

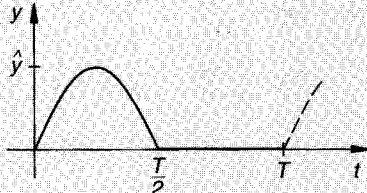
Repetitions-Übung 1 Komplexe Zahlen, Fourier-Reihen, Fourier-Transformation

Aufgaben

1. (Klausur 31.1.2003)

In einer Fourier-Reihen-Tabelle ist die reelle Fourier-Reihe eines Sinusimpulses aufgeführt:

8. Sinusimpuls (Einweggleichrichtung)

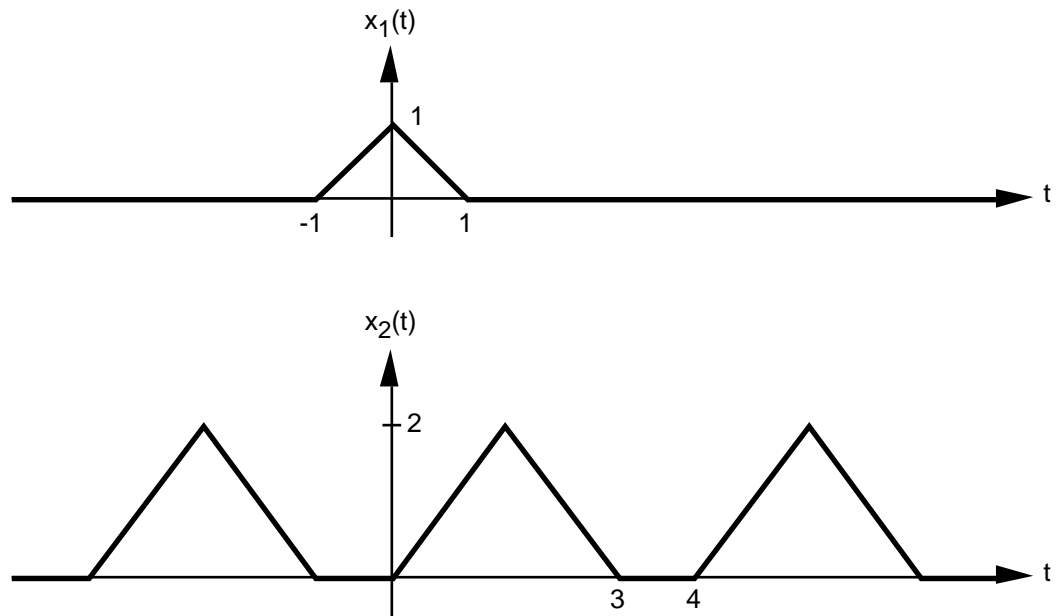
$$y(t) = \begin{cases} \hat{y} \cdot \sin(\omega_0 t) & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{für } \frac{T}{2} \leq t \leq T \end{cases}$$


$$y(t) = \frac{\hat{y}}{\pi} + \frac{\hat{y}}{2} \cdot \sin(\omega_0 t) - \frac{2\hat{y}}{\pi} \left(\frac{1}{1 \cdot 3} \cdot \cos(2\omega_0 t) + \frac{1}{3 \cdot 5} \cdot \cos(4\omega_0 t) + \frac{1}{5 \cdot 7} \cdot \cos(6\omega_0 t) + \dots \right)$$

Bestimmen Sie alle komplexen Fourier-Koeffizienten c_k ($k \in \mathbb{Z}$) der Funktion $y(t)$.

2. (Klausur 31.1.2003)

Gegeben sind die Grafen der aperiodischen Funktion $x_1(t)$ und der periodischen Funktion $x_2(t)$:



Die Fourier-Transformierte $X_1(\omega)$ von $x_1(t)$ sei bekannt.

Drücken Sie die Fourier-Transformierte $X_2(\omega)$ von $x_2(t)$ durch die Fourier-Transformierte $X_1(\omega)$ von $x_1(t)$ aus.

Geben Sie den Zusammenhang zwischen $X_2(\omega)$ und $X_1(\omega)$ in Form einer Formel $X_2(\omega) = \dots$ an, mit welcher man $X_2(\omega)$ aus $X_1(\omega)$ bestimmen kann.

