{1}{6} \int_1^9 \left(2 + 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} t - \frac{\pi}{4}\right)\right) \cos\left(k \frac{\pi}{6} t\right) dt$$

$$b_k = \frac{1}{6} \int_1^9 \left(2 + 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} t - \frac{\pi}{4}\right)\right) \sin\left(k \frac{\pi}{6} t\right) dt$$

3. ...

4. a) $c_3 = c_{-3} = -1$
$c_4 = -3j$
$c_{-4} = 3j$
$c_k = 0\ (k \neq \pm 3, \pm 4)$

b) $b = \frac{4}{3} a$

5. $$\text{Anteil} = \frac{|c_0|^2 + |c_{-1}|^2 + |c_1|^2 + |c_{-3}|^2 + |c_3|^2 + |c_{-5}|^2 + |c_5|^2}{\frac{1}{T_0} \int_{(T_0)} |x(t)|^2\, dt} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{\pi^2} \frac{518}{225}}{\frac{1}{2}} \approx 0.97 = 97\ \%$$