3. (Klausur 1.2.2002)

Bei der Diskretisierung von LTI-Systemen kommt die folgende Funktion f vor:

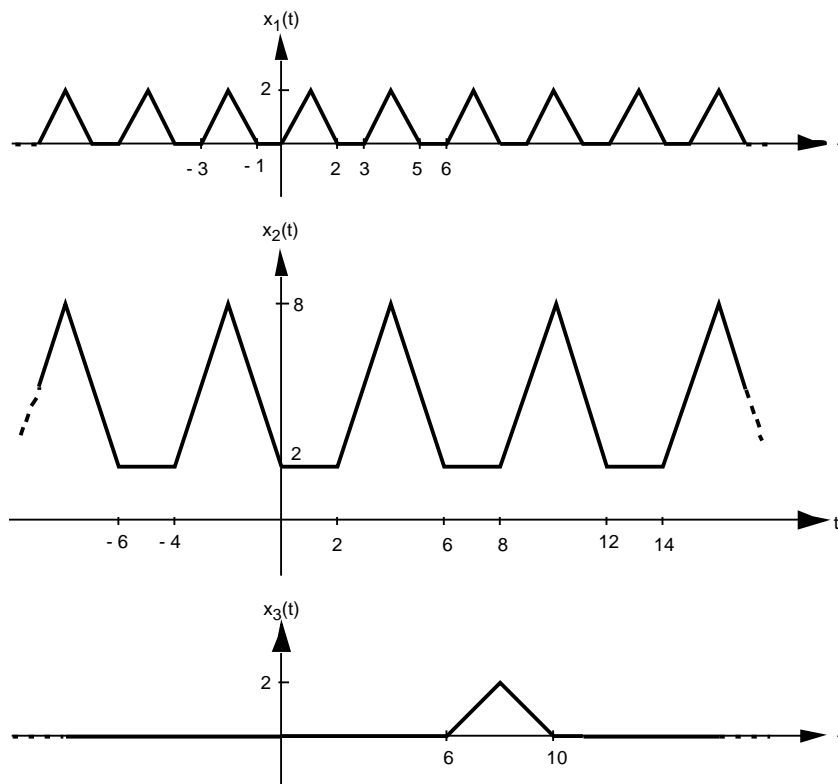
$$f: \begin{matrix} \mathbb{C} & \mathbb{C} \\ s & z = f(s) = \frac{1}{1-sT} \quad (T \in \mathbb{R}^+) \end{matrix}$$

Beurteilen Sie mit Begründung, ob die folgende Aussage wahr oder falsch ist:

"Die Funktion f bildet die Menge $\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) = 0\}$ auf die Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ ab, d.h. jede komplexe Zahl s mit $\operatorname{Re}(s) = 0$ wird auf eine komplexe Zahl z mit $|z| = 1$ abgebildet."

4. (Klausur 1.2.2002)

Gegeben seien die Grafen der beiden periodischen Funktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ sowie der Graph der aperiodischen Funktion $x_3(t)$:



- a) Es sei angenommen, dass man die Fourier-Transformierte $X_3(\omega)$ der Funktion $x_3(t)$ kennt. Drücken Sie die Fourier-Koeffizienten c_{1k} ($k \in \mathbb{Z}$) der Funktion $x_1(t)$ durch die Fourier-Transformierte $X_3(\omega)$ der Funktion $x_3(t)$ aus. Geben Sie den Zusammenhang zwischen den Koeffizienten c_{1k} ($k \in \mathbb{Z}$) und $X_3(\omega)$ in Form einer Formel $c_{1k} = \dots$ an, mit welcher man die Koeffizienten c_{1k} ($k \in \mathbb{Z}$) aus $X_3(\omega)$ bestimmen kann.
- b) Es sei nun angenommen, dass man alle komplexen Fourier-Koeffizienten c_{1k} ($k \in \mathbb{Z}$) der Funktion $x_1(t)$ kennt. Drücken Sie die komplexen Fourier-Koeffizienten c_{2k} ($k \in \mathbb{Z}$) der Funktion $x_2(t)$ durch die komplexen Fourier-Koeffizienten c_{1k} ($k \in \mathbb{Z}$) der Funktion $x_1(t)$ aus.
- (Fortsetzung Seite 3)

Geben Sie den Zusammenhang zwischen den Koeffizienten der beiden Funktionen in Form einer Formel $c_{2k} = \dots$ an, mit welcher man die Koeffizienten c_{2k} ($k \in \mathbb{Z}$) aus den Koeffizienten c_{1k} ($k \in \mathbb{Z}$) bestimmen kann.

5. (Klausur 2.3.2001)

Gegeben ist die folgende periodische Funktion $x(t)$:

$$x(t) = 2 + \sin(9t) - 3 \cos(6t)$$

Die Funktion kann sowohl in eine reelle als auch in eine komplexe Fourier-Reihe entwickelt werden:

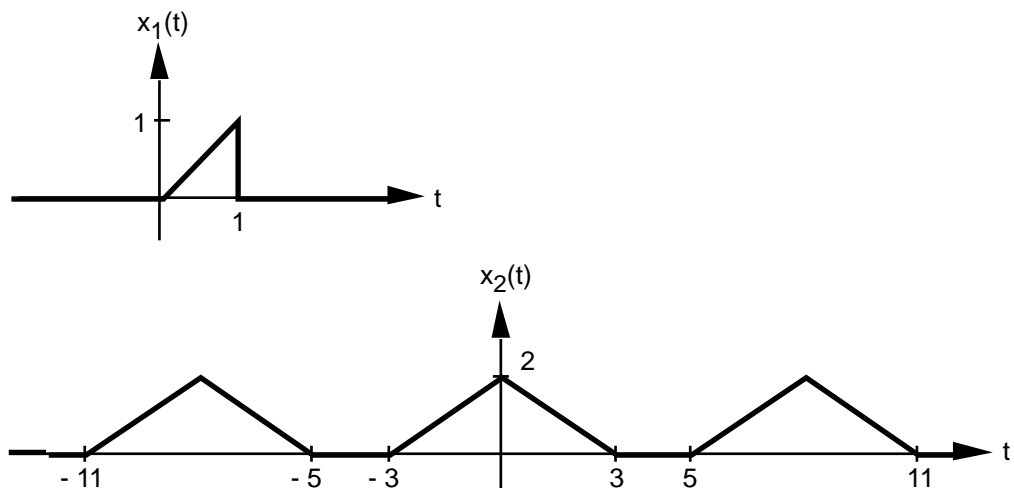
$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k \omega_0 t) + b_k \sin(k \omega_0 t))$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk \omega_0 t}$$

Bestimmen Sie alle reellen und komplexen Fourier-Koeffizienten a_0 , a_k , b_k und c_k der Funktion $x(t)$.

6. (Klausur 2.3.2001)

Gegeben sind die Grafen der aperiodischen Funktion $x_1(t)$ und der periodischen Funktion $x_2(t)$:



a) Bestimmen Sie die Fourier-Transformierte $X_1(\omega)$ der Funktion $x_1(t)$ von Hand.
Als Hilfsmittel sind nur eine Integrationstabelle erlaubt, jedoch keine Fourier-Transformations-Tabelle und kein Taschenrechner.

b) Bestimmen Sie die komplexen Fourier-Koeffizienten c_k der Funktion $x_2(t)$ aus der Fourier-Transformierten $X_1(\omega)$ der Funktion $x_1(t)$.
Sie sollen also die Koeffizienten c_k weder von Grund auf berechnen noch eine Fourier-Reihen-Tabelle verwenden.

Benützen Sie jedoch die Kenntnis von $X_1(\omega)$ sowie die Eigenschaften der Fourier-Transformation.

Betrachten Sie $X_1(\omega)$ als bekannt, auch wenn Sie in der Aufgabe a) kein Resultat erhalten haben sollten. Der explizite Ausdruck für $X_1(\omega)$ ist unwesentlich, da Sie lediglich den Zusammenhang zwischen $X_1(\omega)$ und den Koeffizienten c_k aufzeigen sollen.

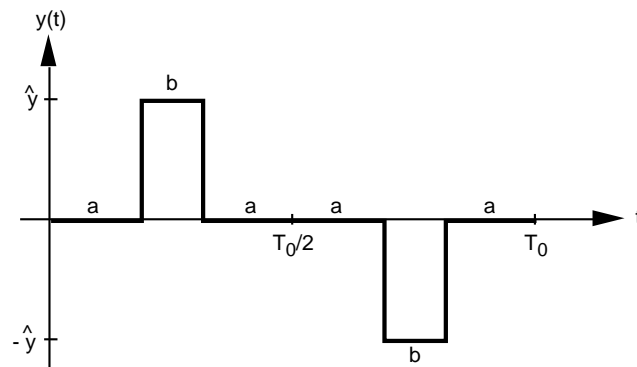
7. (Klausur 8.12.2000)

Beurteilen Sie mit Begründung, ob die folgende Aussage für jede komplexe Zahl z wahr oder falsch ist:

$$|j \cdot z + z^*|^2 = 2 \cdot |z|^2 - 2 \cdot \text{Im}(z^2)$$

8. (Klausur 8.12.2000)

In einer Fourier-Reihen-Tabelle ist die folgende periodische Funktion $y(t)$ und deren reelle Fourier-Reihe $\text{FR}(y(t))$ aufgeführt:



$$\text{FR}(y(t)) = \frac{4\hat{y}}{1} \frac{\cos(\frac{0a}{T_0})}{1} \sin(\frac{0}{T_0}t) + \frac{\cos(\frac{3}{3} \frac{0a}{T_0})}{3} \sin(3 \frac{0}{T_0}t) + \frac{\cos(\frac{5}{5} \frac{0a}{T_0})}{5} \sin(5 \frac{0}{T_0}t) + \dots$$

wobei: $\frac{0}{T_0} := \frac{2}{T_0}$
 $T_0 = \text{Grundperiode}$

Prüfen Sie die Fourier-Reihe nach, indem Sie die Fourier-Koeffizienten b_k (= Koeffizienten der Sinus-Glieder) von Hand, d.h. ohne Taschenrechner, berechnen.

Auftretende Integrale müssen nicht auf Grundintegrale zurückgeführt werden, sondern Sie können dazu Integraltafeln verwenden.

Lösungen

1. \hat{y} (k = 0)
 $c_k = -\frac{\hat{y}}{k^2-1}$ (k gerade k ≠ 0)
 $-j\frac{\hat{y}}{4}$ (k = 1)
 $j\frac{\hat{y}}{4}$ (k = -1)
 0 (k ungerade k ≠ ±1)

2. $X_2(\omega) = \frac{3}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-jk(3/4)} X_1\left(k\frac{3}{4}\right) \left(-k\frac{3}{2}\right)$

3. falsch

4. a) $c_{1k} = \frac{1}{6} X_3\left(k\frac{3}{3}\right)$
 b) $c_{2k} = \frac{3}{3} c_{10+2} \quad (k=0)$
 $3 e^{-jk(2/3)} c_{1k} \quad (k \neq 0)$

5. $a_0 = 2 \quad a_2 = -3 \quad a_k = 0 \quad (k \neq 2)$
 $b_3 = 1 \quad b_k = 0 \quad (k \neq 3)$
 $c_0 = 2 \quad c_2 = -\frac{3}{2} \quad c_k = 0 \quad (k \neq \pm 2, \pm 3)$
 $c_{-2} = -\frac{3}{2}$
 $c_3 = -\frac{j}{2}$
 $c_{-3} = \frac{j}{2}$

6. a) $X(\omega) = -\frac{1}{2} (e^{-j\omega} (-j\omega - 1) + 1) \quad (\omega \neq 0)$
 $\frac{1}{2} \quad (\omega = 0)$
 b) $c_k = \frac{3}{4} e^{jk(3/4)} X_1\left(k\frac{3}{4}\right) + e^{-jk(3/4)} X_1\left(-k\frac{3}{4}\right)$

7. wahr

8. $b_k = 0 \quad (k \text{ gerade})$
 $\frac{4\hat{y}}{k} \cos(k\omega_0 a) \quad (k \text{ ungerade})$